2027

확률과 통계

CONNECT

수능에 필요한 모든 것을 담은 수능 공략서

UNOVA

Contents

1. 경우의 수와 확률

· 개념편 01

· 문제편 24

2. 통계

· 개념편 155

· 문제편 168

PART 1
경우의 수와 확률

개념 유형

(1) 여러 가지 순열
(2) 중복조합과 이항정리
(3) 확률의 뜻과 활용
(4) 조건부확률

기출 유형

(1) 숫자, 문자 나열하기
(2) 숫자, 문자 나열하기 (심화)
(3) 카드 나열하기
(4) 의자 나열하기
(5) 숫자 뽑기
(6) 카드 뽑기
(7) 물건 뽑기
(8) 공 뽑기
(9) 물건 나눠주기
(10) 주사위 굴리기
(11) 카드나 동전 뒤집기
(12) 순서쌍 구하기
(13) 함수의 개수 구하기
(14) 전개식의 계수 구하기
(15) 벤다이어그램 그리기

THEME

1 — 여러 가지 순열

정리1 합의 법칙과 곱의 법칙

개념1 합의 법칙 (사건 중 하나라도 일어날 확률을 구할 때 사용)

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A와 사건 B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면
사건 A와 B는 동시에 일어나지 않으므로, 두 사건은 겹치지 않는다.
따라서 두 사건이 겹치지 않으니 그냥 더하면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

예 남자 학생 2명, 여자 학생 3명이 있을 때 반장 선거에서
남자 학생 또는 여자 학생이 뽑히는 경우의 수를 구해보자.

남자 학생(철수, 민수)이 뽑힐 경우의 수는 2이다.
여자 학생(영희, 소영, 예지)이 뽑힐 경우의 수는 3이다.
따라서 $2+3=5$가지이다.



이런 식으로 확률과 통계에서는 수학적으로 단순하게 암기하고 넘어가는 것도 좋지만, 그 추상적인 의미를 머릿속에서 그려가며 문제를 접근할 수 있어야 고난도 문제를 엄밀하게 풀 수 있다.

TIP "사건"이란?

사건(Event)란 어떤 실험에서 일어날 수 있는 결과들의 집합을 말한다.
예를 들어, 주사위를 한 번 던지는 실험에서 가능한 모든 결과는 1, 2, 3, 4, 5, 6이다.
사건 A : "짝수가 나오는 사건"은 2, 4, 6입니다.사건 B : "3 이하의 수가 나오는 사건" 1, 2, 3이다.

TIP "또는"이란?

사건 A 또는 사건 B가 일어난다.
→ A, B 중 적어도 하나가 일어나는 경우를 의미한다.
→ 수학 기호로는 $A \cup B$이다.
→ A 또는 B의 확률은 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$이다. (겹치는 부분 $A \cap B$는 중복되므로 한 번 빼줘야 한다.)

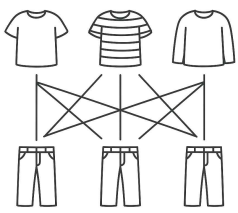
개념2 곱의 법칙 (두 사건이 모두 일어날 확률을 구할 때 사용)

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 경우의 수 m이고 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때,
두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는 $m \times n$이다.

예 상의 3벌, 바지 3벌이 있을 때 한 벌의 상의와
바지를 고르는 방법을 구해보자.

(상의1, 바지1), (상의1, 바지2), (상의1, 바지3)
(상의2, 바지1), (상의2, 바지2), (상의2, 바지3)
(상의3, 바지1), (상의3, 바지2), (상의3, 바지3)

총 9가지이다.



TIP 적용 꿀팁

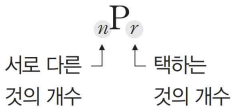
확률은 기본적으로 $0<P<1$의 값을 갖는다.
따라서 두 사건의 "또는"은 값이 커야하므로 "덧셈"을 사용한다.
두 사건이 동시에 일어날 확률은 값이 작아야하므로 "곱셈"을 사용한다.

정리2 순열

개념1 순열

어떤 것을 일렬로 나열하는 경우의 수를 구할 때, 그 순서를 생각해야 하는 경우가 있다. 즉, 서로 다른 물건, 문자, 숫자에서 몇 개를 택하여 나열할 때, 그 순서를 고려하여 나열하는 경우의 수이다.

서로 다른 n개에서 중복됨 없이 r $(0<r\leq n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 순열이라 하고, 기호로 ${}_n\mathrm{P}_r$와 같이 나타낸다.



"배열하라", "나열하라", "줄 세워라", "순서대로" 라는 핵심 단어를 기억하자.

개념2 순열 공식

① ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0<r\leq n$이며, $n!$은 1부터 n까지의 자연수를 차례대로 곱한 것이다.)

② ${}_n\mathrm{P}_0=1$ (참고로 $0!=1$이다.)

③ ${}_n\mathrm{P}_1=n$

② ${}_n\mathrm{P}_n=n!$

TIP 순열의 계산

교과서에 적혀있는 순열의 정의는 ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$이다.

이를 정리하면 ${}_n\mathrm{P}_r=n\times(n-1)\times(n-2)\cdots(n-r+1)$이다.

예를 들어 10개에서 3개를 순서있게 뽑는 경우의 수는 10부터 연속된 세 숫자의 곱이다. 즉, $10\times9\times8$이다.

예제1 순열

4명의 학생(A, B, C, D)이 이어달리기를 할 때, 첫 번째 주자부터 네 번째 주자까지 순서를 정하는 경우의 수는?

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

해설

순서를 정하는 경우이므로 ${}_4P_4=4!=24$가지이다.

정리3 조합

개념1 조합

서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r $(0<r\leq n)$개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라 하고, 기호로 ${}_n\mathrm{C}_r$와 같이 나타낸다.

"선택하라", "뽑아라", "골라라", "그룹" 라는 핵심 단어를 기억하자.

$${}_n\mathrm{C}_r$$
서로 다른 것의 개수 / 택하는 것의 개수

개념2 조합 공식

① ${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0<r\leq n$)

② ${}_n\mathrm{C}_0=1$

③ ${}_n\mathrm{C}_1=n$

④ ${}_n\mathrm{C}_n=1$

⑤ ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$ (대칭성)

TIP 순열의 대칭성

순열은 순서를 고려하지 않으므로 경우의 수에 대하여 대칭성이 있다.
예를 들어 서로 다른 100개에서 35개를 뽑는 경우의 수와 65개를 뽑는 경우의 수가 동일하다.
이를 정리하면 서로 다른 n개에서 r개를 뽑는 경우의 수와 $n-r$개를 뽑는 경우의 수가 동일하다. ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$

TIP 순서를 고려한다는 의미

예를 들어 A, B, C 세 명 중에서 2명을 선택한다.는 상황이 있다고 하자.

① 순서를 고려하지 않을 때 (조합)
- A와 B를 뽑든, B와 A를 뽑든 같은 경우로 봄 → {A, B}는 한 가지
- 가능한 경우: {A, B}, {A, C}, {B, C} → 총 3가지

② 순서를 고려할 때 (순열)
- A와 B는 AB, BA로 다른 경우로 셈
- 가능한 경우: AB, AC, BA, BC, CA, CB → 총 6가지

예제2 조합

4명의 학생(A, B, C, D) 중에서 교실 청소를 할 2명의 대표를 뽑는 경우의 수는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

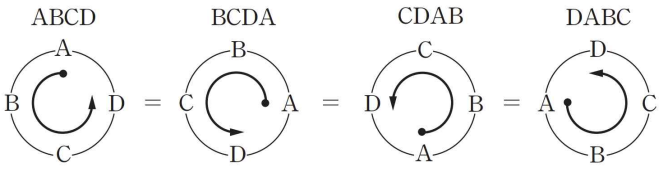
해설

순서가 중요하지 않으므로 ${}_4C_2=6$가지이다.

정리4 원순열

개념1 원순열

① 서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열을 원순열이라고 한다.
따라서 원순열에서는 회전하여 일치하는 것은 모두 같은 것으로 본다. (즉, 순서를 고려하지 않으므로 조합과 느낌이 비슷하다.)
아래 그림의 3개의 배열은 모두 같은 것으로 볼 수 있다.



② 서로 다른 n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는 $n!$이고, 이를 원형으로 배열하면 같은 것이 n가지씩 있으므로
서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\frac{{}_nP_r}{r}=\frac{n!}{n}=(n-1)!$이다.

개념2 원순열을 접근하는 방법

원순열에 대해서 다음과 같은 알고리즘으로 문제 접근을 하면 된다.

① 특정 조건이 없을 때: (순열 ${}_nP_r$)÷(회전하여 일치하는 경우의 수)
예를 들어 a, b, c, d를 모두 원형으로 배열할 때 ${}_4P_4=4!$가지의 순열을 시계방향으로 배열한다고 생각하면
$abcd$, $bcda$, $cdab$, $dabc$는 회전하여 일치하게 된다. 따라서 $4!$가지의 순열 중 회전하여 일치하는 것이 4가지씩이므로
원순열의 수는 $\frac{4!}{4}=6$이다.

② 특정 조건이 있을 때: (특정 조건에 따라 우선 배치)×(순열 ${}_nP_r$)
예를 들어 부부 4쌍을 원형으로 배열할 때 부부끼리 마주보는 경우의 수를 구해보자.
첫 번째 부부가 마주보도록 자리를 정하는 경우의 수는 1이다.
두 번째 부부가 마주보도록 2개의 자리를 정하고 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3\times2!=6$이다.
세 번째 부부가 마주보도록 2개의 자리를 정하고 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2\times2!=4$이다.
네 번째 부부의 자리를 정하는 경우의 수는 $2!=2$이다.
따라서 전체 경우의 수는 $1\times6\times4\times2=48$가지이다.

예제3 원순열

4명의 학생(A, B, C, D)이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설
$(4-1)!=6$가지이다.

정리5 원순열 (실전편)

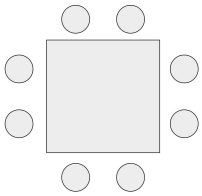
개념1 도형에 앉히는 유형

그림과 같이 정사각형 모양의 탁자에 8명이 앉는 경우의 수는

(순열 ${}_nP_r$)÷(회전하여 일치하는 경우의 수)=$\frac{8!}{4}$이다.

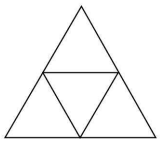
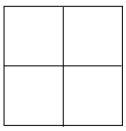
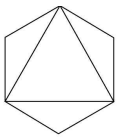
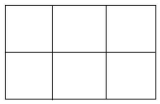
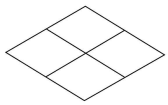
또는 첫 번째 사람의 자리를 정하는 경우의 수는 2이다. (왼쪽, 오른쪽)

남은 7명의 자리를 정하는 경우의 수는 7!이므로 총 경우의 수는 $2\times7!$이다.



개념2 색칠하기 유형

서로 다른 4가지의 색을 그림과 같이 정다각형으로 이루어진 4개의 영역에 각각 칠하는 경우의 수는 다음과 같다.

정삼각형	정사각형	정삼각형과 정육각형	직사각형	마름모
				
$\frac{4!}{3}=8$가지	$\frac{4!}{4}=6$가지	$\frac{4!}{3}=8$가지	$\frac{6!}{2}=360$가지	$\frac{5!}{4}=30$가지

개념3 이웃하지 않는 경우

① 이웃한다.

n개를 일렬로 나열할 때, r개가 이웃하는 순열은 r개를 1개로 보고 순열의 수를 계산한 후, $r!$을 곱한다.

예 남자 4명, 여자 3명을 모두 일렬로 세울 때 여자끼리 이웃하도록 세우는 경우의 수를 구해보자.
여자 3명을 1덩어리로 보면 총 5명이므로 5!이고, 여자 3명의 위치를 바꿀 수 있으므로 3!이다.
따라서 경우의 수는 $5!\times3!=720$이다.

② 이웃하지 않는다. (여사건을 사용하면 더 복잡하다.)

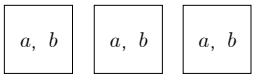
n개를 일렬로 나열할 때, r개가 이웃하지 않는 순열은 r개를 제외한 순열의 수를 계산한 후, 각각의 사이와 양 끝에 r개를 배열하는 경우의 수를 곱한다.

예 남자 4명, 여자 3명을 모두 일렬로 세울 때 여자끼리 이웃하지 않도록 세우는 경우의 수를 구해보자.
남자들을 우선 배열하면 4!이다. 5개의 자리에 여자 3명을 배열하는 경우의 수는 ${}_5P_3=60$이다.
따라서 경우의 수는 $4!\times{}_5P_3=1440$이다.

정리6 중복순열

개념1 중복순열

중복순열은 상황을 가지고 이해를 하는 것이 좋다.
예를 들어 알파벳 a, b에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리의 단어의 개수에 대해서 알아보자.
각 자리에 2개의 알파벳이 올 수 있으므로 구하는 단어의 개수는 $(2\text{가지})^{3\text{자리}}=8\text{가지}$이다.



① 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 순열을 중복순열이라고 하며, 기호로 ${}_n\Pi_r$과 같이 나타낸다.

② ${}_n\Pi_r=n^r$ (암기팁을 주자면 둘 다 왼쪽엔 n이 있고, 오른쪽엔 r이 있다!)

예제4 중복순열

숫자 1, 2, 3, 4를 사용하여 만들 수 있는 세 자리 비밀번호의 개수는? (같은 숫자를 여러 번 사용 가능)

① 62 ② 64 ③ 66 ④ 68 ⑤ 70

해설

${}_4\Pi_3=4^3=64\text{가지}$

정리7 같은 것이 있는 순열

개념1 같은 것이 있는 순열

① 같은 것이 포함되어 있는 n개를 일렬로 나열하는 것을 같은 것이 있는 순열이라고 한다.

② 같은 것이 있는 순열의 수

n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, …, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 수열의 수는

$\frac{n!}{p!\times q!\times\cdots\times r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

예 5개의 문자 a, a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구해 보자.

길이 5의 일렬에 3개가 같은 종류 a, 2개가 같은 종류 b로 채운다고 하자.

먼저 a가 들어갈 3개의 자리를 골라야 한다. 가능한 방법의 수는 ${}_5C_3$이다.

그 다음, 남은 2개의 자리 중 b가 들어갈 2개의 자리를 고르는 방법의 수는 ${}_2C_2$이다.

이 곱을 전개해보면 ${}_5C_3\times{}_2C_2=\frac{5!}{3!2!}=20$가지이다.

위와 같이 길이 n의 일렬에 p개가 같은 종류 A, q개가 같은 종류 B, … r개가 같은 종류 R로 채우려 한다고 하자.

먼저 종류 A가 들어갈 p개의 자리를 고르면 가능한 방법의 수는 ${}_nC_p$이다.

그 다음, 남은 $n-p$자리 중에서 종류 B가 들어갈 q개의 자리를 고르는 방법은 ${}_{n-p}C_q$이다.

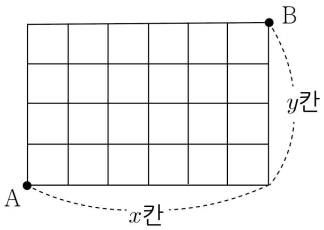
마찬가지로 순차적으로 마지막 종류 R까지 자리를 고르면 전체 경우의 수는

$\frac{n!}{p!(n-p)!}\times\frac{(n-p)!}{q!(n-p-q)!}\times\cdots\times 1$이다. 여기서 순차적으로 분모와 분자가 약분되므로 최종적인 결과는 $\frac{n!}{p!\times q!\times\cdots\times r!}$이다.

개념2 최단 거리로 가는 경우의 수

① 2차원 상황

그림과 같이 가로 x개, 세로 y개의 직사각형 모양으로 연결된 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 x개의 →와 y개의 ↑를 모두 일렬로 배열하는 순열의 수와 같다.

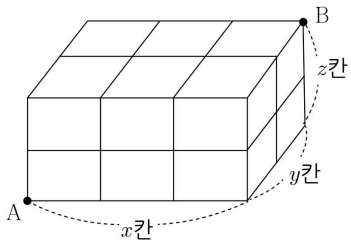


즉, $\frac{(x+y)!}{x!\,y!}={}_{x+y}C_x={}_{x+y}C_y$이다.

② 3차원 상황

평면에서 최단거리로 가는 방법은 두 개의 문자를 사용하여 순열로 나타내고, 공간에서 최단거리로 가는 방법은 세 개의 문자를 사용하여 순열로 나타낼 수 있다.

예를 들어 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 A 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 $\frac{(x+y+z)!}{x!\,y!\,z!}$이다.



예제5 같은 것이 있는 순열

"BANANA"라는 단어의 알파벳 6개(B 1개, A 3개, N 2개)를 모두 사용하여 만들 수 있는 새로운 단어의 개수는?

① 40 ② 50 ③ 60 ④ 70 ⑤ 80

해설

단어는 알페벳의 순서가 중요하다.

그리고 같은 것이 있으므로 $\frac{6!}{1!\times 3!\times 2!}=60$가지

예제6 최단 거리

"BANANA"라는 단어의 알파벳 6개(B 1개, A 3개, N 2개)를 모두 사용하여 만들 수 있는 새로운 단어의 개수는?

① 40 ② 50 ③ 60 ④ 70 ⑤ 80

해설

단어는 알페벳의 순서가 중요하다.

그리고 같은 것이 있으므로 $\frac{6!}{1!\times 3!\times 2!}=60$가지

정리8 함수의 개수 (실전편)

두 집합 X와 Y에 대하여 $n(X)=a$, $n(Y)=b$일 때, X에서 Y로의 함수 f의 개수는 다음과 같다.

① 모든 함수 f의 개수는 ${}_b\Pi_a = b^a$이다.
② 상수함수 f의 개수는 b이다.
③ $a \leqq b$일 때, 일대일함수 f의 개수는 ${}_bP_a$이다.
④ $a=b$일 때, 일대일대응 f의 개수는 $b!$이다.
⑤ '$x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$' 또는 '$x_1 < x_2$이면 $f(x_1) > f(x_2)$'인 함수 f의 개수는 ${}_bC_a$이다. (단, $a \leqq b$)
⑥ 치역의 원소의 개수가 2인 함수 f의 개수는 ${}_bC_2 \times (2^a - 2)$이다. (단, $a \geqq 2$, $b \geqq 2$)

예 정의역이 $X=\{1,2,3\}$, 공역이 $Y=\{4,5,6,7,8\}$일 때

① 모든 함수 f의 개수는 X가 3개의 원소 각각에 대응할 수 있는 Y의 원소의 개수가 모두 5이므로 $5^3 = 125$이다.
② $f(1) \neq 4$인 함수 f의 개수는 원소 1에 원소 4가 대응이 안되므로 선택 개수가 4개이고 나머지는 5개이므로 $4 \times 5^2 = 100$이다.
③ 일대일함수 f의 개수는 $5 \times 4 \times 3 = 60$이다.
④ '$x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$'인 함수 f의 개수는 Y의 원소 5개에서 선택한 3개의 원소에 작은 것부터 크기 순서대로 대응하는 방법은 1가지이다. 이와 마찬가지로 Y에서 선택한 3개의 원소를 X의 3개의 원소에서 큰 것부터 크기 순서대로 대응하는 방법은 1가지 이므로 함수 f의 개수는 ${}_5C_3 = 10$이다.
⑤ 치역의 원소의 개수가 2인 함수 f의 개수는 Y의 원소 5개에서 치역의 원소 2개를 선택하면 ${}_5C_2$, X의 원소 3개에 각각 대응하는 Y의 원소는 이 치역의 원소 2개 중 하나이다. (2^3)
이때 X의 원소 모두에 이 치역의 원소 2개 중 하나만 대응하는 경우의 수(2)를 제외하면 ${}_5C_2 \times (2^3 - 2) = 60$이다.

TIP 배수 판정법

- 2의 배수(짝수): 마지막 자리수가 0, 2, 4, 6, 8이면 짝수, 즉 2의 배수이다.
- 3의 배수: 모든 자리의 수의 합이 3의 배수이면 3의 배수이다.
- 4의 배수: 끝 두자리가 4의 배수이면 4의 배수이다.
- 5의 배수: 끝자리의 수가 0 또는 5이면 5의 배수이다.

THEME

2 중복조합과 이항정리

정리1 중복조합

개념1 중복조합

① 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 중복조합이라 하고, 이 중복조합의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{H}_r$와 같이 나타낸다.

② ${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r = \dfrac{((n-1)+r)!}{(n-1)!\,r!}$ (여기서 n을 고르는 꿀팁은 n은 "서로 다른"이 무조건 붙는다는 것이다.)

예 3종류의 과일 수박, 망고, 파인애플 중에서 6개의 과일을 사는 경우의 수를 구해보자.
이는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복 조합의 수와 같으므로 ${}_3H_6 = {}_8C_2 = 28$이다.

예 $(a+b+c+d)^6$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구해보자.
이는 a, b, c, d에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복 조합의 수와 같으므로 ${}_4H_6 = {}_9C_3 = 84$이다.

개념2 중복조합의 활용

① 부정방정식의 정수해

방정식 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n = r$ (n은 자연수, r는 음이 아닌 정수)를 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, …. x_n의 모든 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$의 개수는 ${}_n\mathrm{H}_r$이다.

예 방정식 $x+y+z+w=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수를 구해보자.

예를 들어 방정식 $x+y+z+w=10$의 해 중 하나인 $x=1$, $y=2$, $z=3$, $w=4$는 서로 다른 4개의 문자 x, y, z, w 중에서 x를 1개, y를 2개, z를 3개, w를 4개 택한 것으로 생각할 수 있다.
같은 방법으로 생각하면 모든 해의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 4개의 문자 중에서 10개를 택한 것으로 생각할 수 있다.
(즉, 개념 1과 문제의 형태가 다르더라도 본질적인 의미가 같다면 계산은 동일하다.)

② 순서가 정해진 배열

$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_r \leqq n$을 만족시키는 자연수 a_1, a_2, …, a_r의 순서쌍 $(a_1, a_2, \cdots, a_r)$의 개수는 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_nH_r$을 만족한다.

예 $1 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq 8$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구해보자.
이는 2, 3, 4, 5, 6, 7에서 서로 다른 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_8H_3 = {}_{10}C_3 = 120$이다.

③ 함수의 개수

두 집합 X와 Y에 대하여 $n(X)=a$, $n(Y)=b$일 때,

- '$x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$' 또는 '$x_1 < x_2$이면 $f(x_1) > f(x_2)$'인 함수 f의 개수는 ${}_bC_a$이다. (단, $a \leqq b$)
- '$x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \leqq f(x_2)$' 또는 '$x_1 < x_2$이면 $f(x_1) => f(x_2)$'인 함수 f의 개수는 ${}_bH_a$이다.

TIP 순열, 중복순열, 조합, 중복조합의 비교

서로 다른 n개에서 r개를 택할 때
- 순서를 생각하고
  - 중복을 허용하지 않는다. $\rightarrow {}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
  - 중복을 허용한다. $\rightarrow {}_n\Pi_r = n^r$
- 순서를 생각하지 않고
  - 중복을 허용하지 않는다. $\rightarrow {}_nC_r = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$
  - 중복을 허용한다. $\rightarrow {}_nH_r = {}_{n+(r-1)}C_r$

서로 다른 3개의 문자 a, b, c에서 2개의 문자를 택하는 경우의 수를 비교해 보자.

① 순열
순서를 생각하고 서로 다른 2개의 문자를 택하는 경우 ("서로 다른"은 "중복을 허용하지 않는다."는 말과 같다.)
가능한 경우의 수는 ab, ba, ac, ca, bc, cb이다. ${}_3P_2 = 6$이다.

② 중복순열
순서를 생각하고 중복을 허용하여 2개의 문자를 택하는 경우
가능한 경우의 수는 ab, ba, ac, ca, bc, cb, aa, bb, cc이다. ${}_3\Pi_2 = 9$이다.

③ 조합
순서를 생각하지 않고 서로 다른 2개의 문자를 택하는 경우
가능한 경우의 수는 ab, ac, bc이다. ${}_3C_2 = 3$이다.

④ 중복조합
순서를 생각하지 않고 중복을 허용하여 2개의 문자를 택하는 경우
가능한 경우의 수는 ab, ac, bc, aa, bb, cc이다. ${}_3H_2 = 6$이다.

예제1 과일 뽑기 중복조합(기본)

3종류의 과일(사과, 배, 감) 가게에서 5개의 과일을 사는 경우의 수는?
(같은 종류의 과일을 여러 개 살 수 있음)

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

해설

${}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_2 = 21$가지이다.

예제2 과일 뽑기 중복조합(응용)

3종류의 과일(사과, 배, 감) 가게에서 5개의 과일을 살 때, 각 종류의 과일을 적어도 하나씩은 포함하여 사는 경우의 수는?
(단, 같은 종류의 과일은 서로 구별하지 않는다.)

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

해설

'적어도 하나씩 포함'이라는 조건이 있을 때는, 조건을 먼저 만족시킨 후 남은 개수로 다시 계산하는 것이 핵심이다. 먼저 '적어도 하나씩'이라는 조건을 만족시키기 위해 사과 1개, 배 1개, 감 1개를 미리 산다.
그러면 앞으로 2개의 과일만 더 사면 된다.
따라서 ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$이다.

정리2 이항정리

개념1 이항정리

① 자연수 n에 대하여 다항식 $(a+b)^n$을 전개하면

$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_nb^n$이다.

이와 같이 다항식 $(a+b)^n$을 전개하는 것을 이항정리라고 한다.

② 예를 들어 다항식 $(a+b)^3$을 전개해보면 $(a+b)^3 = {}_3C_0a^3 + {}_3C_1a^2b + {}_3C_2ab^2 + {}_3C_3b^3$이다.

③ ${}_nC_ra^{n-r}b^r$을 일반항이라고 하고, 각 항의 계수 ${}_nC_0$, ${}_nC_1$, ${}_nC_2$, $\cdots$, ${}_nC_r$, $\cdots$, ${}_nC_n$을 이항계수라 한다.

④ 이항정리를 이용하면 $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r$을 만족한다.

예 다항식 $(x+2y)^5$의 전개식의 일반항을 이용하여 x^3y^2의 계수를 구해보자.

다항식 $(x+2y)^5$의 전개식의 일반항은 ${}_5C_rx^{5-r}(2y)^r = {}_5C_r2^rx^{5-r}y^r$이므로 x^3y^2항은 $r=2$일 때이다.

따라서 x^3y^2의 계수는 ${}_5C_2 \times 2^2 = 10 \times 4 = 40$이다.

예 ${}_{10}C_1 \times 2 + {}_{10}C_2 \times 2^2 + {}_{10}C_3 \times 2^3 + \cdots + {}_{10}C_{10} \times 2^{10}$을 구해보자.

위 식을 변형하면 $({}_{10}C_0 \times 2^0 + {}_{10}C_1 \times 2^1 + {}_{10}C_2 \times 2^2 + {}_{10}C_3 \times 2^3 + \cdots + {}_{10}C_{10} \times 2^{10}) - {}_{10}C_0 \times 2^0$

$= (1+2)^{10} - {}_{10}C_0 = 3^{10} - 1$이다.

개념2 이항계수의 성질

$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_rx^r$에서

① $x=1$을 대입하면 ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$이다.

② $x=-1$을 대입하면 ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \cdots + (-1)^n {}_nC_n = 0$이다.

③ 위의 두 식을 더하면 ${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots = 2^{n-1}$이다.

④ 위의 두 식을 빼면 ${}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \cdots = 2^{n-1}$이다.

정리3 파스칼의 삼각형

개념1 파스칼의 삼각형

$(a+b)^n$의 전개식에서 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$일 때의 이항계수를 차례대로 배열하면 $_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$이므로 각 행의 수는 그 앞의 이웃한 두 수의 합과 같고, ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로 배열은 좌우 대칭이다.
이와 같이 이항계수를 배열한 것을 파스칼의 삼각형이라고 한다.

1	$(a+b)^0$의 계수
$_1C_0\ \ {}_1C_1$	$(a+b)^1$의 계수
$_2C_0\ \ {}_2C_1\ \ {}_2C_2$	$(a+b)^2$의 계수
$_3C_0\ \ {}_3C_1\ \ {}_3C_2\ \ {}_3C_3$	$(a+b)^3$의 계수
$_4C_0\ \ {}_4C_1\ \ {}_4C_2\ \ {}_4C_3\ \ {}_4C_4$	$(a+b)^4$의 계수
$_5C_0\ \ {}_5C_1\ \ {}_5C_2\ \ {}_5C_3\ \ {}_5C_4\ \ {}_5C_5$	$(a+b)^5$의 계수
$\vdots$	$\vdots$

개념2 하키 스틱의 원리 (대각선 조합수의 합)

① ${}_rC_0+{}_{r+1}C_1+{}_{r+2}C_2+\cdots+{}_nC_{n-r}={}_{n+1}C_{n-r}$
② ${}_rC_r+{}_{r+1}C_r+{}_{r+2}C_r+\cdots+{}_nC_r={}_{n+1}C_{r+1}$

예 ${}_5C_3={}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3$이다.

1
$_1C_0\ \ {}_1C_1$
$_2C_0\ \ {}_2C_1\ \ {}_2C_2$
$_3C_0\ \ {}_3C_1\ \ {}_3C_2\ \ {}_3C_3$
$_4C_0\ \ {}_4C_1\ \ {}_4C_2\ \ {}_4C_3\ \ {}_4C_4$
$_5C_0\ \ {}_5C_1\ \ {}_5C_2\ \ {}_5C_3\ \ {}_5C_4\ \ {}_5C_5$

예제3 방정식의 이항정리(기본)

$a+b+c+d=7$를 만족시키는 순서쌍의 개수를 구하시오.
(단, a, b, c, d가 음이 아닌 정수이다.)

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

해설

${}_4\mathrm{H}_7 = {}_{10}\mathrm{C}_3 = 120$가지이다.

예제4 방정식의 이항정리(응용)

$a+b+c+d=7$를 만족시키는 순서쌍의 개수를 구하시오.
(단, a, b, c, d는 자연수이다.)

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

$a+b+c+d=7$을 변형하면
$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)+(d'+1)=7$이다.
$a'+b'+c'+d'=3$에서 ${}_4\mathrm{H}_3 = {}_6\mathrm{C}_3 = 20$이다.

예제5 다항식의 계수 구하기

다항식 $(3x-2)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는?

① 980 ② 1080 ③ 1180 ④ 1280 ⑤ 1380

해설

STEP1 문제 이해하기
x^3를 만드려면, $3x$을 세 번 선택해야한다.

STEP2 식 설정하기
총 5개의 괄호 중에서, $3x$을 꺼낼 괄호 3개를 고른다.
그리고 계수 3이 3개 있으므로 $({}_5C_3 \times 3^3)$
그러면 나머지 2개의 괄호에서는 무조건 -2가
뽑혀 나온다. $(-2)^2$

STEP3 답 구하기
따라서 x^3의 계수는
$= {}_5C_3 \times 3^3 \times (-2)^2 = 10 \times 27 \times 4 = 1080$이다.

예제6 함수의 개수 구하기

집합 $X=\{1,2\}$에서 집합 $Y=\{a,b,c\}$로 가는 함수가 총 몇 개인지 구하시오.

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

정의역의 원소 1이 선택할 수 있는 공역의 원소는 3가지,
원소 2가 선택할 수 있는 공역의 원소도 3가지이다.
따라서 총 경우의 수는 3^2가지이다.
(공식으로 정리하면 y^x이다.)

예제7 일대일 대응의 함수의 개수 구하기

집합 $X=\{1,2,3,4\}$에 대하여, X에서 X로의 일대일 대응 함수의 총 개수는 몇 개인지 구하시오.

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

첫 번째 원소는 4가지, 두 번째는 남은 3가지,
세 번째는 2가지, 마지막은 1가지를 선택할 수 있으므로
4!이다. (공식으로 정리하면 $x!$이다.)

THEME

3 확률의 뜻과 활용

정리1 시행과 사건

개념1 시행

주사위나 동전 던지기와 같이 같은 조건에서 반복할 수 있고, 그 결과가 우연에 의하여 정해지는 실험이나 관찰을 **시행**이라고 한다.

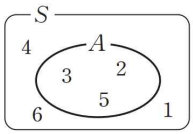
개념2 사건

① 표본공간 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 **표본공간**이라고 한다.
② 사건 표본공간의 부분집합을 **사건**이라고 한다.
③ 근원사건 한 개의 원소로 이루어진 사건을 **근원사건**이라고 한다.



예 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나오는 눈의 수를 확인하는 시행에서

- 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이다.
- 소수의 눈이 나오는 사건을 A라 하면 $A=\{2, 3, 5\}$이다.
- 근원사건은 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$



정리2 배반사건과 여사건

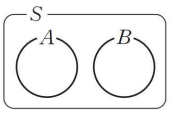
개념1 또는, 동시의 표현

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여

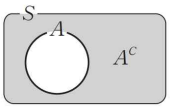
① 사건 A **또는** 사건 B가 일어나는 사건을 $A \cup B$와 같이 나타낸다.
② 두 사건 A와 B가 **동시**에 일어나는 사건을 $A \cap B$와 같이 나타낸다.

개념2 배반 사건과 여사건

① 배반 사건
두 사건 A와 B가 동시에 일어나지 않을 때,
즉 $A \cap B = \varnothing$일 때, 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이라고 한다.



② 여사건
사건 A에 대하여 사건 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라 하고, 기호로 A^C과 같이 나타낸다.
여사건의 확률은 $P(A^c)=1-P(A)$를 만족한다.



예 한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행에서 6의 약수의 눈이 나오는 사건을 A,
홀수의 눈이 나오는 사건을 B, 4의 눈이 나오는 건을 C라고 하면

$A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{1, 3, 5\}$, $C=\{4\}$

① 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 사건은 $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
② 두 사건 A와 B가 일어나는 사건은 $A \cap B=\{1, 3\}$
③ $A \cap A^C=\varnothing$이므로 두 사건 A와 C는 서로 배반사건이다.
④ 사건 A의 여사건은 $A^C=\{4, 5\}$이다.

정리3 확률

개념1 확률

① 확률

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것을 사건 A의 확률이라 하고, 기호로 $P(A)$와 같이 나타낸다.

② 수학적 확률

표본공간이 S인 어떤 시행에서 각각의 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때,

표본공간 S의 사건 A가 일어날 확률 $P(A)$를 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{(\text{사건 A의 원소의 개수})}{(\text{표본공간 S의 원소의 개수})}$로 정의하고,

이것을 사건 A가 일어날 수학적 확률이라고 한다. (P는 'Probability' (확률)의 첫 글자이다.)

예 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 한 번 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합이 6이 될 확률을 구해 보자.

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 한 번 던지는 시행에서 표본공간을 S라 하면
$S=\{(1,1),(1,2),\cdots,(6,5),(6,6)\}$이므로 $n(S)=6\times6=36$이다.
이때 나오는 두 눈의 수의 합이 6인 사건을 A라 하면
$A=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$이므로 $n(A)=5$이다.
따라서 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{5}{36}$이다.

개념2 확률의 기본 성질

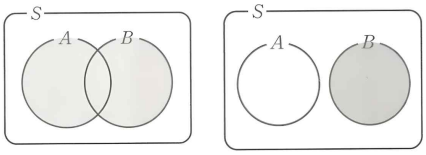
표본공간 S가 유한개의 근원사건으로 이루어져 있는 어떤 시행에서

① 임의의 사건 A에 대하여 $0\le P(A)\le1$ 이다.
② 반드시 일어나는 사건 S에 대하여 $P(S)=1$ 이다.
③ 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $P(\varnothing)=0$ 이다.

개념3 확률의 덧셈정리

표본 공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률은

① $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
② $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ (단, A와 B는 배반사건이다.)
③ $P(A\cup B)=1-P(A^C\cap B^C)$



예 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적힌 10장의 카드 중에서 임의로 한 장의 카드를 선택할 때, 선택한 카드에 적힌 수가 2의 배수이거나 3의 배수일 확률을 구해 보자.

임의로 카드 한 장을 선택할 때, 선택한 카드에 적힌 수가 2의 배수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하면
사건 $A\cap B$는 6의 배수인 사건이므로

$P(A)=\dfrac{1}{2}$, $P(B)=\dfrac{3}{10}$, $P(A\cap B)=\dfrac{1}{10}$

따라서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{10}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{7}{10}$

예제1 적어도~ (여사건 연습)

주머니 속에 빨간 공 3개와 파란 공 5개가 들어있습니다. 이 중에서 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 적어도 1개가 빨간 공일 확률은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{9}{14}$ ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{11}{14}$

해설

'적어도 1개가 빨간 공'의 반대(여사건)는 '모두 파란 공'인 경우이다.
전체 경우의 수는 8개의 공 중 2개를 뽑는 경우로써 ${}_8C_2 = 28$이고, 여사건의 경우의 수는 5개의 파란 공 중에서만 2개를 뽑는 경우로써 ${}_5C_2 = 10$이다.
따라서 확률은 $1 - \frac{10}{28} = \frac{9}{14}$이다.

예제2 ~하지 않도록 (여사건 연습)

A, B, C 세 사람이 한 줄로 설 때, A와 B가 서로 이웃하지 않도록 서는 경우의 수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

'이웃하지 않도록'의 반대(여사건)는 '이웃하도록' 서는 경우이다.
전체 경우의 수는 3명을 나열하는 경우로 $3! = 6$이다.
여사건의 경우의 수는 A와 B를 하나로 묶어서 생각해보면 (AB)와 C, 두 덩어리를 나열하는 경우는 $2! = 2$이고, 묶음 안에서 자리를 바꾸는 경우도 $2! = 2$이므로 이웃하는 경우의 수는 $2 \times 2 = 4$가지이다.
최종 경우의 수는 $6 - 4 = 2$가지이다.

예제3 모두 ~는 아니다 (여사건 연습)

서로 다른 동전 3개를 동시에 던질 때, 모두 앞면은 아닐 확률은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

'모두 앞면은 아니다'의 반대(여사건)는 '모두 앞면이다'인 경우이다.
전체 경우의 수는 동전 3개는 각각 앞/뒤 2가지 경우를 가지므로 $2^3 = 8$이다. 여사건의 경우의 수는 3개 모두 앞면이 나오는 경우는 1가지 뿐이다.
따라서 최종 경우의 수는 $8 - 1 = 7$가지이다.

THEME

4 조건부확률

정리1 조건부확률

개념1 조건부확률

① 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 확률이 0이 아닌 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라 하고, 기호로 $P(B|A)$와 같이 나타낸다.

② 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ (단, $P(A)>0$)

③ 사건 A가 일어났을 때의 사건 B^C의 조건부확률은 $P(B^C|A)=1-P(B|A)$

TIP 출제되는 조건부 확률 조건들

① $P(A|B)=P(B|A)$인 조건은 확률 문제에서 정말 많이 출제가 되고 있다.
이는 $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$이므로 $P(A)=P(B)$이다.

② $P(A|B)=P(A)$를 만족한다면 두 사건은 독립이다.

개념2 비복원과 조건부확률

나중에 일어난 사건 A에 대하여 먼저 일어난 사건 B의 조건부 확률은

$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(B\cap A)+P(B^C\cap A)}$로 계산한다.

개념3 여사건과 조건부확률

여사건과 조건부 확률에 대해서 묻는 문제들이 많다.
이런 문제들은 벤다이어그램을 그려서 해결하면 된다.

.

예제1 조건부확률

한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 소수일 때, 그 수가 홀수일 확률은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행에서 표본공간을 S, 소수의 눈이 나오는 사건을 A, 홀수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{2, 3, 5\}$, $B=\{1, 3, 5\}$,

$A\cap B=\{3, 5\}$이므로

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

따라서 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$이다.

예제2 비복원과 조건부확률

당첨제비 3개를 포함한 8개의 제비에서 갑, 을의 순서로 하나씩, 비복원으로 제비를 뽑을 때, 을이 당첨되었다는 조건에서 갑이 당첨되었을 확률을 구하시오.

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

해설

갑이 당첨되고 을이 당첨되는 확률은 $\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}$이다.

갑이 당첨되지 않고 을이 당첨되는 확률은 $\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}$이다.

따라서 $\frac{\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}}{\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}+\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$이다.

예제3 여사건과 조건부확률

두 사건 A, B에 대하여 $P(A\cap B^C)=\frac{1}{9}$, $P(B^C)=\frac{7}{18}$일 때, $P(A\cup B)$의 값을 구하시오.

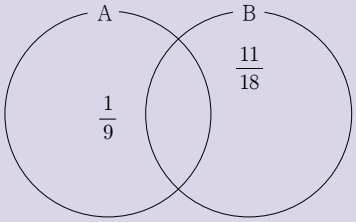
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{11}{18}$ ③ $\frac{13}{18}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{17}{18}$

해설

벤다이어그램을 그려보면 A만의 영역은 $\frac{1}{9}$이고,

B의 여집합으로 인하여 $P(B)=\frac{11}{18}$이다.

따라서 $P(A\cup B)\frac{13}{18}$이다.



정리2 확률의 곱셈정리

개념1 확률의 곱셈정리

두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률을 구하는 공식은 다음과 같다. (조건부확률의 정의를 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ 이용한 공식이다.)

① $P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)$ (단, $P(A)>0$, $P(B)>0$)
② $P(A\cap B)=P(B)\times P(A|B)$

개념2 확률의 곱셈정리의 활용

수능이나 모의고사 문제를 풀 때는 이 공식들을 딱딱하게 외우기보다, 다음과 같은 관점으로 자연스럽게 적용하는 것이 중요하다.

"연속적인 행동이 보이면, 각 단계의 확률을 순서대로 곱한다."

이때, 앞선 행동이 뒤따르는 행동의 조건(상황)을 바꾸는지(종속), 아니면 바꾸지 않는지(독립)만 잘 파악하면 어떤 곱셈정리 공식을 써야 할지 자연스럽게 알 수 있다.

정리3 사건의 종류

개념1 독립 사건과 독립 시행

두 사건 A, B에 대하여 $P(A)>0$, $P(B)>0$이고, 어느 한 사건이 일어나는 것이 다른 사건이 일어날 확률에 영향을 주지 않을 때, 즉 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$일 때, 두 사건 A와 B는 서로 **독립**이라고 한다.

예를 들어 주사위나 동전을 여러 번 던지는 경우와 같이 동일한 조건에서 어떤 시행을 반복할 때, 각 시행의 결과가 다른 시행의 결과에 영향을 주지 않는 경우, 즉 각 시행에서 일어나는 사건이 독립이면 이러한 시행을 **독립시행**이라고 한다.
독립시행에서는 각 시행에서 일어나는 사건이 서로 독립이므로 독립시행의 확률은 각 사건의 확률을 곱하여 구할 수 있다.

개념2 종속 사건

두 사건 A와 B가 서로 독립이 아닐 때, 두 사건 A와 B는 서로 **종속**이라고 한다.

개념3 배반 사건

두 개의 사건이 동시에 일어날 수 없는 경우를 말한다. 즉, 하나의 사건이 발생하면 다른 사건은 절대로 일어날 수 없는 관계

① 두 사건 A, B이 배반사건이면 $P(A\cap B)=0$이다.
② 두 사건 A, B^c이 배반사건이면 A는 B의 부분집합이다. (심화개념)

예제4 확률의 곱셈정리

공 6개와 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 공을 한 개씩 두 번 꺼낸다. 꺼낸 공을 주머니에 다시 넣지 않을 때, 꺼낸 공이 모두 흰 공일 확률을 구하시오.

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

해설

첫 번째 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 A, 두 번째 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$, $P(B|A)=\frac{5}{8}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{3}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{12}$

예제5 독립 시행

한 개의 주사위를 6회 던져 1의 눈이 4번 나올 때 확률을 구하시오.

해설

한 개의 주사위를 6회 던져 1의 눈이 4번 나오는 경우의 수는 ${}_6C_4$이고 각 확률은 모두 $\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2$이다.

또, 각 경우는 서로 배반사건이므로 1의 눈이 4번 나올 확률의 덧셈정리에 의하여 ${}_6C_4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^4$이다.

유형 01 숫자, 문자 나열하기

01 2023학년도 6월 23번 정답률 80%

23. 5개의 문자 a, a, a, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

02 2024학년도 6월 23번 정답률 86%

23. 5개의 문자 a, a, b, c, d를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 50 ② 55 ③ 60 ④ 65 ⑤ 70

03 2024학년도 수능 23번 정답률 82%

23. 5개의 문자 x, x, y, y, z를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

04 2025학년도 6월 23번 정답률 87%

23. 네 개의 숫자 1, 1, 2, 3을 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

05 2025학년도 9월 23번 정답률 78%

23. 다섯 개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3을 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

06 2026학년도 6월 23번 정답률 93%

23. 6개의 문자 a, a, a, a, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 18 ② 24 ③ 30 ④ 36 ⑤ 42

07 2026학년도 9월 23번 정답률 87%

23. 세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 72 ② 75 ③ 78 ④ 81 ⑤ 84

유형 02 숫자, 문자 나열하기 (심화)

01 2022학년도 6월 25번 정답률 69%

25. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 선택할 때, 선택한 수가 3500보다 클 확률은? [3점]

① $\frac{9}{25}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{11}{25}$ ④ $\frac{12}{25}$ ⑤ $\frac{13}{25}$

02 2023학년도 6월 27번 정답률 60%

27. 네 문자 a, b, X, Y 중에서 중복을 허락하여 6개를 택해 일렬로 나열하려고 한다. 다음 조건이 성립하도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

(가) 양 끝 모두에 대문자가 나온다. (나) a는 한 번만 나온다.

① 384 ② 408 ③ 432 ④ 456 ⑤ 480

03 2023학년도 6월 28번 정답률 44%

28. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 택할 때, 택한 수가 5의 배수 또는 3500 이상일 확률은? [4점]

① $\frac{9}{20}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{11}{20}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{13}{20}$

04 2023학년도 수능 24번 정답률 72%

24. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 4000 이상인 홀수의 개수는? [3점]

① 125 ② 150 ③ 175 ④ 200 ⑤ 225

05 2025학년도 6월 26번 정답률 53%

26. 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 문자열 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 문자 a가 한 개만 포함되거나 문자 b가 한 개만 포함된 문자열이 선택될 확률은? [3점]

① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{41}{64}$ ③ $\frac{21}{32}$ ④ $\frac{43}{64}$ ⑤ $\frac{11}{16}$

06 2025년 실시 수능 23번 정답률 32%

23. 네 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 56 ② 60 ③ 64 ④ 68 ⑤ 72

유형 03 카드 나열하기

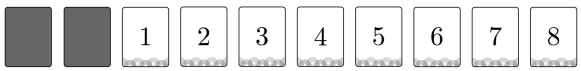
01 2024학년도 6월 29번 정답률 16%

29. 그림과 같이 2장의 검은색 카드와 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 흰색 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 왼쪽에서 오른쪽으로 일렬로 배열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오.
(단, 검은색 카드는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

(가) 흰색 카드에 적힌 수가 작은 수부터 크기순으로 왼쪽에서 오른쪽으로 배열되도록 카드가 놓여 있다.

(나) 검은색 카드 사이에는 흰색 카드가 2장 이상 놓여 있다.

(다) 검은색 카드 사이에는 3의 배수가 적힌 흰색 카드가 1장 이상 놓여 있다.



02 2024학년도 수능 25번 정답률 66%

25. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 10 이하가 되도록 카드가 놓일 확률은? [3점]

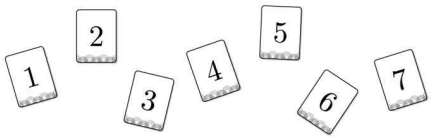
① $\frac{8}{15}$ ② $\frac{19}{30}$ ③ $\frac{11}{15}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{14}{15}$



03 2026년 6월 26번 정답률 78%

26. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 곱이 짝수가 되도록 카드가 놓일 확률은? [3점]

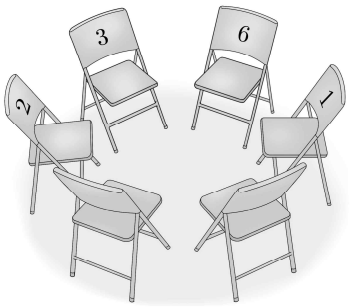
① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{5}{7}$



유형 04 의자 나열하기

01 2022학년도 6월 29번 정답률 21%

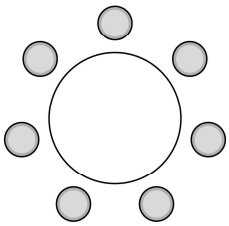
29. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



02 2023학년도 9월 26번 정답률 54%

26. 세 학생 A, B, C를 포함한 7명의 학생이 원 모양의 탁자에 일정한 간격을 두고 임의로 모두 둘러앉을 때, A가 B 또는 C와 이웃하게 될 확률은? [3점]

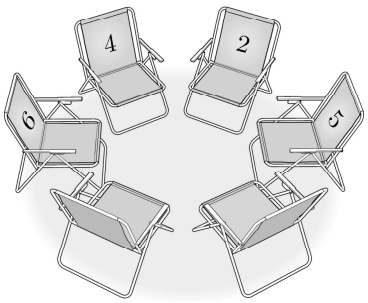
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$



03 2025학년도 6월 27번 정답률 59%

27. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 합이 11이 되지 않도록 배열하는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

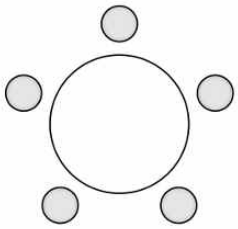
① 72 ② 78 ③ 84 ④ 90 ⑤ 96



04 2026년 6월 27번 정답률 80%

27. 5명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 남학생 5명, 여학생 3명이 있다. 이 8명의 학생 중에서 4명 이상의 남학생을 포함하여 5명의 학생을 선택하고 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 384 ② 408 ③ 432 ④ 456 ⑤ 480



유형 05 숫자 뽑기

01 2022학년도 9월 24번 정답률 73%

24. 네 개의 수 1, 3, 5, 7 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를 a라 하고, 네 개의 수 2, 4, 6, 8 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를 b라 하자. $a \times b > 31$일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

02 2023학년도 9월 28번 정답률 40%

28. 1부터 10까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택한다. 선택된 세 개의 수의 곱이 5의 배수이고 합은 3의 배수일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{11}{60}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{13}{60}$

03 2025학년도 9월 25번 정답률 61%

25. 1부터 11까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 2개의 수를 선택한다. 선택한 2개의 수 중 적어도 하나가 7 이상의 홀수일 확률은? [3점]

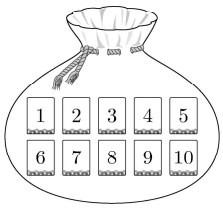
① $\frac{23}{55}$ ② $\frac{24}{55}$ ③ $\frac{5}{11}$ ④ $\frac{26}{55}$ ⑤ $\frac{27}{55}$

유형 06 카드 뽑기

01 2022학년도 수능 26번 정답률 62%

26. 1부터 10까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 카드 3장을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4 이하이거나 7 이상일 확률은? [3점]

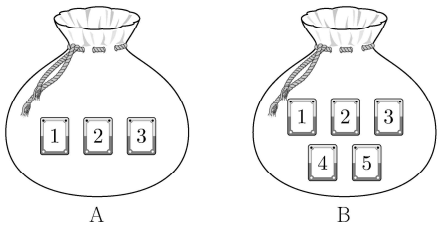
① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{13}{15}$ ④ $\frac{9}{10}$ ⑤ $\frac{14}{15}$



02 2023학년도 6월 24번 정답률 64%

24. 주머니 A에는 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 3장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있다.
두 주머니 A, B에서 각각 카드를 임의로 한 장씩 꺼낼 때, 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수의 차가 1일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{7}{15}$ ④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{3}{5}$



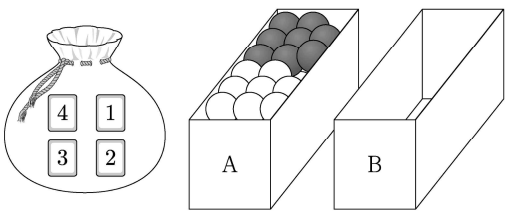
03 2024학년도 수능 28번 정답률 41%

28. 하나의 주머니와 두 상자 A, B가 있다. 주머니에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있고, 상자 A에는 흰 공과 검은 공이 각각 8개 이상 들어 있고, 상자 B는 비어 있다. 이 주머니와 두 상자 A, B를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어
> 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 주머니에 넣는다.
>
> 확인한 수가 1이면
> 상자 A에 있는 흰 공 1개를 상자 B에 넣고,
>
> 확인한 수가 2 또는 3이면
> 상자 A에 있는 흰 공 1개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣고,
>
> 확인한 수가 4이면
> 상자 A에 있는 흰 공 2개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣는다.

이 시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8일 때, 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 2일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{70}$ ② $\frac{2}{35}$ ③ $\frac{1}{14}$ ④ $\frac{3}{35}$ ⑤ $\frac{1}{10}$



유형 07 물건 뽑기

01 2023학년도 수능 25번 정답률 65%

25. 흰색 마스크 5개, 검은색 마스크 9개가 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 3개의 마스크를 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 마스크 중에서 적어도 한 개가 흰색 마스크일 확률은? [3점]

① $\frac{8}{13}$ ② $\frac{17}{26}$ ③ $\frac{9}{13}$ ④ $\frac{19}{26}$ ⑤ $\frac{10}{13}$

02 2024학년도 6월 25번 정답률 66%

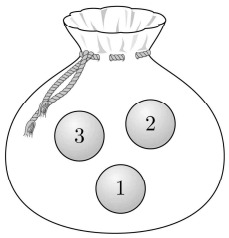
25. 흰색 손수건 4장, 검은색 손수건 5장이 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 4장의 손수건을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 4장의 손수건 중에서 흰색 손수건이 2장 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{9}{14}$ ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{11}{14}$

유형 08 공 뽑기

01 2022학년도 6월 30번 정답률 15%

30. 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 5번 반복하여 확인한 5개의 수의 곱이 6의 배수일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



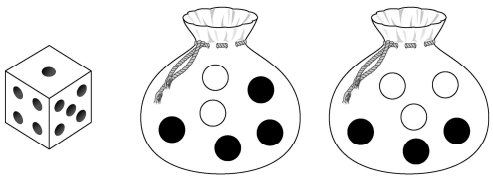
02 2022학년도 9월 26번 정답률 47%

26. 주머니 A에는 흰 공 2개, 검은 공 4개가 들어 있고,
주머니 B에는 흰 공 3개, 검은 공 3개가 들어 있다.
두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 5 이상이면
> 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고,
> 나온 눈의 수가 4 이하이면
> 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다.

이 시행을 한 번 하여 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰색일 때, 나온 눈의 수가 5 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{3}{14}$ ③ $\frac{2}{7}$ ④ $\frac{5}{14}$ ⑤ $\frac{3}{7}$



03 2022학년도 수능 30번 정답률 3%

30. 흰 공과 검은 공이 각각 10개 이상 들어 있는 바구니와 비어 있는 주머니가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 5 이상이면
> 바구니에 있는 흰 공 2개를 주머니에 넣고,
> 나온 눈의 수가 4 이하이면
> 바구니에 있는 검은 공 1개를 주머니에 넣는다.

위의 시행을 5번 반복할 때, $n(1 \le n \le 5)$번째 시행 후 주머니에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 a_n, b_n이라 하자. $a_5+b_5 \ge 7$일 때, $a_k=b_k$인 자연수 $k(1 \le k \le 5)$가 존재할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

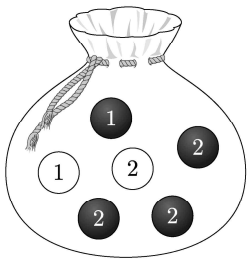
04 2023학년도 6월 30번 정답률 6%

30. 주머니에 1부터 12까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 12개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 작은 수부터 크기 순서대로 a, b, c라 하자. $b-a \geq 5$일 때, $c-a \geq 10$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

05 2023학년도 수능 26번 정답률 52%

26. 주머니에 1이 적힌 흰 공 1개, 2가 적힌 흰 공 1개, 1이 적힌 검은 공 1개, 2가 적힌 검은 공 3개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 3개의 공 중에서 흰 공이 1개이고 검은 공이 2개인 사건을 A, 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수를 모두 곱한 값이 8인 사건을 B라 할 때, $\mathrm{P}(A \cup B)$의 값은? [3점]

① $\frac{11}{20}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{13}{20}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

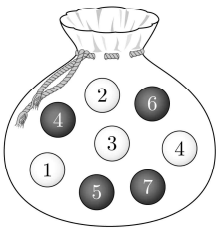


06 2024학년도 6월 30번 정답률 14%

30. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어
> 꺼낸 공이 서로 다른 색이면 12를 점수로 얻고,
> 꺼낸 공이 서로 같은 색이면 꺼낸 두 공에 적힌 수의 곱을
> 점수로 얻는다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 24 이하의 짝수일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



07 2025학년도 수능 26번 정답률 36%

29. 40개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 각각의 공은 흰 공 또는 검은 공 중 하나이다.
이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 흰 공 2개를 꺼낼 확률을 p, 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼낼 확률을 q, 검은 공 2개를 꺼낼 확률을 r이라 하자.
$p=q$일 때, $60r$의 값을 구하시오. (단, $p>0$) [4점]

08 2025학년도 수능 26번 정답률 70%

26. 어느 학급의 학생 16명을 대상으로 과목 A와 과목 B에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 과목 A와 과목 B 중 하나를 선택하였고, 과목 A를 선택한 학생은 9명, 과목 B를 선택한 학생은 7명이다. 이 조사에 참여한 학생 16명 중에서 임의로 3명을 선택할 때, 선택한 3명의 학생 중에서 적어도 한 명이 과목 B를 선택한 학생일 확률은? [3점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{17}{20}$ ④ $\frac{9}{10}$ ⑤ $\frac{19}{20}$

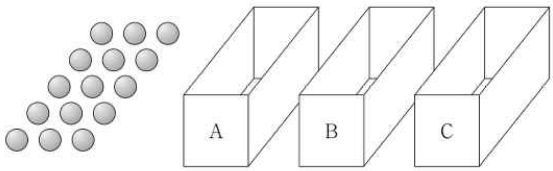
09 2026학년도 6월 28번 정답률 59%

28. 공 15개와 비어 있는 세 상자 A, B, C가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 세 상자 A, B, C에 공을 넣는 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 3의 배수이면
> 세 상자 A, B, C에 넣는 공의 개수가 각각 1, 2, 0이고,
> 나온 눈의 수가 3의 배수가 아니면
> 세 상자 A, B, C에 넣는 공의 개수가 각각 1, 1, 1이다.

이 시행을 5번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 홀수일 때, 상자 A에 들어 있는 공의 개수와 상자 C에 들어 있는 공의 개수의 합이 8 이상일 확률은? [4점]

① $\frac{44}{61}$ ② $\frac{47}{61}$ ③ $\frac{50}{61}$ ④ $\frac{53}{61}$ ⑤ $\frac{56}{61}$



10 2026학년도 9월 25번 정답률 88%

25. 1학년 학생 1명, 2학년 학생 3명, 3학년 학생 4명이 있다. 이 8명의 학생 중 임의로 5명의 학생을 선택할 때, 선택된 2학년 학생 수와 선택된 3학년 학생 수가 서로 같을 확률은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{15}{56}$ ③ $\frac{2}{7}$ ④ $\frac{17}{56}$ ⑤ $\frac{9}{28}$

11 2026년 수능 25번 정답률 72%

25. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 흰 공 5개와 숫자 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 검은 공 5개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색이거나 꺼낸 2개의 공에 적힌 수가 서로 같을 확률은? [3점]

① $\frac{7}{15}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{11}{15}$



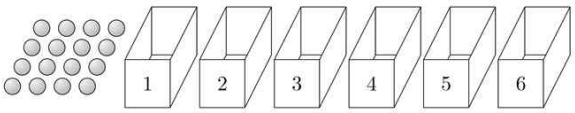
12 2026학년도 수능 28번 정답률 24%

28. 16개의 공과 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 여섯 개의 빈 상자가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k일 때,
> k가 홀수이면
> 1, 3, 5가 적힌 상자에 공을 각각 1개씩 넣고,
> k가 짝수이면
> k의 약수가 적힌 상자에 공을 각각 1개씩 넣는다.

이 시행을 4번 반복한 후 여섯 개의 상자에 들어 있는 모든 공의 개수의 합이 홀수일 때, 3이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 2가 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수보다 1개 더 많을 확률은? [4점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{3}{8}$



13 2026학년도 수능 30번 정답률 13%

30. 비어 있는 주머니 10개가 일렬로 놓여 있고, 공 8개가 있다.
각 주머니에 들어 있는 공의 개수가 2 이하가 되도록
공을 주머니에 남김없이 나누어 넣을 때,
다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오.
(단, 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

> (가) 들어 있는 공의 개수가 1인 주머니는 4개 또는 6개이다.
> (나) 들어 있는 공의 개수가 2인 주머니와 이웃한
> 주머니에는 공이 들어 있지 않다.

유형 09 물건 나눠주기

01 2022학년도 6월 26번 정답률 50%

26. 빨간색 카드 4장, 파란색 카드 2장, 노란색 카드 1장이 있다. 이 7장의 카드를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생이 있도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 같은 색 카드끼리는 서로 구별하지 않고, 카드를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 78 ② 84 ③ 90 ④ 96 ⑤ 102

02 2022학년도 9월 30번 정답률 9%

30. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사인펜 14개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 각 학생은 1개 이상의 사인펜을 받는다.

(나) 각 학생이 받는 사인펜의 개수는 9 이하이다.

(다) 적어도 한 학생은 짝수 개의 사인펜을 받는다.

03 2025학년도 9월 30번 정답률 7%

30. 흰 공 4개와 검은 공 4개를 세 명의 학생 A, B, C에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

> (가) 학생 A가 받는 공의 개수는 0 이상 2 이하이다.
> (나) 학생 B가 받는 공의 개수는 2 이상이다.

04 2025학년도 9월 28번 정답률 36%

28. 빨간색 카드 1장, 파란색 카드 1장, 노란색 카드 3장, 보라색 카드 3장이 있다. 이 8장의 카드를 세 학생 A, B, C에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수는?
(단, 같은 색 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

> (가) 두 학생 A, B는 각각 1장 이상의 카드를 받고, 학생 C는 카드를 받지 못할 수 있다.
> (나) 학생 A가 받는 카드의 색의 가짓수는 3 이하이다.

① 730 ② 746 ③ 762 ④ 778 ⑤ 794

유형 10 주사위 굴리기

01 2022학년도 6월 27번 정답률 42%

27. 주사위 2개와 동전 4개를 동시에 던질 때, 나오는 주사위의 눈의 수의 곱과 앞면이 나오는 동전의 개수가 같을 확률은? [3점]

① $\frac{3}{64}$ ② $\frac{5}{96}$ ③ $\frac{11}{192}$ ④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{13}{192}$

02 2022학년도 6월 28번 정답률 43%

28. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이하이면 나온 눈의 수를 점수로 얻고, 나온 눈의 수가 4 이상이면 0점을 얻는다. 이 주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 할 때, 얻은 네 점수의 합이 4가 되는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [4점]

① 187 ② 190 ③ 193 ④ 196 ⑤ 199

03 2023학년도 6월 25번 정답률 63%

25. 수직선의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가
> 6의 약수이면 점 P를 양의 방향으로 1만큼 이동시키고,
> 6의 약수가 아니면 점 P를 이동시키지 않는다.

이 시행을 4번 반복할 때, 4번째 시행 후 점 P의 좌표가 2 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{13}{18}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{17}{18}$

04 2024학년도 6월 27번 정답률 55%

27. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. $a \times b$가 4의 배수일 때, $a+b \le 7$일 확률은? [3점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{8}{15}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

05 2026학년도 6월 29번 정답률 33%

29. 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 할 때, $a+b=8$ 또는 $b \ge c$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

유형 11 카드나 동전 뒤집기

01 2023학년도 수능 29번 정답률 2%

29. 앞면에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있고 뒷면에는 모두 0이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드가 그림과 같이 6 이하의 자연수 k에 대하여 k번째 자리에 자연수 k가 보이도록 놓여 있다.



이 6장의 카드와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k이면
> k번째 자리에 놓여 있는 카드를 한 번 뒤집어 제자리에 놓는다.

위의 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수일 때, 주사위의 1의 눈이 한 번만 나왔을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

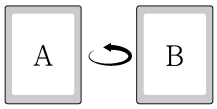
[4점]

02 2024학년도 9월 29번 정답률 13%

29. 앞면에는 문자 A, 뒷면에는 문자 B가 적힌 한 장의 카드가 있다. 이 카드와 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

> 동전을 두 번 던져
> 앞면이 나온 횟수가 2이면 카드를 한 번 뒤집고,
> 앞면이 나온 횟수가 0 또는 1이면 카드를 그대로 둔다.

처음에 문자 A가 보이도록 카드가 놓여 있을 때, 이 시행을 5번 반복한 후 문자 B가 보이도록 카드가 놓일 확률은 p이다. $128\times p$의 값을 구하시오. [4점]



앞면 뒷면

03 2025학년도 6월 28번 정답률 18%

28. 탁자 위에 놓인 4개의 동전에 대하여 다음 시행을 한다.

> 4개의 동전 중 임의로 한 개의 동전을 택하여 한 번 뒤집는다.

처음에 3개의 동전은 앞면이 보이도록, 1개의 동전은 뒷면이 보이도록 놓여 있다. 위의 시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있을 때, 모두 앞면이 보이도록 놓여 있을 확률은? [4점]

① $\frac{17}{32}$ ② $\frac{35}{64}$ ③ $\frac{9}{16}$ ④ $\frac{37}{64}$ ⑤ $\frac{19}{32}$



04 2025학년도 수능 30번 정답률 20%

30. 탁자 위에 5개의 동전이 일렬로 놓여 있다. 이 5개의 동전 중 1번째 자리와 2번째 자리의 동전은 앞면이 보이도록 놓여 있고, 나머지 자리의 3개의 동전은 뒷면이 보이도록 놓여 있다.
이 5개의 동전과 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k일 때,
> $k \le 5$이면 k번째 자리의 동전을 한 번 뒤집어 제자리에 놓고,
> $k = 6$이면 모든 동전을 한 번씩 뒤집어 제자리에 놓는다.

위의 시행을 3번 반복한 후 이 5개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



05 2026학년도 9월 30번 정답률 19%

30. 학생 A는 숫자 1, 8이 각각 하나씩 적혀 있는 2장의 카드 중 임의로 한 장의 카드를 선택하여 선택한 카드에 적힌 수가 8일 때만 선택한 카드를 바닥에 내려놓고,
학생 B는 숫자 2, 3, 4, 5, 6, 7이 각각 하나씩 적혀 있는 6장의 카드 중 임의로 한 장의 카드를 선택하여 선택한 카드에 적힌 수가 자연수 n보다 작거나 같을 때만 선택한 카드를 바닥에 내려놓는다.
다음 규칙에 따라 학생 A가 귤을 받을 확률을 p, 학생 B가 귤을 받을 확률을 q라 하자.

- 카드를 내려놓은 학생이 2명이면
  더 큰 수가 적힌 카드를 내려놓은 학생만 귤을 받는다.
- 카드를 내려놓은 학생이 1명이면
  카드를 내려놓지 않은 학생만 귤을 받는다.
- 카드를 내려놓은 학생이 없으면
  어느 학생도 귤을 받지 못한다.

$p=q$일 때, $24(n+p)$의 값을 구하시오.
(단, n은 7 이하의 자연수이다.) [4점]

유형 12 순서쌍 구하기

01 2022학년도 수능 25번 정답률 48%

25. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는? [3점]

(가) $a+b+c+d+e=12$
(나) $\left\|a^2-b^2\right\|=5$

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

02 2024학년도 9월 30번 정답률 5%

30. 다음 조건을 만족시키는 13 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a \le b \le c \le d$
(나) $a \times d$는 홀수이고, $b + c$는 짝수이다.

03 2024학년도 수능 29번 정답률 16%

29. 다음 조건을 만족시키는 6 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

$a \le c \le d$이고 $b \le c \le d$이다.

유형 13 함수의 개수 구하기

01 2022학년도 9월 28번 정답률 50%

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는? [4점]

(가) $f(3)+f(4)$는 5의 배수이다.
(나) $f(1)<f(3)$이고 $f(2)<f(3)$이다.
(다) $f(4)<f(5)$이고 $f(4)<f(6)$이다.

① 384 ② 394 ③ 404 ④ 414 ⑤ 424

02 2022학년도 수능 28번 정답률 20%

28. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는? [4점]

> (가) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) \geq \sqrt{x}$이다.
> (나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128 ② 138 ③ 148 ④ 158 ⑤ 168

03 2023학년도 6월 29번 정답률 13%

29. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(f(1))=4$
(나) $f(1) \le f(3) \le f(5)$

04 2023학년도 수능 30번 정답률 3%

30. 집합 $X=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 9 이하의 모든 자연수 x에 대하여
$f(x) \le f(x+1)$이다.

(나) $1 \le x \le 5$일 때 $f(x) \le x$이고,
$6 \le x \le 10$일 때 $f(x) \ge x$이다.

(다) $f(6)=f(5)+6$

05 2024학년도 6월 28번 정답률 38%

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는? [4점]

(가) $f(1) \times f(3) \times f(5)$는 홀수이다.
(나) $f(2) < f(4)$
(다) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128 ② 132 ③ 136 ④ 140 ⑤ 144

06 2024학년도 9월 27번 정답률 49%

27. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 X에서 Y로의 모든 일대일함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [3점]

(가) $f(2)=2$
(나) $f(1)\times f(2)\times f(3)\times f(4)$는 4의 배수이다.

① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{3}{35}$ ③ $\frac{1}{10}$ ④ $\frac{4}{35}$ ⑤ $\frac{9}{70}$

07 2023학년도 9월 30번 정답률 4%

30. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$와 함수 $f: X \to X$에 대하여 함수 f의 치역을 A, 합성함수 $f \circ f$의 치역을 B라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $n(A) \le 3$

(나) $n(A)=n(B)$

(다) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) \neq x$이다.

08 2025학년도 6월 30번 정답률 4%

30. 집합 $X=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) X의 모든 원소 x에 대하여 $x+f(x) \in X$이다.
> (나) $x=-2$, -1, 0, 1일 때 $f(x) \geq f(x+1)$이다.

09 2025학년도 9월 28번 정답률 36%

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 $f : X \to X$인 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택하는 시행을 한다. 이 시행에서 선택한 함수 f가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$가 짝수일 확률은? [4점]

> $a \in X$, $b \in X$에 대하여
> a가 b의 약수이면 $f(a)$는 $f(b)$의 약수이다.

① $\frac{9}{19}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{27}{40}$ ⑤ $\frac{19}{25}$

10 2025학년도 수능 28번 정답률 42%

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는? [4점]

(가) $f(1) \times f(6)$의 값이 6의 약수이다.
(나) $2f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5) \le 2f(6)$

① 166 ② 171 ③ 176 ④ 181 ⑤ 186

11 2026학년도 6월 30번 정답률 19%

30. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $x=1, 2, 3, 4$일 때 $f(x+1)+3 \geq f(x)+x$이다.
(나) $f(2)$의 값은 홀수이다.

유형 14 전개식의 계수 구하기

01 2022학년도 6월 23번 정답률 77%

23. 다항식 $(2x+1)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는? [2점]

① 20 ② 40 ③ 60 ④ 80 ⑤ 100

02 2022학년도 9월 25번 정답률 64%

25. $\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^5$의 전개식에서 $\frac{1}{x^2}$의 계수와 x의 계수가 같을 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

03 2022학년도 수능 23번 정답률 79%

23. 다항식 $(x+2)^7$의 전개식에서 x^5의 계수는? [2점]

① 42 ② 56 ③ 70 ④ 84 ⑤ 98

04 2023학년도 6월 26번 정답률 45%

26. 다항식 $(x^2+1)^4(x^3+1)^n$의 전개식에서 x^5의 계수가 12일 때, x^6의 계수는? (단, n은 자연수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

05 2023학년도 9월 23번 정답률 72%

23. 다항식 $(x^2+2)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는? [2점]

① 240 ② 270 ③ 300 ④ 330 ⑤ 360

06 2023학년도 수능 23번 정답률 77%

23. 다항식 $(x^3+3)^5$의 전개식에서 x^9의 계수는? [2점]

① 30 ② 60 ③ 90 ④ 120 ⑤ 150

07 2024학년도 6월 26번 정답률 51%

26. 다항식 $(x-1)^6(2x+1)^7$의 전개식에서 x^2의 계수는? [3점]

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

08 2025학년도 6월 25번 정답률 78%

25. 다항식 $(x^2-2)^5$의 전개식에서 x^6의 계수는? [3점]

① -50 ② -20 ③ 10 ④ 40 ⑤ 70

09 2025학년도 수능 23번 정답률 70%

23. 다항식 $(x^3+2)^5$의 전개식에서 x^6의 계수는? [2점]

① 40 ② 50 ③ 60 ④ 70 ⑤ 80

10 2026학년도 6월 25번 정답률 90%

25. 다항식 $(2x-1)^5(x+1)$의 전개식에서 x^3의 계수는? [3점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

유형 15 벤다이어그램 그리기

01 2022학년도 6월 24번 정답률 78%

24. 어느 동아리의 학생 20명을 대상으로 진로활동 A와 진로활동 B에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 진로활동 A와 진로활동 B 중 하나를 선택하였고, 각각의 진로활동을 선택한 학생 수는 다음과 같다.

(단위 : 명)

구분	진로활동 A	진로활동 B	합계
1학년	7	5	12
2학년	4	4	8
합계	11	9	20

이 조사에 참여한 학생 20명 중에서 임의로 선택한 한 명이 진로활동 B를 선택한 학생일 때, 이 학생이 1학년일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{9}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{11}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

02 2023학년도 9월 24번 정답률 61%

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=1,\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B|A)$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{11}{16}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

03 2024학년도 6월 24번 정답률 69%

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{9},\quad \mathrm{P}(B^C)=\frac{7}{18}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{11}{18}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{13}{18}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

04 2024학년도 9월 25번 정답률 46%

25. 두 사건 A, B에 대하여 A와 B^C은 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5},\quad \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{7}{10}$$

일 때, $\mathrm{P}(A^C\cap B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

05 2024학년도 수능 24번 정답률 61%

24. 두 사건 A, B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(A)$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

06 2025학년도 6월 24번 정답률 74%

24. 두 사건 A, B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{5}{6},\quad \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{4}$$

일 때, $\mathrm{P}(B^C)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{11}{24}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{13}{24}$

07 2025학년도 9월 24번 정답률 50%

24. 두 사건 A, B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3},\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{19}{24}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

08 2025학년도 수능 24번 정답률 64%

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\,|\,B)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

09 2026학년도 6월 24번 정답률 86%

24. 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A\cup B)=1,\ \mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(A)$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

10 2026년 실시 9월 24번 정답률 92%

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{6},\ \mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{4}$$

일 때, $\mathrm{P}(A^C)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{11}{24}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

유형 01 숫자, 문자 나열하기

01 2023학년도 6월 23번 정답률 80%

23. 5개의 문자 a, a, a, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

정 답 ②

해 설

· 전체 경우의 수는 $5!=120$이다.

· 중복되는 a의 경우의 수는 $3!=6$이다.

따라서 답은 $\frac{5!}{3!1!1!}=\frac{120}{6}=20$이다.

02 2024학년도 6월 23번 정답률 86%

23. 5개의 문자 a, a, b, c, d를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 50 ② 55 ③ 60 ④ 65 ⑤ 70

정 답 ①

해 설

· 전체 경우의 수는 $5!=120$이다.

· 중복되는 a의 경우의 수는 $2!=2$이다.

따라서 답은 $\frac{5!}{2!1!1!1!}=60$이다.

03 2024학년도 수능 23번 정답률 82%

23. 5개의 문자 x, x, y, y, z를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

정 답 ③

해 설

· 전체 경우의 수는 $5!=120$이다.

· 중복되는 x의 경우의 수는 $2!=2$이다.

· 중복되는 y의 경우의 수는 $2!=2$이다.

따라서 답은 $\frac{5!}{2!2!1!}=\frac{120}{4}=30$이다.

04 2025학년도 6월 23번 정답률 87%

23. 네 개의 숫자 1, 1, 2, 3을 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

정 답 ③

해 설

· 전체 경우의 수는 $4!=24$이다.

· 중복되는 1의 경우의 수는 $2!=2$이다.

따라서 답은 $\frac{4!}{2!1!1!}=12$이다.

05 2025학년도 9월 23번 정답률 78%

23. 다섯 개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3을 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

정 답 ⑤

해 설

· 전체 경우의 수는 $5!=120$이다.

· 중복되는 2의 경우의 수는 $2!=2$이다.

· 중복되는 3의 경우의 수는 $2!=2$이다.

따라서 답은 $\frac{5!}{1!2!2!}=30$이다.

06 2026학년도 6월 23번 정답률 93%

23. 6개의 문자 a, a, a, a, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 18 ② 24 ③ 30 ④ 36 ⑤ 42

정 답 ③

해 설

같은 것이 있는 순열의 공식을 활용하자.

$\frac{6!}{4!\times1!\times1!}=30$이다.

07 2026학년도 9월 23번 정답률 87%

23. 세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 72 ② 75 ③ 78 ④ 81 ⑤ 84

정 답 ④

해 설

중복을 허락하여 나열하는 경우의 수는 거듭제곱을 통해 구하면 된다.

4개의 자리에 어떠한 문자도 올 수 있으므로 총 경우의 수는 $3^4 = 81$가지이다.

유형 02 숫자, 문자 나열하기 (심화)

01 2022학년도 6월 25번 정답률 69%

25. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 선택할 때, 선택한 수가 3500보다 클 확률은? [3점]

① $\frac{9}{25}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{11}{25}$ ④ $\frac{12}{25}$ ⑤ $\frac{13}{25}$

정 답 ③

해 설

STEP1 총 가능한 경우의 수 계산

숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4자리 수를 만드는 총 경우의 수는 $5^4 = 625$이다.

STEP2 3500보다 큰 수의 조건 분석

CASE 1. 천의 자리가 4 또는 5인 경우

어떤 수가 되던 3500보다 크고, 나머지 세 자리에 올 수 있는 수가 각각 5가지이므로 경우의 수는 $2 \times 5^3 = 250$가지

CASE 2. 천의 자리가 3인 경우

백의 자리는 반드시 5가 되야하고 나머지는 아무거나 와도 상관없다. 따라서 경우의 수는 $5^2 = 25$가지이다.

따라서 가능한 경우의 수는 $250 + 25 = 275$가지이다.

따라서 확률은 $\frac{11}{25}$이다.

02 2023학년도 6월 27번 정답률 60%

27. 네 문자 a, b, X, Y 중에서 중복을 허락하여 6개를 택해 일렬로 나열하려고 한다. 다음 조건이 성립하도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

> (가) 양 끝 모두에 대문자가 나온다.
> (나) a는 한 번만 나온다.

① 384 ② 408 ③ 432 ④ 456 ⑤ 480

정 답 ③

해 설

STEP1 (가) 조건: 양 끝 대문자 배치

여섯 개의 자리를 _ _ _ _ _ _ 라고 생각하자.

- 첫 번째 자리: 'X' 또는 'Y'가 올 수 있다. (2가지)
- 여섯 번째 자리: 'X' 또는 'Y'가 올 수 있다. (2가지)

따라서 양 끝 자리를 채우는 경우의 수는 $2^2 = 4$가지

STEP2 (나) 조건: 'a' 1개 배치

이제 양 끝을 제외한 가운데 네 개의 자리 _ _ _ _ 가 남았다. 이 중에서 'a'가 들어갈 한 자리를 골라야 한다.

- 4개의 자리 중 1개를 선택하는 경우의 수: ${}_4C_1 = 4$가지

STEP3 나머지 자리 채우기

이제 'a'까지 자리를 잡았고, 총 3개의 자리가 비어있다. 이 남은 자리에는 'a'를 제외한 나머지 문자들, 즉 $\{b, X, Y\}$가 자유롭게 들어갈 수 있다. (중복 허용) 각 빈자리에 들어갈 수 있는 문자의 종류는 3가지이다. 따라서 나머지 3자리를 채우는 경우의 수는 $3^3 = 27$가지

위의 모든 경우의 수를 모두 곱하면 432이다.

03 2023학년도 6월 28번 정답률 44%

28. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 택할 때, 택한 수가 5의 배수 또는 3500 이상일 확률은? [4점]

① $\frac{9}{20}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{11}{20}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{13}{20}$

정 답 ④

해 설

STEP1 전체 경우의 수

5개의 서로 다른 숫자 중에서 4개를 택해 나열하는 순열이다.

전체 경우의 수 $= P(5,4) = 120$가지

STEP2 사건 A: 5의 배수인 경우의 수

5의 배수가 되려면 일의 자리가 반드시 5로 고정되어야 한다. (_ _ _ 5)

남은 4개의 숫자 {1, 2, 3, 4}를 앞의 세 자리에 나열하면 된다. $P(4,3) = 24$가지이다.

STEP3 사건 B: 3500 이상인 경우의 수

천의 자리를 기준으로 경우를 나눈다.

- 천의 자리가 4 또는 5일 때:
  4 _ _ _ 또는 5 _ _ _
  어떤 숫자가 와도 3500 이상이다.
  $2 \times P(4,3) = 48$가지이다.
- 천의 자리가 3일 때:
  3 _ _ _
  3500 이상이 되려면 백의 자리는 반드시 5여야 한다.
  (3 5 _ _)
  남은 두 자리에 남은 3개의 숫자 {1, 2, 4}를 나열한다.
  $P(3,2) = 6$가지이다.

따라서 곱하면 54가지이다.

STEP4 교집합: 5의 배수이면서 3500 이상인 경우

- 일의 자리는 5로 고정되어야 하고, 3500 이상이어야 한다.
- 천의 자리는 3이 될 수 없다. (백의 자리에 5가 와야 하는데, 일의 자리에 이미 5를 사용해서 중복 불가).
- 천의 자리는 5가 될 수 없다. (중복 불가).
- 따라서 천의 자리는 반드시 4여야 한다. (4 _ _ 5)
- 가운데 두 자리에 남은 3개의 숫자 {1, 2, 3}을 나열한다.

따라서 $P(3,2) = 6$가지이다.

최종 확률을 계산하면 $\frac{24+54-6}{120} = \frac{3}{5}$이다.

04 2023학년도 수능 24번 정답률 72%

24. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 4000 이상인 홀수의 개수는? [3점]

① 125 ② 150 ③ 175 ④ 200 ⑤ 225

정 답 ②

해 설

STEP1 천의 자리 결정 (4000 이상 조건)
- 네 자리 수가 4000 이상이 되려면, 천의 자리에는 4 또는 5가 와야 한다.
- 경우의 수: 2가지

STEP2 일의 자리 결정 (홀수 조건)
- 네 자리 수가 홀수가 되려면, 일의 자리에는 1, 3, 5중 하나가 와야 한다.
- 경우의 수: 3가지

STEP3 백의 자리와 십의 자리 결정
- 백의 자리와 십의 자리에는 아무런 제약 조건이 없다.
- 문제에서 중복을 허락하므로, 5개의 숫자 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$를 모두 사용할 수 있다.
- 백의 자리에 올 수 있는 경우의 수: 5가지
- 십의 자리에 올 수 있는 경우의 수: 5가지

- 각 자리를 채우는 것은 동시에 일어나므로, 곱의 법칙에 따라 모든 경우의 수를 곱한다. $2\times5\times5\times3=150$

05 2025학년도 6월 26번 정답률 53%

26. 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 문자열 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 문자 a가 한 개만 포함되거나 문자 b가 한 개만 포함된 문자열이 선택될 확률은? [3점]

① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{41}{64}$ ③ $\frac{21}{32}$ ④ $\frac{43}{64}$ ⑤ $\frac{11}{16}$

정 답 ③

해 설

STEP1 전체 경우의 수
- 4개의 문자 $\{a, b, c, d\}$ 중에서 중복을 허락하여 4개를 선택해 나열하는 중복순열이다.
- 전체 경우의 수$=4^4=256$가지

STEP2 사건 A: 'a'가 한 개인 경우의 수
- 먼저 4개의 자리 중 'a'가 들어갈 위치를 선택한다. ${}_4C_1$
- 'a'를 제외한 나머지 3개의 자리는 'a'가 아닌 문자 $\{b, c, d\}$ (3가지)로 채웁니다.
- 나머지 3자리를 채우는 경우의 수: $3^3=27$가지

따라서 $4\times27=108$가지

STEP3 사건 B: 'b'가 한 개인 경우의 수

사건 A와 완전히 대칭적인 구조이므로 계산 과정과 결과가 동일하다. 108가지

STEP4 교집합: 'a'가 한 개이고 'b'도 한 개인 경우
- 4개의 자리 중 'a'가 들어갈 위치를 선택한다. ${}_4C_1$
- 남은 3개의 자리 중 'b'가 들어갈 위치를 선택한다. ${}_3C_1$
- 이제 남은 2개의 자리는 'a', 'b'가 아닌 문자 $\{c, d\}$ (2가지)로 채웁니다.
- 나머지 2자리를 채우는 경우의 수: $2^2=4$가지

따라서 $4\times3\times4=48$가지

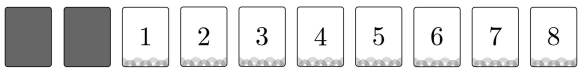
최종 확률은 $\frac{108+108-48}{256}=\frac{21}{32}$이다.

유형 03 카드 나열하기

01 2024학년도 6월 29번 정답률 16%

29. 그림과 같이 2장의 검은색 카드와 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 흰색 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 왼쪽에서 오른쪽으로 일렬로 배열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오.
(단, 검은색 카드는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

(가) 흰색 카드에 적힌 수가 작은 수부터 크기순으로 왼쪽에서 오른쪽으로 배열되도록 카드가 놓여 있다.
(나) 검은색 카드 사이에는 흰색 카드가 2장 이상 놓여 있다.
(다) 검은색 카드 사이에는 3의 배수가 적힌 흰색 카드가 1장 이상 놓여 있다.



정 답 25

해 설

STEP1 문제 이해하기
총 10개의 위치에 흰색 카드 8장(숫자 1부터 8까지 오름차순으로 고정 배치)과 검은색 카드 2장(구별 불가)을 놓는 문제이다.

조건 (가)에 의해 흰색 카드의 순서는 고정되므로, 본질적으로 검은색 카드의 위치를 선택하는 문제로 환원된다.

STEP2 문제 접근하기
검은색 카드의 위치를 i와 j $(1 \leq i < j \leq 10,\ j-i \geq 3)$로 두면, 총 가능한 쌍의 수는 ${}_{10}C_2 - 9 - 8 = 28$이다.
(단, $j-i=1$인 경우 9개, $j-i=2$인 경우 8개 제외)

이때, 두 검은색 카드 사이의 흰색 카드들(위치 $i+1$부터 $j-1$까지)에 할당되는 숫자는 i부터 $j-2$까지의 연속 정수이다. 이 구간이 3 또는 6을 포함해야 한다.
3과 6을 피하는 구간(길이 ≥ 2)은 가능한 연속 구간 중 $\{1,2\}$, $\{4,5\}$, $\{7,8\}$뿐입니다.
(피할 수 있는 집합 $\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8\}$의 연결 성분이 길이 2인 블록 3개)

- $\{1,2\}$: $i=1,\ j=4$
- $\{4,\ 5\}$: $i=4,\ j=7$
- $\{7,\ 8\}$: $i=7,\ j=10$

이 3개의 경우만 조건 (다)를 위배한다.
따라서 만족하는 경우의 수는 $28-3=25$이다.

02 2024학년도 수능 25번 정답률 66%

25. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 10 이하가 되도록 카드가 놓일 확률은? [3점]

① $\frac{8}{15}$ ② $\frac{19}{30}$ ③ $\frac{11}{15}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{14}{15}$



정 답 ⑤

해 설

전체 6!을 계산하는 것은 하수이다. 어차피 가운데 4개의 배열은 양 끝에 어떤 카드가 오는지에 대한 확률에 영향을 주지 않습니다. 이 문제의 본질은 '양 끝에 올 카드 2개를 뽑았을 때, 그 합이 10 이하일 확률'과 같다.

STEP1 전체 경우의 수

전체 6장의 카드 중에서 양 끝에 놓을 2장을 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_2 = 15$가지이다.

STEP2 여사건의 경우의 수

- 원래 사건: 양 끝 카드의 합 ≤ 10
- 여사건: 양 끝 카드의 합 >10

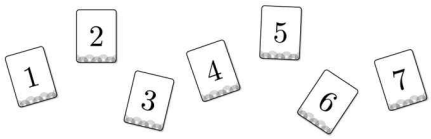
양 끝 카드의 합이 10을 초과하는 경우를 찾아보면 $(5, 6)$인 경우 1가지 밖에 없다.

따라서 확률은 $1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$이다.

03 2026년 6월 26번 정답률 78%

26. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 곱이 짝수가 되도록 카드가 놓일 확률은? [3점]

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{5}{7}$



정 답 ⑤

해 설

여사건을 이용한 확률 계산 문항이다.

두 수의 곱이 짝수가 되는 경우를 물어보면 대부분 경우의 수가 더 많기 때문에 홀수가 되는 경우를 전체에서 빼는 것이 더 빠르다.

양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 곱이 홀수가 되려면 양 끝에 1, 3, 5, 7 중 하나가 각각 놓여야 한다.

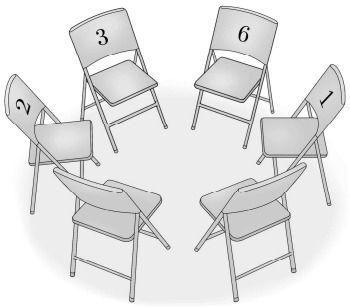
전체 경우의 수는 7!이고, 양 끝에 홀수가 놓이는 경우는 $4\times3\times5!$이다.

따라서, 확률은 $1-\frac{4\times3\times5!}{7!}=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$이다.

유형 04 의자 나열하기

01 2022학년도 6월 29번 정답률 21%

29. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



정 답 48

해 설

STEP1 문제 및 금지 인접 파악
1부터 6까지 숫자를 원형으로 배열할 때, 서로 인접한 두 수의 곱이 12가 되면 안 된다. 곱이 12가 되는 쌍은 2와 6, 3과 4이다. 즉 2−6 또는 3−4가 옆에 붙으면 안 된다.

STEP2 원형 배열의 전체 경우 수
회전으로 같은 배열을 하나로 보기 때문에 6개의 수를 원형에 배열하는 기본 경우 수는 $(6-1)!=120$이다.

STEP3 여사건으로 접근하기
- 2와 6이 붙는 경우: 2−6을 하나의 블록으로 보고, 블록 + {1, 3, 4, 5} 5개 객체를 원형에 배열한다. 경우 수는 $(5-1)!=24$, 블록 내부 순서 2가지까지 곱해 $24\times2=48$이다.
- 3와 4가 붙는 경우도 동일하게 48이다.
- 두 쌍이 모두 붙는 경우: 2−6 블록, 3−4 블록, 나머지 {1, 5} 해서 4개 객체를 원형에 배열한다. 경우 수는 $(4-1)!=6$이고, 블록 내부 순서 각각 2가지씩 곱해 $6\times2\times2=24$이다.

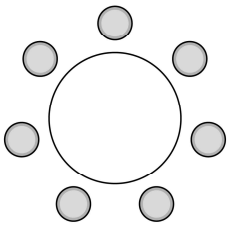
따라서 전체-여사건은 $120-72=48$이다.

TIP 원순열 푸는법
STEP 1. 한 개의 요소를 고정한다.
STEP 2. 나머지 요소를 배열한다.

02 2023학년도 9월 26번 정답률 54%

26. 세 학생 A, B, C를 포함한 7명의 학생이 원 모양의 탁자에 일정한 간격을 두고 임의로 모두 둘러앉을 때, A가 B 또는 C와 이웃하게 될 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$



정 답 ②

해 설

STEP1 문제 분석하기

문제 조건에 의하여 기준점 설정을 A를 고정하자.

그러면 A를 기준으로 나머지 6개의 자리가 생긴 것으로 볼 수 있다.

STEP2 여사건 확률 계산하기

여사건은 A의 양옆(왼쪽, 오른쪽) 자리에 B와 C가 아닌 다른 학생이 앉는 경우로써, 다른 학생은 총 4명이다.

• A의 왼쪽에 다른 학생이 앉을 확률은 $\frac{4}{6}$이다.

• 이후 A의 오른쪽에 다른 학생이 앉을 확률은 $\frac{3}{5}$이다.

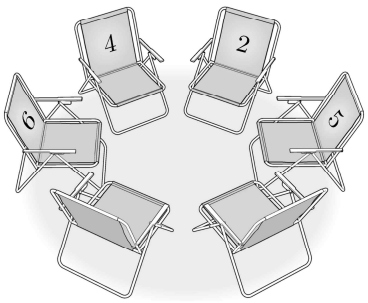
따라서 여사건의 확률은 $\frac{2}{5}$이다.

따라서 최종 확률은 $\frac{3}{5}$이다.

03 2025학년도 6월 27번 정답률 59%

27. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 합이 11이 되지 않도록 배열하는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 72 ② 78 ③ 84 ④ 90 ⑤ 96



정 답 ①

해 설

STEP1 문제 및 금지 인접 파악

1부터 6까지 자연수가 하나씩 적힌 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 두 의자에 적힌 수의 합이 11이 되지 않도록 배열하는 경우 수를 구하는 문제이다.
1~6 중 합이 11이 되는 쌍은 5와 6뿐이므로, $5-6$이 인접하면 안 된다.

STEP2 원형 배열의 전체 경우 수

회전으로 같은 배열을 하나로 보기 위해, 원형 배열의 전체 기본 경우 수는 $(6-1)! = 5! = 120$이다.

STEP3 여사건 계산하기

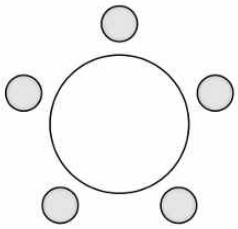
- 금지된 인접 쌍 5와 6이 붙는 경우의 수를 센다.
  5와 6을 하나의 블록으로 묶어 하나의 객체로 보고, 나머지 숫자들 $\{1, 2, 3, 4\}$까지 총 5개 객체를 원형에 배열한다.
  원형에 5개 객체 배열 경우 수는 $(5-1)! = 4! = 24$이다.
- 블록 내부에서 $5-6$ 또는 $6-5$ 두 가지 순서가 가능하므로, $24 \times 2 = 48$이다. 따라서 5와 6이 인접한 배열 수는 48이다.

따라서 최종 경우의 수는 $120 - 48 = 72$이다.

04 2026년 6월 27번 정답률 80%

27. 5명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 남학생 5명, 여학생 3명이 있다. 이 8명의 학생 중에서 4명 이상의 남학생을 포함하여 5명의 학생을 선택하고 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 384 ② 408 ③ 432 ④ 456 ⑤ 480



정 답 ①

해 설

먼저, 8명 중 5명을 고르는 경우부터 세보자.

5명 중 적어도 4명이 남학생이므로 다음과 같은 경우가 있다.

1) 남학생 5명을 고르는 경우

남학생이 5명이면 학생을 고르는 경우의 수는 1이다.

학생들을 배열하는 경우의 수는 원순열 공식을 쓰면 $\frac{5!}{5}=24$ 가지이다.

2) 남학생 4명, 여학생 1명을 고르는 경우

남학생 5명 중 4명을 고르는 경우의 수는 ${}_5C_4$가지이고, 여학생 1명을 고르는 경우의 수는 ${}_3C_1$가지이다.

학생들을 배열하는 경우의 수는 원순열 공식을 쓰면 $\frac{5!}{5}=24$ 가지이다.

따라서, 전체 경우의 수는 $24+5\times3\times24=384$

유형 05 숫자 뽑기

01 2022학년도 9월 24번 정답률 73%

24. 네 개의 수 1, 3, 5, 7 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를 a라 하고, 네 개의 수 2, 4, 6, 8 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를 b라 하자. $a \times b > 31$일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

정 답 ③

해 설

STEP1 전체 경우의 수

전체 경우의 수는 첫 번째 집합에서 4개, 두 번째 집합에서 4개를 뽑으므로 $4 \times 4 = 16$가지이다

STEP2 경우의 수

이제 $a \times b > 31$이 되는 경우만 찾으면 된다.

CASE 1. $a = 5$일 때 b는 8이 가능하다. (1가지)
CASE 2. $a = 7$일 때 b는 6, 8이 가능하다. (2가지)

따라서 확률은 $\frac{3}{16}$이다.

02 2023학년도 9월 28번 정답률 40%

28. 1부터 10까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택한다. 선택된 세 개의 수의 곱이 5의 배수이고 합은 3의 배수일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{11}{60}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{13}{60}$

정 답 ③

해 설

STEP1 전체 경우의 수

10개에서 3개를 뽑으므로 ${}_{10}C_3 = 120$가지이다.

STEP2 경우의 수

합이 3의 배수가 되려면 다음 조건을 만족해야한다.

(1) 나머지가 0인 그룹에서 3개 뽑기: {3, 6, 9}
5 또는 10이 포함되어 있지 않으므로 불가능하다.

(2) 나머지가 1인 그룹에서 3개 뽑기: {1, 4, 7, 10}
10을 뽑고 나머지 3개에서 2개를 뽑으면 된다.
${}_3C_2 = 3$가지이다.

(3) 나머지가 2인 그룹에서 3개 뽑기: {2, 5, 8}
5를 뽑고 나머지 2개에서 2개를 뽑으면 된다.
1가지이다.

(4) 위의 각 그룹에서 1개씩 뽑기
・5를 뽑으면 (1), (2)에서 $3 \times 4 = 12$가지이다.
・10를 뽑으면 (1), (3)에서 $3 \times 3 = 9$가지이다.

따라서 확률은 $\frac{3+1+12+9}{120} = \frac{11}{60}$이다.

(분류는 큰 범주에서 작은 범주로 진행한다.)
예를 들어 서울특별시 강남구 한국아파트 몇 호

03 2025학년도 9월 25번 정답률 61%

25. 1부터 11까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 2개의 수를 선택한다. 선택한 2개의 수 중 적어도 하나가 7 이상의 홀수일 확률은? [3점]

① $\frac{23}{55}$ ② $\frac{24}{55}$ ③ $\frac{5}{11}$ ④ $\frac{26}{55}$ ⑤ $\frac{27}{55}$

정 답 ⑤

해 설

STEP1 전체 경우의 수

11개의 자연수 중에서 서로 다른 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_{11}C_2 = 55$가지이다.

STEP2 여사건의 경우의 수

- 원래 사건: 선택한 2개의 수 중 적어도 하나가 7 이상의 홀수이다.
- 여사건: 선택한 2개의 수가 모두 7이 아니다. (총 8개)

8개에서만 2개의 수를 선택하는 경우의 수는 ${}_8C_2 = 28$가지이다.

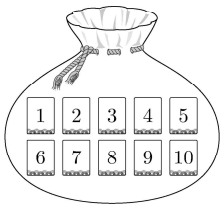
따라서 확률은 $1-\frac{28}{55}=\frac{27}{55}$이다.

유형 06 카드 뽑기

01 2022학년도 수능 26번 정답률 62%

26. 1부터 10까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 카드 3장을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4 이하이거나 7 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{13}{15}$ ④ $\frac{9}{10}$ ⑤ $\frac{14}{15}$



정 답 ③

해 설

문제에서 '~이거나'라는 키워드가 보이면 합사건의 확률을 떠올릴 수 있지만, 경우의 수가 너무 많아 보일 때는 여사건을 먼저 의심하는 것이 상위권의 기본 풀이법입니다.

STEP1 문제 접근하기

이 문제를 정직하게 '가장 작은 수가 1일 때, 2일 때, ..., 4일 때, 7일 때, 8일 때'의 경우를 모두 구해서 더하고 있으면 시험 시간 끝납니다. 당연히 반대되는 사건, 즉 여사건으로 접근해야 합니다.

- 원래 사건: 가장 작은 수가 4 이하이거나 7 이상일 확률
- 여사건: 가장 작은 수가 4 초과, 7 미만일 확률,
  즉, 가장 작은 수가 5 또는 6일 확률이다.

STEP2 답 구하기

1. 전체 경우의 수 구하기

10장의 카드에서 3장을 동시에 꺼내는 전체 경우의 수는 ${}_{10}C_3 = 120$가지이다.

2. 여사건의 경우의 수 구하기

- 가장 작은 수가 5일 때
  '5'는 반드시 뽑고, 나머지 2장은 5보다 큰 수에서 뽑으면 된다. ${}_5C_2 = 10$가지
- 가장 작은 수가 6일 때
  '6'는 반드시 뽑고, 나머지 2장은 6보다 큰 수에서 뽑으면 된다. ${}_4C_2 = 6$가지

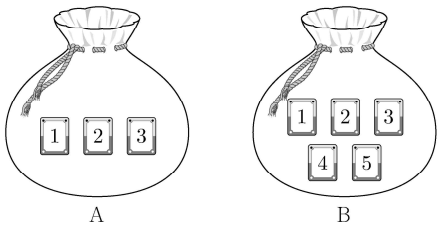
따라서 여사건의 총 경우의 수는 $10+6=16$가지입니다.

최종적으로 확률은 $1-\frac{16}{120}=\frac{13}{15}$이다.

02 2023학년도 6월 24번 정답률 64%

24. 주머니 A에는 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 3장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있다.
두 주머니 A, B에서 각각 카드를 임의로 한 장씩 꺼낼 때, 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수의 차가 1일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{7}{15}$ ④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{3}{5}$



정 답 ①

해 설

STEP1 전체 경우의 수

- A 주머니에서 카드 한 장을 뽑는 경우의 수: 3가지
- B 주머니에서 카드 한 장을 뽑는 경우의 수: 5가지

따라서 전체 경우의 수는 $3\times5=15$가지입니다.

STEP2 조건을 만족하는 경우의 수

두 수의 차가 1이 되는 경우를 A 주머니의 카드를 기준으로 빠르게 찾습니다.

- A에서 1을 뽑았을 때:
  차가 1이 되려면 B에서는 2를 뽑아야 합니다. (1가지)
- A에서 2를 뽑았을 때:
  차가 1이 되려면 B에서는 1 또는 3을 뽑아야 합니다. (2가지)
- A에서 3을 뽑았을 때:
  차가 1이 되려면 B에서는 2 또는 4를 뽑아야 합니다. (2가지)

최종 확률을 계산해보면 $\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$이다.

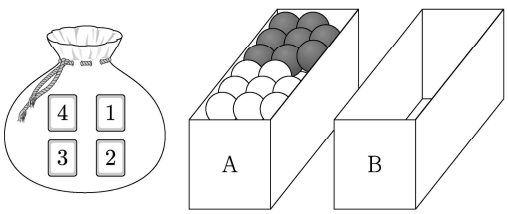
03 2024학년도 수능 28번 정답률 41%

28. 하나의 주머니와 두 상자 A, B가 있다. 주머니에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있고, 상자 A에는 흰 공과 검은 공이 각각 8개 이상 들어 있고, 상자 B는 비어 있다. 이 주머니와 두 상자 A, B를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어
> 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 주머니에 넣는다.
> 확인한 수가 1이면
> 상자 A에 있는 흰 공 1개를 상자 B에 넣고,
> 확인한 수가 2 또는 3이면
> 상자 A에 있는 흰 공 1개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣고,
> 확인한 수가 4이면
> 상자 A에 있는 흰 공 2개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣는다.

이 시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8일 때, 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 2일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{70}$ ② $\frac{2}{35}$ ③ $\frac{1}{14}$ ④ $\frac{3}{35}$ ⑤ $\frac{1}{10}$



정 답 ④

해 설

STEP1 문제의 본질 이해하기

우선 시행의 종류를 분석해보자.

카드를 뽑는 행위는 결국 세 가지 종류의 결과로 나뉜다.

- 카드 1 뽑기: $P_x=\frac{1}{4}$
- 카드 2 또는 3 뽑기: $P_y=\frac{1}{2}$
- 카드 4 뽑기: $P_z=\frac{1}{4}$

4번의 시행에서 각각 n_x, n_y, n_z번 일어난다고 하자.

그러면 이 변수들의 값을 찾으면 끝이다.

STEP2 조건 해석하기

우선 총 시행 횟수가 4번이므로

$n_x+n_y+n_z=4$를 만족한다.

시행 후 상자에 들어있는 공이 8개이므로

$n_x+2n_y+3n_z=8$를 만족한다.

두 식을 빼면 $n_y+2n_z=4$이다.

가능한 조합을 정리해보면 다음과 같다.

- $n_z=2$라면 $n_y=0$이고, $n_x=2$이다. $(2,0,2)$

$$P_a={}_4C_2(P_x)^2(P_z)^2=6\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{6}{256}$$

- $n_z=1$라면 $n_y=2$이고, $n_x=1$이다. $(1,2,1)$

$$P_b=\frac{4!}{1!2!1!}(P_x)^1(P_y)^2(P_z)^1=12\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{48}{256}$$

- $n_z=0$라면 $n_y=4$이고, $n_x=0$이다. $(0,4,0)$

$$P_c={}_4C_4(P_y)^4=1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{16}{256}$$

또한 분자 조건에서 B에 들어간 검은 공의 개수는 2개이므로 위에서 찾은 경우 중 가능한 것은 $(2,0,2)$ 이다.

결론적으로 이 조건부 확률은 $\frac{\frac{6}{256}}{\frac{70}{256}}=\frac{3}{35}$이다.

유형 07 물건 뽑기

01 2023학년도 수능 25번 정답률 65%

25. 흰색 마스크 5개, 검은색 마스크 9개가 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 3개의 마스크를 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 마스크 중에서 적어도 한 개가 흰색 마스크일 확률은? [3점]

① $\frac{8}{13}$ ② $\frac{17}{26}$ ③ $\frac{9}{13}$ ④ $\frac{19}{26}$ ⑤ $\frac{10}{13}$

정 답 ⑤

해 설

STEP1 문제 접근하기

- 원래 사건: 뽑은 3개의 마스크 중 적어도 한 개가 흰색일 확률
- 여사건: 뽑은 마스크 3개가 모두 검은색일 확률

STEP2 답 구하기

1. 전체 경우의 수

총 14개(흰색 5 + 검은색 9)의 마스크 중에서 3개를 동시에 꺼내는 경우의 수입니다.

전체 경우의 수는 ${}_{14}C_3 = 364$가지

2. 여사건의 경우의 수

모두 검정색 마스크를 뽑는 경우는 검정색 마스크 9개 중에서 3개를 뽑는 경우입니다.

여사건의 경우의 수는 ${}_{9}C_3 = 84$가지

따라서 $1 - \frac{84}{364} = \frac{10}{13}$이다.

02 2024학년도 6월 25번 정답률 66%

25. 흰색 손수건 4장, 검은색 손수건 5장이 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 4장의 손수건을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 4장의 손수건 중에서 흰색 손수건이 2장 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{9}{14}$ ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{11}{14}$

정 답 ③

해 설

STEP1 전체 경우의 수

총 9장(흰색 4 + 검은색 5)의 손수건 중에서 4장을 동시에 꺼내는 경우의 수이다.

전체 경우의 수: ${}_{9}C_4 = 126$가지

STEP2 조건을 만족하는 경우의 수 구하기

'흰색 손수건이 2장 이상'인 경우는 아래의 세 가지입니다.

CASE 1. 흰색 2장, 검은색 2장

${}_4C_2 \times {}_5C_2 = 60$가지

CASE 2. 흰색 3장, 검은색 1장

${}_4C_3 \times {}_5C_1 = 20$가지

CASE 3. 흰색 4짱, 검은색 0장

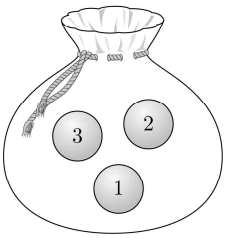
${}_4C_4 \times {}_5C_0 = 1$가지

따라서 확률은 $\frac{81}{126} = \frac{9}{14}$이다.

유형 08 공 뽑기

01 2022학년도 6월 30번 정답률 15%

30. 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 5번 반복하여 확인한 5개의 수의 곱이 6의 배수일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



정 답 47

해 설

STEP1 문제 분석

이 문제는 독립시행 확률 문제이며, '곱이 6의 배수'라는 조건은 '5번의 시행 중 2가 적어도 한 번 나오고, 동시에 3도 적어도 한 번 나온다'는 의미이다.

STEP2 전체 경우의 수

매 시행마다 3가지(1, 2, 3)의 선택이 가능하고, 5번 반복하므로 전체 경우의 수는 $3^5=243$가지이다.

STEP3 여사건

- 사건: 5개 수의 곱이 6의 배수
  =(2가 적어도 1번 나옴)∩(3이 적어도 1번 나옴)
- 여사건: (2가 한 번도 안나옴)∪(3이 한 번도 안나옴)
  따라서 여사건의 확률은 다음과 같다.
  $P(E^c)=P(\text{2가 없음})+P(\text{3이 없음})-P(\text{2도 없고 3도 없음})$

- 2가 없는 경우는 매 시행마다 1, 3 중에서만 뽑아야 한다.
  경우의 수는 $2^5=32$가지이다.
- 3이 없는 경우는 매 시행마다 1, 2 중에서만 뽑아야 한다.
  경우의 수는 $2^5=32$가지이다.
- 2도 없고 3도 없는 경우는 매 시행마다 1만 뽑아야 한다.
  경우의 수는 $1^5=1$가지이다.

따라서 확률은 $1-\frac{63}{243}=\frac{20}{27}$이므로 $p+q=47$이다.

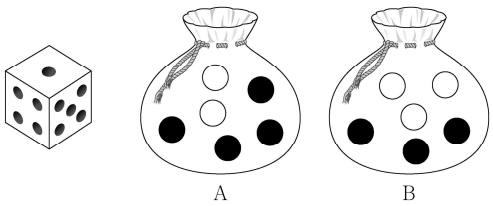
02 2022학년도 9월 26번 정답률 47%

26. 주머니 A에는 흰 공 2개, 검은 공 4개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 3개, 검은 공 3개가 들어 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 5 이상이면
> 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고,
> 나온 눈의 수가 4 이하이면
> 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다.

이 시행을 한 번 하여 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰색일 때, 나온 눈의 수가 5 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{3}{14}$ ③ $\frac{2}{7}$ ④ $\frac{5}{14}$ ⑤ $\frac{3}{7}$



정 답 ①

해 설

문제의 본질은 '흰 공 2개'라는 결과가 나왔을 때,
경로 1(A주머니 경유)에서 왔을 가능성과
경로 2(B주머니 경유)에서 왔을 가능성을 비교하는 것이다.

STEP1 경로 선택 확률의 비율

먼저 A주머니와 B주머니가 선택될 확률의 비율을 구한다.

- A 주머니 선택 (주사위 5 이상): 확률 $\frac{2}{6}$
- B 주머니 선택 (주사위 4 이하): 확률 $\frac{4}{6}$

따라서 선택 확률의 비율은 $\frac{2}{6}:\frac{4}{6}=1:2$이다.

STEP2 각 경로에서 '성공'할 확률의 비율

그 다음, 각 주머니에서 '흰 공 2개'를 뽑아낼 확률(성공 확률)의 비율을 구한다.

- A에서 성공할 확률: $P(W_A)=\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$
- B에서 성공할 확률 $P(W_B)=\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{3}{15}$

따라서 각 주머니에서의 성공 확률의 비율은 $1:3$이다.

STEP3 최종 경로의 '상대적 비중' 계산

'흰 공 2개'라는 결과가 나올 각 경로의 최종적인 상대적 비중은 위 두 비율을 곱해주면 됩니다.

- 경로 1 (A경유)의 상대적 비중
  (선택 비율) × (성공 비율) $=1\times1=1$
- 경로 2 (B경유)의 상대적 비중
  (선택 비율) × (성공 비율) $=2\times3=6$

즉, '흰 공 2개'라는 사건은 A주머니를 통해서 일어날 가능성과 B주머니를 통해서 일어날 가능성의 비율이 $1:6$이라는 의미이다.

따라서 확률은 $\frac{1}{7}$이다.

03 2022학년도 수능 30번 정답률 3%

30. 흰 공과 검은 공이 각각 10개 이상 들어 있는 바구니와 비어 있는 주머니가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 5 이상이면
> 바구니에 있는 흰 공 2개를 주머니에 넣고,
> 나온 눈의 수가 4 이하이면
> 바구니에 있는 검은 공 1개를 주머니에 넣는다.

위의 시행을 5번 반복할 때, $n(1 \le n \le 5)$번째 시행 후 주머니에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 a_n, b_n이라 하자. $a_5+b_5 \ge 7$일 때, $a_k=b_k$인 자연수 $k(1 \le k \le 5)$가 존재할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정 답 191

해 설

STEP1 확률을 가중치로 접근하기

모든 확률 문제는 결국 '상대적인 가능성'의 비율을 구하는 것이다.

- 사건 W: 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 5 이상
- 사건 B: 주사위를 한 번 던져 나온 수가 4 이하

따라서 두 사건의 확률 비는 1:2이다.
여기서 우리는 분수 계산 대신, 각 사건에 정수 가중치를 부여할 것이다. 두 사건의 확률 비율이 1:2이므로, 사건 W에 가중치 1점, 사건 B에 가중치 2점을 부여한다.

STEP2 전체 가중치의 합

매 시행의 가중치는 $1+2=3$이다.
5번의 독립 시행을 하므로 총 가중치의 합은 $3^5=243$이다.

STEP3 조건 분석하기

- 분모 조건 $(a_5+b_5 \ge 7)$

  전부 사건 B만 일어난다고 하면 주머니에 있는 공은 5개이다. 따라서 5번의 시행 중 사건 W가 최소 2번 일어나야 한다. 전체 가중치 합에서 여사건을 빼자.

  1. W가 0번 일어나는 경우 (BBBBB):
  1가지×가중치 $2^5=32$
  2. W가 1번 일어나는 경우 (WBBBB):
  ${}_5C_1$×가중치 1×가중치 $2^4=80$

  따라서 분모의 가중치 합: $243-112=131$이다.

- 분자 조건 $(a_k=b_k$인 k 존재)

  k번째까지 W가 x번 B가 y번 일어났다고 하자.
  이때 $2x=y$를 만족해야 하고 $x+y=k$도 만족해야 한다.
  두 식을 연립하면 $3x=k$이고, x는 정수이므로 $k=3$이며, $x=1$이다. 즉, 3번의 시행 중 W가 1번 일어나는 사건을 본질적으로 의미하는 것을 알 수 있다.

  1. W가 1번 일어나는 경우 (WBB):
  ${}_3C_1$×가중치 1×가중치 $2^2=12$
  2. 다음 2회에 대한 가중치
  우선 $a_5+b_5 \ge 7$를 만족해야하므로 W가 1번 앞에서 일어났으므로 뒷 부분에서도 적어도 W가 1번 있어야 한다.
  여사건으로 접근하면 뒷부분 전체 가중치는 $(1+2)^2$이고, 여기서 BB는 $2^2=4$이므로 $9-4=5$가 뒷부분 가중치이다.

  따라서 분자의 가중치 합: $12\times5=60$이다.

STEP4 최종 결론

조건부 확률은 결국 우리가 계산한 가중치들의 비율이므로

$$\text{확률}=\frac{\text{분자 가중치 합}}{\text{분모 가중치 합}}=\frac{60}{131}$$ 에서 $p+q=191$이다.

04 2023학년도 6월 30번 정답률 6%

30. 주머니에 1부터 12까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 12개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 작은 수부터 크기 순서대로 a, b, c라 하자. $b-a \geq 5$일 때, $c-a \geq 10$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정 답 9

해 설

STEP1 문제 구조 분석

문제는 $P(c-a \geq 10 \mid b-a \geq 5)$를 구하는 것이다.
조건부 확률의 정의에 따라
$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$를 만족하므로
$n(A)$와 $n(A\cap B)$만 구하면 된다!

STEP2 $n(A)$ 계산

$b-a \geq 5$를 $b-a=k$로 둬보자. (그러면 $k \geq 5$이다.)
순서쌍은 $(a, a+k, c)$ 꼴이 되고,
$a<a+k<c \leqq 12$를 만족해야 한다.

• $k=5$: $a+5<c \leqq 12$
a는 1부터 6까지 가능하고, 경우의 수는
$\sum_{a=1}^{6}(12-(a+5))=\sum_{a=1}^{6}(7-a)=21$이다.

• $k=6$: $a+6<c \leqq 12$
a는 1부터 5까지 가능하고, 경우의 수는 15이다.

이런식으로 $k=5$부터 $k=10$까지 쭉 진행하면
$n(A)=21+15+10+6+3+1=56$이다.

STEP3 $n(A\cap B)$ 계산

같은 방식으로 $b-a=k$, $c-a=m$ (단, $m \geq 10$)으로 치환한다. 순서쌍은 $(a, a+k, a+m)$꼴이 되며
$a<a+k<a+m \leqq 12$여야 한다.
즉, $k<m$이고 $a+m<12$다.

• $a=1$: $m \leqq 11$이면 m은 10 또는 11이다.
$m=10$: $5 \leqq k<10$이므로 k는 5개다.
$m=11$: $5 \leqq k<11$이므로 k는 6개다.
$a=1$일 때: $5+6=11$이다.

• $a=2$: $m \leqq 10$이면 $m=10$이다.
$m=10$: $5 \leqq k<10$이므로 k는 5개다.

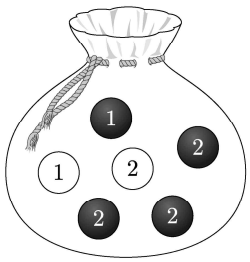
따라서 $n(A\cap B)=11+5=16$이다.

$P(B|A)=\frac{2}{7}$이므로 $p+q=9$이다.

05 2023학년도 수능 26번 정답률 52%

26. 주머니에 1이 적힌 흰 공 1개, 2가 적힌 흰 공 1개, 1이 적힌 검은 공 1개, 2가 적힌 검은 공 3개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 3개의 공 중에서 흰 공이 1개이고 검은 공이 2개인 사건을 A, 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수를 모두 곱한 값이 8인 사건을 B라 할 때, $\mathrm{P}(A \cup B)$의 값은? [3점]

① $\frac{11}{20}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{13}{20}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{3}{4}$



정 답 ③

해 설

STEP1 전체 경우의 수

6개의 공 중에서 3개를 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_6C_3 = 20$가지이다.

STEP2 사건 A의 확률

사건 A는 '흰 공 1개, 검은 공 2개'를 뽑는 경우이다.

- 흰 공 2개 중 1개를 뽑는 경우: ${}_2C_1 = 2$가지
- 검은 공 4개 중 2개를 뽑는 경우: ${}_4C_2 = 6$가지
- 사건 A의 경우의 수: $2 \times 6 = 12$가지

따라서 $P(A) = \frac{12}{20}$이다.

STEP3 사건 B의 확률

사건 B는 '꺼낸 공에 적힌 수의 곱이 8'인 경우이다.

- 세 수의 곱이 8이 되는 조합은 $(2, 2, 2)$ 밖에 없다.
- 숫자 2가 적힌 공은 흰 공 1개, 검은 공 3개로 총 4개가 있다. 이 4개의 공 중에서 3개를 뽑는 경우의 수이므로 사건 B의 경우의 수는 ${}_4C_3 = 4$가지이다.

따라서 $P(B) = \frac{4}{20}$이다.

STEP4 교사건의 확률

교사건 '흰 공 1개, 검은 공 2개를 뽑았는데, 동시에 세 수의 곱이 8'인 경우이다.

- 세 수의 곱이 8이 되는 조합은 $(2, 2, 2)$ 밖에 없다.
- 숫자 2가 적힌 공은 흰 공 1개, 검은 공 3개이고, 검은 공에서 2개를 뽑는 경우의 수는 ${}_3C_2 = 3$가지이다.

따라서 $P(A \cap B) = \frac{3}{20}$이다.

최종적으로 계산하면

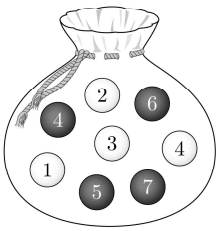
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{13}{20}$이다.

06 2024학년도 6월 30번 정답률 14%

30. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어
> 꺼낸 공이 서로 다른 색이면 12를 점수로 얻고,
> 꺼낸 공이 서로 같은 색이면 꺼낸 두 공에 적힌 수의 곱을 점수로 얻는다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 24 이하의 짝수일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



정 답 51

해 설

STEP1 전체 경우의 수

8개의 공 중에서 2개를 동시에 꺼내므로,
${}_8C_2 = 28$가지이다.

STEP2 케이스 분류하기

1. 서로 다른 색의 공을 뽑았을 때 (흰 공 1개, 검은 공 1개)
- 점수: 규칙에 따라 점수는 무조건 12점입니다.
- 조건 확인: 12는 '24 이하의 짝수'라는 조건을 만족합니다.
- 따라서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 뽑는 모든 경우가 해당되므로 ${}_4C_1 \times {}_4C_1 = 16$가지이다.

2. 둘 다 흰 공일 때 (흰 공 2개)
흰 공 1, 2, 3, 4 중에서 2개를 뽑아 곱이 '24 이하 짝수'가 되려면 하나만 짝수면 충분하다.
$(2,1)$ = 곱 2
$(2,3)$ = 곱 6
$(2,4)$ = 곱 8
$(4,1)$ = 곱 4
$(4,3)$ = 곱 12
따라서 총 5가지이다.

3. 둘 다 검은 공일 때 (검은 공 2개)
검은 공 4, 5, 6, 7 중에서 2개를 뽑아 곱이 '24 이하 짝수'가 되려면 $(4,5)$, $(4,6)$의 조합 2가지만 가능하다.

따라서 확률은 $\frac{23}{28}$이므로 $p+q=51$이다.

07 2025학년도 수능 26번 정답률 36%

29. 40개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 각각의 공은 흰 공 또는 검은 공 중 하나이다.
이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 흰 공 2개를 꺼낼 확률을 p, 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼낼 확률을 q, 검은 공 2개를 꺼낼 확률을 r이라 하자.
$p=q$일 때, $60r$의 값을 구하시오. (단, $p>0$) [4점]

정 답 6

해 설

STEP1 문제의 변수화 및 공식화
주머니 속 흰 공의 개수: w
주머니 속 검은 공의 개수: b
기본 조건: $w+b=40$

STEP2 조건 분석
• $p=n(2W)={}_wC_2=\frac{w(w-1)}{2}$이다.
• $q=w\times b$이다.
따라서 $\frac{w(w-1)}{2}=wb$를 통해 $w=2b+1$이다.
위의 기본 조건과 연결하면 $w=27,\ b=13$이다.
(흰 공) (검은공)

STEP3 답 구하기
$r=\frac{{}_bC_2}{{}_{40}C_2}=\frac{78}{780}=\frac{1}{10}$이므로 답은 6이다.

08 2025학년도 수능 26번 정답률 70%

26. 어느 학급의 학생 16명을 대상으로 과목 A와 과목 B에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 과목 A와 과목 B 중 하나를 선택하였고, 과목 A를 선택한 학생은 9명, 과목 B를 선택한 학생은 7명이다. 이 조사에 참여한 학생 16명 중에서 임의로 3명을 선택할 때, 선택한 3명의 학생 중에서 적어도 한 명이 과목 B를 선택한 학생일 확률은? [3점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{17}{20}$ ④ $\frac{9}{10}$ ⑤ $\frac{19}{20}$

정 답 ③

해 설

STEP1 전체 경우의 수
총 16명의 학생 중에서 3명을 선택하는 경우의 수는 ${}_{16}C_3=560$가지이다.

STEP2 여사건의 경우의 수
• 원래 사건: 선택한 3명의 학생 중에서 적어도 한 명이 과목 B를 선택한 학생
• 여사건: 선택한 3명의 학생은 모두 과목 A를 선택했다.
9명 중에서 3명을 뽑는 경우이므로 ${}_9C_3=84$가지이다.

확률은 $1-\frac{84}{500}=\frac{17}{20}$이다.

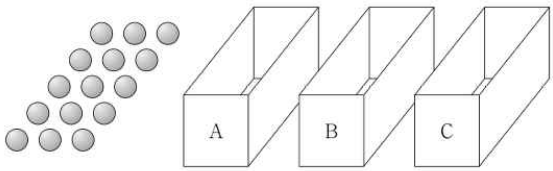
09 2026학년도 6월 28번 정답률 59%

28. 공 15개와 비어 있는 세 상자 A, B, C가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 세 상자 A, B, C에 공을 넣는 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 3의 배수이면
> 세 상자 A, B, C에 넣는 공의 개수가 각각 1, 2, 0이고,
> 나온 눈의 수가 3의 배수가 아니면
> 세 상자 A, B, C에 넣는 공의 개수가 각각 1, 1, 1이다.

이 시행을 5번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 홀수일 때, 상자 A에 들어 있는 공의 개수와 상자 C에 들어 있는 공의 개수의 합이 8 이상일 확률은? [4점]

① $\frac{44}{61}$ ② $\frac{47}{61}$ ③ $\frac{50}{61}$ ④ $\frac{53}{61}$ ⑤ $\frac{56}{61}$



정 답 ⑤

해 설

이 문항처럼 복잡해 보이는 반복 시행에서의 확률 문제도 구조를 잘 분석하면 생각보다 훨씬 쉬운 문항이라는 것을 알 수 있다.

STEP1 시행을 분석하여 문제에서 물어본 경우를 구조화하기

시행을 잘 살펴보면, 한 시행 당 세 상자에 총합 3개의 공이 들어가는 것을 알 수 있다.

이렇게 5번의 시행을 통해 각 상자에 총 15개의 공을 분배하는데, 두 가지의 시행이 있으므로 눈의 수가 3의 배수가 나온 횟수를 X, 3의 배수가 아닌 횟수를 Y라고 하자.

$X+Y=5$이다.

각 상자별로 살펴보면, A는 X, Y에 상관없이 어떻게 공을 넣더라도 최종적으로 5개의 공이 들어간다.

B는 총 $2X+Y$개의 공이 들어가고, C는 Y개의 공이 들어간다.

문제에서 묻는 경우는 B에 들어 있는 공이 홀수개일 때와 그 중에서 A에 들어 있는 공의 개수와 C에 들어 있는 공의 개수의 합이 8 이상인 경우이다.

STEP2 각 경우의 확률을 계산하여 조건부확률 구하기

B에 들어 있는 공이 홀수개이면 $2X+Y=5+X$가 홀수이다.

따라서, $X=0, 2, 4$인 경우가 가능하다.

전체 확률은

$(\frac{1}{3})^0(\frac{2}{3})^5+{}_5C_2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^3+{}_5C_4(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})^1=\frac{122}{243}$이다.

B에 들어 있는 공이 홀수개이면서 A에 들어 있는 공의 개수와 C에 들어 있는 공의 개수의 합이 8 이상이려면, C에 들어있는 공의 개수가 3이상이다.

따라서, $Y\geq 3$이므로 $X=0, 2$인 경우가 가능하다.

이 때 확률은 $(\frac{1}{3})^0(\frac{2}{3})^5+{}_5C_2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^3=\frac{112}{243}$이다.

따라서, 조건부확률은 $\frac{112}{122}=\frac{56}{61}$이다.

10 2026학년도 9월 25번 정답률 88%

25. 1학년 학생 1명, 2학년 학생 3명, 3학년 학생 4명이 있다. 이 8명의 학생 중 임의로 5명의 학생을 선택할 때, 선택된 2학년 학생 수와 선택된 3학년 학생 수가 서로 같을 확률은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{15}{56}$ ③ $\frac{2}{7}$ ④ $\frac{17}{56}$ ⑤ $\frac{9}{28}$

정 답 ⑤

해 설

총 5명을 선택할 때, 2학년 학생 수와 3학년 학생 수가 같은 경우는 1학년 1명, 2학년 2명, 3학년 2명을 뽑는 경우 뿐이다.
전체 경우의 수는 ${}_8C_5$가지이고, 조건을 만족하는 경우의 수는 ${}_1C_1 \times {}_3C_2 \times {}_4C_2$가지이다.

따라서, 답은 $\frac{{}_1C_1 \times {}_3C_2 \times {}_4C_2}{{}_8C_5} = \frac{9}{28}$이다.

11 2026년 수능 25번 정답률 57%

25. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 흰 공 5개와 숫자 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 검은 공 5개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색이거나 꺼낸 2개의 공에 적힌 수가 서로 같을 확률은? [3점]

① $\frac{7}{15}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{11}{15}$



정 답 ②

해 설

문항에서 구하려는 조건을 살펴보자.
주머니에서 총 2개의 공을 꺼낼 때, 색이 서로 같거나 적힌 수가 같을 확률이다.
두 공의 색이 같으면서 숫자도 같을 수는 없으므로 각각의 확률을 구해서 더하자.
1) 두 공의 색이 같을 확률
전체 경우의 수는 10개 중 2개의 공을 꺼내는 경우의 수이므로 ${}_{10}C_2 = 45$가지이다.
두 공의 색이 같은 경우의 수는 두 공이 모두 흰색이거나 검은색인 경우이고, 각각 5개 중 2개를 고르는 경우의 수이다.
따라서, $2 \times {}_5C_2 = 20$가지이다.

확률은 $\frac{20}{45}$이다.

2) 두 공의 숫자가 같을 확률
전체 경우의 수는 위와 마찬가지로 45가지이다.
두 공의 숫자가 같은 경우의 수는 두 숫자가 각각 $2, 3, 4, 5$인 경우로 총 4가지이다.

따라서, 확률은 $\frac{4}{45}$이다.

총 확률은 $\frac{20}{45} + \frac{4}{45} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$이다.

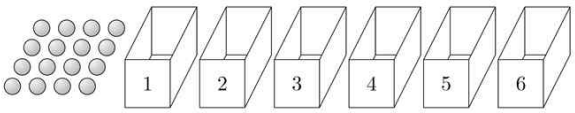
12 2026년 수능 28번 정답률 23%

28. 16개의 공과 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 여섯 개의 빈 상자가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k일 때,
> k가 홀수이면
> 1, 3, 5가 적힌 상자에 공을 각각 1개씩 넣고,
> k가 짝수이면
> k의 약수가 적힌 상자에 공을 각각 1개씩 넣는다.

이 시행을 4번 반복한 후 여섯 개의 상자에 들어 있는 모든 공의 개수의 합이 홀수일 때, 3이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 2가 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수보다 1개 더 많을 확률은? [4점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{3}{8}$



정 답 ②

해 설

난이도가 매우 높은 편이지만 주사위를 던져서 나온 수에 따라 서로 다른 시행을 하는 전형적인 문항으로, 각 경우에 어떤 결과가 나타나는지 정리한 뒤에 문제에서 물어본 상황을 분석하여 확률을 구하자.

STEP1 제시된 시행을 분석하여 정리하기

주사위를 던져서 나온 눈의 수가 1, 3, 5 중 하나인 경우에는 1, 3, 5가 적힌 상자에 공이 1개씩 추가된다.

주사위를 던져서 나온 눈의 수가 2인 경우에는 1, 2가 적힌 상자에, 나온 눈의 수가 4인 경우에는 1, 2, 4가 적힌 상자에, 나온 눈의 수가 6인 경우에는 1, 2, 3, 6이 적힌 상자에 공이 1개씩 추가된다.

따라서, 나온 눈의 수가 2, 6인 경우에는 짝수개의 공이 추가되고, 이외에는 홀수개의 공이 추가된다.

STEP2 문제에서 물어보는 상황이 나오는 경우를 찾기

문제에서 제시된 조건부 확률에서 전체 사건은 시행을 4번 반복한 후 상자에 들어 있는 공의 개수 합이 홀수인 경우이다.

공의 개수 합이 홀수이려면 1, 3, 4, 5가 총 1번 또는 3번 나와야 한다.

따라서, 전체 확률은 ${}_4C_1(\frac{2}{3})^1(\frac{1}{3})^3+{}_4C_3(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{3})^1=\frac{40}{81}$이다.

이 중에서 3이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 2가 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수보다 1개 더 많을 확률을 구하자.

1) 1, 3, 4, 5가 총 1번 나온 경우

이 경우 2, 6이 총 3번 나오므로 이미 2가 적힌 상자에 공이 3개가 들어간다.

- 4가 나오면, 2가 적힌 상자에는 총 4개의 공이 들어가므로 3이 적힌 상자에 공이 5개가 들어갈 수 없어 불가능하다.
- 4는 나오지 않으므로 2가 적힌 상자에 공이 3개 들어간다. 3이 적힌 상자에는 공이 4개가 들어가므로 6이 3번, 1, 3, 5 중 하나가 1번 나와야 한다.

이 때의 확률은 ${}_4C_1(\frac{1}{6})^3(\frac{1}{2})=\frac{1}{108}$이다.

2) 1, 3, 4, 5가 총 3번 나온 경우

이 경우 2, 6이 총 1번 나오므로 이미 2가 적힌 상자에 공이 1개가 들어간다.

- 4가 안나오는 경우, 2가 적힌 상자에는 공이 1개가 들어가고, 3이 적힌 상자에는 공이 2개가 들어가므로 불가능하다.
- 4가 1번 나오는 경우, 2가 적힌 상자에는 공이 2개가 들어가고, 3이 적힌 상자에는 공이 3개가 들어가므로 4, 6이 1번씩, 1, 3, 5가 총 2번 나온다.
- 4가 2번 나오는 경우, 2가 적힌 상자에는 공이 3개가 들어가고, 3이 적힌 상자에는 공이 4개가 들어가므로 불가능하다.
- 마찬가지로 4가 3번 나오는 경우도 불가능하다.

따라서, 이 때의 확률은 ${}_4C_2\times{}_2C_1(\frac{1}{6})^2(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{12}$이다.

분자에 해당하는 확률은 $\frac{1}{108}+\frac{1}{12}=\frac{10}{108}$이고, 분모에 해당하는 확률은 $\frac{40}{81}$이다.

따라서, 정답은 $\frac{3}{16}$이다.

13 2026학년도 수능 30번 정답률 13%

30. 비어 있는 주머니 10개가 일렬로 놓여 있고, 공 8개가 있다. 각 주머니에 들어 있는 공의 개수가 2 이하가 되도록 공을 주머니에 남김없이 나누어 넣을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

> (가) 들어 있는 공의 개수가 1인 주머니는 4개 또는 6개이다.
> (나) 들어 있는 공의 개수가 2인 주머니와 이웃한 주머니에는 공이 들어 있지 않다.

정 답 262

해 설

조건이 2가지인 경우의 수 문항으로, (가) 조건을 이용해 경우를 나눈 뒤 (나) 조건으로 구체화시키는 방향으로 풀이하자.

STEP1 (가) 조건을 이용해 케이스 나누기

들어 있는 공의 개수가 1인 주머니가 4개일 때와 6개일 때로 나누어 경우의 수를 세자.

1) 들어 있는 공의 개수가 1인 주머니가 4개일 때

이 경우 나머지 들어 있는 공의 개수가 2인 주머니가 2개다.

따라서, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0의 10개의 숫자를 배열하는 방법의 수를 세는 것과 같다.

2) 들어 있는 공의 개수가 1인 주머니가 6개일 때

이 경우 나머지 들어 있는 공의 개수가 2인 주머니가 1개다.

따라서, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0의 10개의 숫자를 배열하는 방법의 수를 세는 것과 같다.

STEP2 (나) 조건을 활용하여 경우의 수 세기

1) 2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0을 배열하는 경우의 수

일단 0, 0, 0, 0을 먼저 배열하고 양 끝과 중간에 2를 끼워 넣자.

끼워넣을 수 있는 자리는 5개이고, 한 자리에는 하나의 2만 들어가므로 끼워넣는 방법의 수는 ${}_5C_2$가지이다.

남아있는 3개의 자리에 1이 들어갈 수 있고, 중복해서 들어갈 수 있으므로 중복조합을 활용하자.

경우의 수는 ${}_3H_4$가지이다.

2) 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0을 배열하는 경우의 수

마찬가지로 0을 먼저 배열하고 2를 끼워넣자.

끼워넣을 수 있는 자리는 4개이므로 2를 넣는 방법은 4가지이다.

남은 3개의 자리에 1을 넣을 수 있으므로 중복조합을 활용하면 경우의 수는 ${}_3H_6$가지이다.

따라서, ${}_5C_2\times{}_3H_4+4\times{}_3H_6=262$가지이다.

유형 09 물건 나눠주기

01 2022학년도 6월 26번 정답률 50%

26. 빨간색 카드 4장, 파란색 카드 2장, 노란색 카드 1장이 있다. 이 7장의 카드를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생이 있도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 같은 색 카드끼리는 서로 구별하지 않고, 카드를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 78 ② 84 ③ 90 ④ 96 ⑤ 102

정 답 ③

해 설

STEP1 '특별한 학생' 1명 선택하기

세 가지 색의 카드를 모두 받을 학생 1명을 3명 중에서 선택하자. 그러면 경우의 수는 3가지이다.

STEP2 필수 카드 먼저 분배하기

선택된 학생 'A'에게 빨간색 1장, 파란색 1장, 노란색 1장을 줍니다. 이제 남은 카드는 빨간색 3장, 파란색 1장이다.

STEP3 남은 카드 분배하기 (중복 조합 활용)

남은 카드들을 3명의 학생(A, B, C)에게 자유롭게(못 받는 학생이 있어도 됨) 나누어 준다.

빨간색과 파란색은 독립적으로 분배할 수 있으므로 각각의 경우의 수를 구해 곱하면 된다.

- 빨간색 3장 분배:
  3명의 학생에게 똑같은 빨간색 카드 3장을 나누어주는 중복 조합 문제이다. ${}_3\mathrm{H}_3 = {}_5\mathrm{C}_2 = 10$가지
- 파란색 1장 분배:
  3명의 학생에게 똑같은 파란색 카드 1장을 나누어주는 경우의 수이다. ${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$가지

따라서 남은 카드를 분배하는 경우의 수는 30가지이다.

최종 경우의 수는 $3 \times 30 = 90$가지이다.

02 2022학년도 9월 30번 정답률 9%

30. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사인펜 14개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 각 학생은 1개 이상의 사인펜을 받는다.
(나) 각 학생이 받는 사인펜의 개수는 9 이하이다.
(다) 적어도 한 학생은 짝수 개의 사인펜을 받는다.

정 답 218

해 설

STEP1 전체 경우의 수 구하기

• 조건 (가)를 적용하면 4명에게 1개 이상씩 주어야 하므로, 먼저 1개씩 나누어준다. 그러면 남은 사인펜은 $14-4=10$개이고, 남은 10개의 펜을 4명에게 자유롭게 나누어 주는 중복 조합이다. ${}_4H_{10}={}_{13}C_3=286$가지

• 조건 (나)의 여사건 제외
위 286가지 중, 한 학생이 9개를 초과하여 받는 경우 (즉, 10개 이상 받는 경우)를 제외하자.
어떤 학생(A)이 10개 이상 받는다고 가정하자.
(가) 조건에 따라 A는 이미 1개를 받았으므로 9개를 추가로 더 준다. 남은 펜은 1개이고, 4명 중 한 명에게 주면 된다. (4가지).
10개 이상 받을 학생을 고르는 경우의 수는 4명(A, B, C, D)이므로, 총 제외할 경우의 수는 $4\times4=16$가지이다.
(두 명 이상이 10개를 받는 것은 불가능)

따라서 (가), (나)를 모두 만족하는 경우의 수
$286-16=270$가지이다.

STEP2 (가), (나)를 만족하며 '모두 홀수 개'를 받는 경우 (다) 조건의 여사건, 즉 모든 학생이 홀수 개의 펜을 받는 경우의 수를 구해보자.

1. 조건 (가)+'모두 홀수'
$(2a'+1)+(2b'+1)+(2c'+1)+(2d'+1)=14$를 정리하면
$a'+b'+c'+d'=5$를 만족하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_5={}_8\mathrm{C}_3=56$가지이다.

2. 조건 (나)의 여사건 제외
위 56가지 중, 한 학생이 9개를 초과하는 홀수 (즉, 11개 이상)를 받는 경우를 제외하자.
한 학생이 11개를 받으면, 나머지 세 학생은 총 3개를 받아야 한다. 모두 홀수 개를 받아야 하므로, 세 학생은 각각 1개씩 받는 경우밖에 없다. $(11,1,1,1)$
11개를 받을 학생을 고르는 경우의 수는 4명이므로,
제외할 경우는 총 4가지이다.
따라서 (가), (나)를 만족하며 모두 홀수 개를 받는 경우는
$56-4=52$가지이다.

따라서 총 경우의 수는 $270-52=218$이다.

03 2025학년도 9월 30번 정답률 7%

30. 흰 공 4개와 검은 공 4개를 세 명의 학생 A, B, C에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

> (가) 학생 A가 받는 공의 개수는 0 이상 2 이하이다.
> (나) 학생 B가 받는 공의 개수는 2 이상이다.

정 답 93

해 설

CASE 1. 학생 A가 공을 0개 받는 경우
남은 공은 흰 공 4개와 검은 공 4개를 B, C에게 분배하면 된다.

• B, C에게 나눠주는 전체 경우의 수
(1) 흰 공 분배: ${}_2H_4 = {}_5C_4 = 5$가지
(2) 검은 공 분배: ${}_2H_4 = {}_5C_4 = 5$가지
따라서 총 25가지이다.

• B가 2개 미만으로 받는 경우 (여사건)
B가 0개: 1가지
B가 1개: 2가지
따라서 총 3가지이므로 전체 경우의 수는 22가지이다.

CASE 2. 학생 A가 공 1개를 받는 경우
• A가 흰 공 1개: 남은 공 흰 공 3개, 검은 공 4개
(1) B, C에게 분배 (전체): ${}_2H_3 \times {}_2H_4 = 20$가지
(2) 여사건 (B가 0 또는 1개): 3가지
따라서 $20-3=17$가지이다.

• A가 검은 공 1개: 남은 공 흰 공 4개, 검은 공 3개
(1) B, C에게 분배 (전체): ${}_2H_4 \times {}_2H_3 = 20$가지
(2) 여사건 (B가 0 또는 1개): 3가지
따라서 $20-3=17$가지이다. 전체 경우의 수는 34가지이다.

CASE 3. 학생 A가 공을 2개 받는 경우
• A가 흰 공 2개: 남은 공 흰 공 2개, 검은 공 4개
분배: ${}_2H_2 \times {}_2H_4 = 15$에서 여사건 3개 제외하면 12가지.

• A가 흰, 검은 공 1개: 남은 공 흰 공 3개, 검은 공 3개
분배: ${}_2H_3 \times {}_2H_3 = 16$에서 여사건 3개 제외하면 13가지.

• A가 검은 공 2개: 남은 공 흰 공 4개, 검은 공 2개
분배: ${}_2H_4 \times {}_2H_2 = 15$에서 여사건 3개 제외하면 12가지.
전체 경우의 수는 37가지이다.

모든 케이스는 서로 배반사건이므로 전부 더하면 93이다.

유형 10 주사위 굴리기

01 2022학년도 6월 27번 정답률 42%

27. 주사위 2개와 동전 4개를 동시에 던질 때, 나오는 주사위의 눈의 수의 곱과 앞면이 나오는 동전의 개수가 같을 확률은? [3점]

① $\frac{3}{64}$ ② $\frac{5}{96}$ ③ $\frac{11}{192}$ ④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{13}{192}$

정 답 ①

해 설

STEP1 전체 경우의 수

주사위 2개: 36가지, 동전 4개: $2^4=16$가지이므로
전체 경우의 수는 $36\times16=576$가지 입니다.

STEP2 경우의 수

앞면이 나오는 동전의 개수는 최대 4개다.
즉, 주사위 눈의 곱이 1, 2, 3, 4가 되는 경우만 생각하자.

CASE 1. 주사위 눈의 곱이 1
- 주사위 곱이 1: $(1,1)$ → 1가지
- 동전 앞면이 1개: ${}_4C_1=4$가지
- 경우의 수: $1\times4=4$가지

CASE 2. 주사위 눈의 곱이 2
- 주사위 곱이 2: $(1,2)$, $(2,1)$ → 2가지
- 동전 앞면이 2개: ${}_4C_2=6$가지
- 경우의 수: $2\times6=12$가지

CASE 3. 주사위 눈의 곱이 3
- 주사위 곱이 3: $(1,3)$, $(3,1)$ → 2가지
- 동전 앞면이 3개: ${}_4C_3=4$가지
- 경우의 수: $2\times4=8$가지

CASE 4. 주사위 눈의 곱이 4
- 주사위 곱이 4: $(1,4)$, $(4,1)$, $(2,2)$ → 3가지
- 동면 앞면이 4개: 1가지
- 경우의 수: $3\times1=3$가지

최종적으로 확률을 계산하면 $\frac{27}{576}=\frac{3}{64}$이다.

02 2022학년도 6월 28번 정답률 43%

28. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이하이면 나온 눈의 수를 점수로 얻고, 나온 눈의 수가 4 이상이면 0점을 얻는다. 이 주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 할 때, 얻은 네 점수의 합이 4가 되는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [4점]

① 187 ② 190 ③ 193 ④ 196 ⑤ 199

정 답 ③

해 설

이 문제는 주사위를 네 번 던져 각 던짐에서 얻는 점수의 합이 4가 되는 경우의 수를 구하는 것이다.
주사위 눈이 1, 2, 3이면 그 눈만큼 점수를 얻고, 4, 5, 6이면 0점을 얻는다. 각 던짐의 눈을 a, b, c, d라고 할 때, 가능한 (a, b, c, d)의 개수를 세어야 한다.

먼저, 각 던짐에서 가능한 점수와 그 경우의 수를 정리하자.

- 점수 0: 눈 4, 5, 6 → 3가지
- 점수 1: 눈 1 → 1가지
- 점수 2: 눈 2 → 1가지
- 점수 3: 눈 3 → 1가지

네 점수 $s_1+s_2+s_3+s_4=4$가 되며, 각 s_i는 $0, 1, 2, 3$ 중 하나이다.

CASE 1. 점수 구성이 $(1, 1, 1, 1)$인 경우

- 순열개수: 모든 위치가 동일하므로 1가지 $\left(\frac{4!}{4!}=1\right)$
- 각 위치의 경우의 수 : $1\times1\times1\times1=1$
- 총: $1\times1=1$이다.

CASE 2. 점수 구성이 $(3, 1, 0, 0)$인 경우

- 순열개수: $\frac{4!}{2!\,1!1!}=12$
- 각 위치의 경우의 수 : $1\times1\times3\times3=9$
  (3용 1용 0용 0용)
- 총: $12\times9=108$이다.

CASE 3. 점수 구성이 $(2, 2, 0, 0)$인 경우

- 순열개수: $\frac{4!}{2!\,2!}=6$
- 각 위치의 경우의 수 : $1\times1\times3\times3=9$
- 총: $6\times9=54$이다.

CASE 4. 점수 구성이 $(2, 1, 1, 0)$인 경우

- 순열개수: $\frac{4!}{2!\,1!\,1!}=12$
- 각 위치의 경우의 수 : $1\times1\times1\times3=3$
- 총: $12\times3=36$이다.

모든 경우를 합산하면 $1+108+54+36=199$이다.

03 2023학년도 6월 25번 정답률 63%

25. 수직선의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가
> 6의 약수이면 점 P를 양의 방향으로 1만큼 이동시키고,
> 6의 약수가 아니면 점 P를 이동시키지 않는다.

이 시행을 4번 반복할 때, 4번째 시행 후 점 P의 좌표가 2 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{13}{18}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{17}{18}$

정 답 ④

해 설

우선 6의 약수일 확률은 $\frac{2}{3}$이고, 아닐 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

4번째 시행 후 점 P의 좌표가 2이상일 확률은 여사건으로 접근하면 빠르다.

CASE 1. 모두 6의 배수가 아닐 경우

${}_4C_0\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$이다.

CASE 2. 한 판만 6의 배수일 경우

${}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$

따라서 $1-\frac{9}{81}=\frac{8}{9}$이다.

04 2024학년도 6월 27번 정답률 55%

27. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. $a \times b$가 4의 배수일 때, $a+b \leq 7$일 확률은? [3점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{8}{15}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

정 답 ②

해 설

STEP1 전체 경우의 수

$a \times b$가 4의 배수이면 적어도 2가 2개 있거나, 4가 1개있다.

CASE 1. 첫 번째 주사위가 홀수인 경우

두 번 째 주사위는 무조건 4가 나와야 하므로 조합은

$(1,4)$, $(3,4)$, $(5,4)$ 총 3개다.

CASE 2. 첫 번째 주사위에 2가 1개 들어있는 경우

$(2,2)$, $(2,4)$, $(2,6)$

$(6,2)$, $(6,4)$, $(6,6)$

CASE 3. 첫 번째 주사위에 4가 1개 들어있는 경우

$(4,1)$, $(4,2)$, $(4,3)$, $(4,4)$, $(4,5)$, $(4,6)$

다 더하면 총 15가지의 경우의 수가 있다.

STEP2 경우의 수

여기서 합이 $a+b \leq 7$을 만족하는 경우의 수를 찾아보자.

$(1,4)$, $(3,4)$, $(2,2)$, $(2,4)$, $(4,1)$, $(4,2)$, $(4,3)$

다 더하면 총 7가지의 경우의 수가 있다.

확률은 $\frac{7}{15}$이다.

05 2026학년도 6월 29번 정답률 33%

29. 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 할 때, $a+b=8$ 또는 $b \geq c$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정 답 44

해 설

두 가지 조건에 대한 합집합에 해당하는 확률을 구하면 된다.

따라서, 전체 확률은

$P(a+b=8)+P(b \geq c)-P((a+b=8) \cap (b \geq c))$이다.

$a+b=8$인 경우는 $(a,b)=(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)$일 때이다.

따라서, 확률은 $\frac{5}{36}$이다.

$b \geq c$인 경우는 ${}_6H_2 = 21$가지이므로 확률은 $\frac{21}{36}$이다.

(중복조합이 익숙치 않은 학생은 순서쌍 나열을 통해 $6+5+\cdots+2+1$으로 계산하여도 된다.)

두 조건의 교집합은 $b \geq c$의 각 경우에서 $a+b=8$에 의해 a가 자동으로 결정된다.

따라서, $b \geq c$의 경우의 수인 21에서 $a+b=8$이 될 수 없는 $b=1, c=1$인 경우만 빼면 된다.

교집합의 확률은 $\frac{20}{216}$이다.

답은 $\frac{5}{36}+\frac{21}{36}-\frac{20}{216}=\frac{136}{216}=\frac{17}{27}$이다.

유형 11 카드나 동전 뒤집기

01 2023학년도 수능 29번 정답률 2%

29. 앞면에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있고 뒷면에는 모두 0이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드가 그림과 같이 6 이하의 자연수 k에 대하여 k번째 자리에 자연수 k가 보이도록 놓여 있다.



이 6장의 카드와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k이면 k번째 자리에 놓여 있는 카드를 한 번 뒤집어 제자리에 놓는다.

위의 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수일 때, 주사위의 1의 눈이 한 번만 나왔을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정 답 50

해 설

STEP1 문제의 본질 이해하기

이 문제의 가장 중요한 핵심은 '보이는 모든 수의 합이 짝수'라는 조건을 아주 간단한 형태로 바꾸는 것이다.

- 초기 상태: 카드의 합은 $1+2+3+4+5+6=21$로 홀수입니다.
- 시행의 효과: 주사위를 던져 k가 나오면 k번째 카드를 뒤집는다. 만약 k가 보이다가 0으로 바뀌면, 총합은 k만큼 감소한다. 만약 0이 보이다가 k로 바뀌면, 총합은 k만큼 증가한다.
- 핵심 원리: 어떤 숫자 k를 두 번 던지면 카드는 뒤집혔다가 다시 원상복구된다. 즉, 총합의 변화는 0이다. 세 번 던지면 한 번 던진 것과 효과가 같다. 따라서 총합의 변화에 영향을 주는 것은 3번의 주사위 시행에서 중복을 제거한 유니크한 숫자들 뿐이다.
- 최종 결론: 3번의 시행 후 최종 합은 [초기 합(21) - (중복을 제거한 눈의 수들의 합)] 이다. 최종 합이 짝수가 되려면, [홀수(21) - (중복 제거 합)] = 짝수 여야 합니다. 이는 (중복을 제거한 눈의 수들의 합)이 반드시 홀수여야 한다는 것과 동일한 의미입니다.

따라서 이 복잡한 문제는 다음과 같이 매우 간단하게 재정의 할 수 있다. "주사위를 3번 던져 나온 눈들 중, 중복된 것을 제외한 숫자들의 합이 홀수일 때, '1'의 눈이 한 번만 나왔을 확률은?"

STEP2 분모 계산하기

우선 전체 경우의 수는 $6^3=216$가지이다.

1. 세 수가 모두 다른 경우: $a+b+c$=홀수

- (홀, 홀, 홀): $\{1,3,5\}$ 세 개를 뽑아 나열하면 된다. ${}_3C_3\times 3!=6$가지이다.
- (홀, 짝, 짝): 홀수 1개, 짝수 2개를 뽑아 나열하면 된다. ${}_3C_1\times{}_3C_2\times 3\neq 54$가지

위의 경우를 전부 더하면 60가지이다.

2. 두 종류의 수가 나온 경우: $a+b$=홀수

- (홀, 홀, 짝): 홀수를 고를 경우는 3가지이고, 짝수를 고를 경우도 3가지이고, 자리를 고를 경우는 3가지이므로 전부 곱하면 27가지이다.
- (짝, 짝, 홀): 홀수를 고를 경우는 3가지이고, 짝수를 고를 경우도 3가지이고, 자리를 고를 경우는 3가지이므로 전부 곱하면 27가지이다.

위의 경우를 전부 더하면 54가지이다.

3. 한 종류의 수만 나온 경우

- $(1,1,1)$, $(3,3,3)$, $(5,5,5)$ 총 3가지이다.

따라서 분모의 총 경우의 수는 117가지이다.

STEP3 분자 계산하기

(중복 제거 합이 홀수) 이면서 (1이 한 번만 나옴)

1. 세 수가 모두 다른 경우$(1,b,c)$: $b+c$는 짝수이다.

- b, c가 모두 홀수: 3, 5를 뽑아 1, 3, 5를 나열해야하므로 $1\times 3!=6$가지이다.
- b, c가 모두 짝수: 2, 4, 6 중에서 2개를 뽑아 $(1,$짝, 짝$)$을 나열해야하므로 ${}_3C_2\times 3!=18$가지이다.

위의 경우를 전부 더하면 24가지이다.

2. 두 종류의 수가 나온 경우$(1,b,b)$: b는 짝수이다.

- b는 2, 4, 6 중 하나이므로 3가지 선택 가능하다.
- $(1,b,b)$를 나열하는 경우의 수는 각각 $\frac{3!}{2!}=3$가지이다.

  따라서 $3\times 3=9$가지이다.

위의 경우를 전부 더하면 33가지이다.

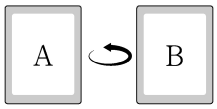
최종적으로 구하는 확률은 $\frac{33}{117}=\frac{11}{39}$이므로 $p+q=50$이다.

02 2024학년도 9월 29번 정답률 13%

29. 앞면에는 문자 A, 뒷면에는 문자 B가 적힌 한 장의 카드가 있다. 이 카드와 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

> 동전을 두 번 던져
> 앞면이 나온 횟수가 2이면 카드를 한 번 뒤집고,
> 앞면이 나온 횟수가 0 또는 1이면 카드를 그대로 둔다.

처음에 문자 A가 보이도록 카드가 놓여 있을 때, 이 시행을 5번 반복한 후 문자 B가 보이도록 카드가 놓일 확률은 p이다. $128\times p$의 값을 구하시오. [4점]



앞면 뒷면

정 답 62

해 설

STEP1 문제의 본질 이해하기

먼저 복잡한 '시행' 규칙을 단 하나의 확률 값으로 변환하자.

"성공 확률이 $\frac{1}{4}$인 독립시행을 5번 반복할 때, 성공(뒤집기)이 홀수 번 일어날 확률 p를 구하시오."

STEP2 계산하기

성공 확률을 p, 실패 확률을 q라고 할 때, 두 개의 이항정리 식을 생각해보자.

- $(q+p)^n : {}_nC_0q^np^0+{}_nC_1q^{n-1}p^1+{}_nC_2q^{n-2}p^2+\cdots$
- $(q-p)^n : {}_nC_0q^np^0-{}_nC_1q^{n-1}p^1+{}_nC_2q^{n-2}p^2-\cdots$

위의 두 식을 빼면

$(q+p)^n-(q-p)^n=2\left[{}_nC_1q^{n-1}p+{}_nC_3q^{n-3}p^3+\cdots\right]$

즉, 성공이 홀수 번일 확률은 $P_{odd}=\frac{(q+p)^n-(q-p)^n}{2}$이다.

$(q+p)^5=(\frac{3}{4}+\frac{1}{4})^5=1$, $(q-p)^5=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)^5=\frac{1}{2^5}$이다.

따라서 $P_{odd}=\frac{31}{64}$이고, $128\times p=62$이다.

03 2025학년도 6월 28번 정답률 18%

28. 탁자 위에 놓인 4개의 동전에 대하여 다음 시행을 한다.

> 4개의 동전 중 임의로 한 개의 동전을 택하여 한 번 뒤집는다.

처음에 3개의 동전은 앞면이 보이도록, 1개의 동전은 뒷면이 보이도록 놓여 있다. 위의 시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있을 때, 모두 앞면이 보이도록 놓여 있을 확률은? [4점]

① $\frac{17}{32}$ ② $\frac{35}{64}$ ③ $\frac{9}{16}$ ④ $\frac{37}{64}$ ⑤ $\frac{19}{32}$



앞면 앞면 앞면 뒷면

정 답 ①

해 설

STEP1 문제의 본질 이해하기

문제에서 구하라는 확률은

$$P(\text{HHHH}|\text{HHHH 또는 TTTT})=\frac{P(\text{HHHH})}{P(\text{HHHH})+P(\text{TTTT})}$$

즉, 최종 상태에 도달할 각각의 확률만 알면 된다.

또한 최종 상태는 직전 상태가 결정하므로
5번째 시행에서 HHHH가 되려면 반드시 4번째 시행 후의 상태가 HHHT여야만 한다.

따라서 구하는 확률$=\frac{P_4(\text{HHHT})}{P_4(\text{HHHT})+P_4(\text{HTTT})}$이다.

STEP2 문제 접근하기

1. $P_0(\text{HHHT})=1$ (처음)
2. $P_1(\text{HHHH})=P_0(\text{HHHT})\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

   $P_1(\text{HHTT})=P_0(\text{HHHT})\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$
3. $P_2(\text{HHHT})=P_1(\text{HHHH})\times 1+P_1(\text{HHTT})\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$

   $P_2(\text{HTTT})=P_1(\text{TTTT})\times 1+P_1(\text{HHTT})\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$
4. $P_3(\text{HHHH})=P_2(\text{HHHT})\times\frac{1}{4}=\frac{5}{32}$

   $P_3(\text{TTTT})=P_2(\text{HTTT})\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$

   $P_3(\text{HHTT})=(P_2(\text{HHHT})+P_2(\text{HTTT}))\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$
5. $P_4(\text{HHHT})=P_3(\text{HHHH})\times 1+P_3(\text{HHTT})\times\frac{1}{2}=\frac{17}{32}$

   $P_4(\text{HTTT})=P_3(\text{TTTT})\times 1+P_3(\text{HHTT})\times\frac{1}{2}=\frac{15}{32}$

따라서 4번째 시행 후, HHHT 상태와 HTTT 상태에 있을 확률의 비율은 17 : 15이다.

따라서 조건부 확률은 $\frac{\frac{17}{32}}{\frac{17}{32}+\frac{15}{32}}=\frac{17}{32}$이다.

04 2025학년도 수능 30번 정답률 20%

30. 탁자 위에 5개의 동전이 일렬로 놓여 있다. 이 5개의 동전 중 1번째 자리와 2번째 자리의 동전은 앞면이 보이도록 놓여 있고, 나머지 자리의 3개의 동전은 뒷면이 보이도록 놓여 있다.
이 5개의 동전과 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k일 때,
> $k \le 5$이면 k번째 자리의 동전을 한 번 뒤집어 제자리에 놓고,
> $k = 6$이면 모든 동전을 한 번씩 뒤집어 제자리에 놓는다.

위의 시행을 3번 반복한 후 이 5개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



정 답 19

해 설

CASE 1: '6'이 한 번도 안나올 때
(앞, 앞, 뒤, 뒤, 뒤)인 상황이고 3, 4, 5번 동전을 뒤집어야 한다. 뭐가 먼저 뒤집힐지 순서를 고려하면 경우의 수는

순서1. $k=3$, $k=4$, $k=5$
순서2. $k=3$, $k=5$, $k=4$ ...

를 고려하면 총 6가지이다.

CASE 2. '6'이 한 번 나올 때
(뒤, 뒤, 앞, 앞, 앞)인 상태이고, 시행은 2번 남았다.
따라서 1, 2번 동전을 각각 1번씩 뒤집어야 한다.

순서1. $k=6$, $k=1$, $k=2$
순서2. $k=6$, $k=2$, $k=1$ ...

를 고려하면 총 6가지이다.

나머지 경우는 안된다.

따라서 확률은 $\frac{12}{216}=\frac{1}{18}$이므로 $p+q=19$이다.

05 2026학년도 9월 30번 정답률 19%

30. 학생 A는 숫자 1, 8이 각각 하나씩 적혀 있는 2장의 카드 중 임의로 한 장의 카드를 선택하여 선택한 카드에 적힌 수가 8일 때만 선택한 카드를 바닥에 내려놓고,
학생 B는 숫자 2, 3, 4, 5, 6, 7이 각각 하나씩 적혀 있는 6장의 카드 중 임의로 한 장의 카드를 선택하여 선택한 카드에 적힌 수가 자연수 n보다 작거나 같을 때만 선택한 카드를 바닥에 내려놓는다.
다음 규칙에 따라 학생 A가 귤을 받을 확률을 p, 학생 B가 귤을 받을 확률을 q라 하자.

- 카드를 내려놓은 학생이 2명이면
  더 큰 수가 적힌 카드를 내려놓은 학생만 귤을 받는다.
- 카드를 내려놓은 학생이 1명이면
  카드를 내려놓지 <u>않은</u> 학생만 귤을 받는다.
- 카드를 내려놓은 학생이 없으면
  어느 학생도 귤을 받지 못한다.

$p=q$일 때, $24(n+p)$의 값을 구하시오.
(단, n은 7 이하의 자연수이다.) [4점]

정 답 80

해 설

문항이 상당히 길지만 자세히 읽어보면 매우 쉬운 문항이다.
문제가 길다고 넘어가지 말고 한번씩 읽어보면 생각보다 쉬운 문항들이 많다.

학생 A는 $\frac{1}{2}$의 확률로 8을 내려놓거나 아무것도 내려놓지 않는다.
학생 B가 카드를 바닥에 내려놓을 확률을 α라 하자.
학생 B가 카드를 내려놓지 않을 확률은 $1-\alpha$이다.
A, B가 카드를 내려놓거나 내려놓지 않는 경우에 따라 4가지로 나눌 수 있다.

1) A, B모두 내려놓는 경우

이 경우는 A가 귤을 받고, 확률은 $\frac{1}{2}\alpha$이다.

2) A만 내려놓는 경우

이 경우 B가 귤을 받고, 확률은 $\frac{1}{2}(1-\alpha)$이다.

3) B만 내려놓는 경우

이 경우 A가 귤을 받고, 확률은 $\frac{1}{2}\alpha$이다.

4) 둘 다 내려놓지 않는 경우
이 경우 아무도 귤을 받지 않는다.

따라서, $p=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\alpha=\alpha$이고, $q=\frac{1}{2}(1-\alpha)$이다.

$\alpha=\frac{1}{2}(1-\alpha)$이므로 $\alpha=\frac{1}{3}$이다.

따라서, $n=3$, $p=\frac{1}{3}$이다.

유형 12 순서쌍 구하기

01 2022학년도 수능 25번 정답률 48%

25. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는? [3점]

(가) $a+b+c+d+e=12$
(나) $\lvert a^2-b^2\rvert=5$

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

정 답 ①

해 설

STEP1 (나) 조건 → 암산

$|a^2-b^2|=5$에서 자연수 제곱의 차이가 5가 나는 건

$3^2-2^2=9-4=5$ 밖에 없다.

따라서 보자마자 (a, b)는 $(3,2)$ 또는 $(2,3)$ 두 쌍 끝.

STEP2 (가) 조건 → 중복조합

$a+b+c+d+e=12$이므로

어차피 (a, b)가 뭐든 $a+b=5$이다.

그럼 $5+c+d+e=12$에서 $c+d+e=7$임을 알 수 있다.

${}_6C_2=15$이고, 각 경우의 수가 2가지 있으므로

총 30가지이다.

02 2024학년도 9월 30번 정답률 5%

30. 다음 조건을 만족시키는 13 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $a \le b \le c \le d$
>
> (나) $a \times d$는 홀수이고, $b+c$는 짝수이다.

정 답 336

해 설

STEP1 조건 분석하기

- (나-1) $a \times d$는 홀수: 두 수를 곱해서 홀수가 나오려면, a와 d는 모두 홀수여야만 한다.
- (나-2) $b+c$는 짝수: 두 수를 더해서 짝수가 나오려면, b와 c는 모두 홀수이거나 모두 짝수여야 한다.

이 두 가지를 종합하면, 순서쌍 (a, b, c, d)의 홀짝 패턴은 다음 두 가지 경우밖에 없다.

CASE 1: (홀수, 홀수, 홀수, 홀수)
CASE 2: (홀수, 짝수, 짝수, 홀수)

이제 13 이하의 자연수를 홀짝으로 분류하고, 이 두 가지 경우의 수를 각각 구해서 더하면 된다.

- 홀수 집합: $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ (총 7개)
- 짝수 집합: $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ (총 6개)

STEP2 경우의 수 계산하기

CASE 1: (홀, 홀, 홀, 홀)
${}_7H_4 = {}_{10}C_4 = 210$가지

CASE 2: (홀, 짝, 짝, 홀)
126가지

따라서 총 경우의 수는 336가지이다.

03 2024학년도 수능 29번 정답률 16%

29. 다음 조건을 만족시키는 6 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

$a \le c \le d$이고 $b \le c \le d$이다.

정 답 196

해 설

c를 기준으로 모든 경우의 수를 계산하면 된다.
(평가원에서는 아무 의미없이 문제를 출제하지 않는다.)

c를 고정했을 때의 경우의 수:
- a의 선택지: 1부터 c까지$=c$가지
- b의 선택지: 1부터 c까지$=c$가지
- d의 선택지: c부터 6까지$=(7-c)$가지

따라서 c의 값이 정해지면 (a, b)쌍은 c^2가지,
d는 $(7-c)$가지가 나온다.

c는 1부터 6까지 가능하므로
경우의 수는 $\sum_{c=1}^{6} c^2(7-c)$이다.

- $\sum_{c=1}^{6} c^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{6\times7\times13}{6} = 91$
- $\sum_{c=1}^{6} c^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 21^2 = 441$

대입하면 196이다.

유형 13 함수의 개수 구하기

01 2022학년도 9월 28번 정답률 50%

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는? [4점]

(가) $f(3)+f(4)$는 5의 배수이다.
(나) $f(1)<f(3)$이고 $f(2)<f(3)$이다.
(다) $f(4)<f(5)$이고 $f(4)<f(6)$이다.

① 384 ② 394 ③ 404 ④ 414 ⑤ 424

정 답 ④

해 설

STEP1 문제 이해와 기본 설정

- (가) $f(3)+f(4)$가 5의 배수
  합이 5인 경우는 $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(4,1)$
  합이 10인 경우는 $(4,6)$, $(5,5)$, $(6,4)$
- (나) $f(1)<f(3)$이고 $f(2)<f(3)$
  $f(1)$과 $f(2)$는 $f(3)$보다 작은 값 중에 자유롭게 선택이 가능하다.
  ⇒ $f(1)$의 선택지: $f(3)-1$가지
  ⇒ $f(2)$의 선택지: $f(3)-1$가지
  따라서 경우의 수는 $(f(3)-1)^2$이다.
- (다) $f(4)<f(5)$이고 $f(4)<f(6)$
  $f(5)$와 $f(6)$은 $f(4)$보다 큰 값 중에 자유롭게 선택이 가능하다.
  ⇒ $f(5)$ 선택지: $6-f(4)$가지
  ⇒ $f(6)$ 선택지: $6-f(4)$가지
  따라서 경우의 수는 $(6-f(4))^2$이다.

STEP2 경우별 계산

(나), (다) 조건에 의해 $f(3)>1$이고 $f(4)<6$이어야만 함수의 개수가 0이 아니다. 이 필터링을 (가) 조건의 쌍에 적용하여 계산할 케이스를 추려내자.

- $(1,4)$: $f(3)=1$이라서 불가능
- $(4,6)$: $f(4)=6$이라서 불가능

이제 남은 5개의 케이스에 대해서
$(f(3)-1)^2\times(6-f(4))^2$을 적용하자.

CASE 1. $(f(3), f(4))=(2,3)$
$(f(3)-1)^2\times(6-f(4))^2=1\times 9=9$

CASE 2. $(f(3), f(4))=(3, 2)$
$(f(3)-1)^2\times(6-f(4))^2=4\times 16=64$

CASE 3. $(f(3), f(4))=(4, 1)$
$(f(3)-1)^2\times(6-f(4))^2=9\times 25=225$

CASE 4. $(f(3), f(4))=(5, 5)$
$(f(3)-1)^2\times(6-f(4))^2=16\times 1=16$

CASE 5. $(f(3), f(4))=(6, 4)$
$(f(3)-1)^2\times(6-f(4))^2=25\times 4=100$

모든 경우의 수를 더하면 414이다.

02 2022학년도 수능 28번 정답률 20%

28. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는? [4점]

> (가) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) \geq \sqrt{x}$이다.
> (나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128 ② 138 ③ 148 ④ 158 ⑤ 168

정 답 ③

해 설

STEP1 (가) 조건 분석 → 각 원소의 행선지 제한

$f(x) \geq \sqrt{x}$ 이게 가장 구체적인 조건이니까 여기서 각 x가 갈 수 있는 함숫값부터 정하고 가자..

- $f(1) \geq \sqrt{1}=1$ → $f(1)$은 $\{1, 2, 3, 4\}$중 하나 (4가지)
- $f(2) \geq \sqrt{2} \simeq 1.4$ → $f(2)$은 $\{2, 3, 4\}$중 하나 (3가지)
- $f(3) \geq \sqrt{3} \simeq 1.7$ → $f(3)$은 $\{2, 3, 4\}$중 하나 (3가지)
- $f(4) = \sqrt{4}=2$ → $f(4)$은 $\{2, 3, 4\}$중 하나 (3가지)
- $f(5) \geq \sqrt{5} \simeq 2.2$ → $f(5)$은 $\{3, 4\}$중 하나 (2가지)

이 제한은 끝까지 따라다니는 거니까 머릿속에 박아둬야 한다

STEP2 (나) 조건 분석 → 케이스 분류

Y $=\{1, 2, 3, 4\}$에서 원소 3개를 뽑아 치역으로 삼는 경우를 기준으로 케이스를 나누자.

CASE 1: 치역이 $\{1, 2, 3\}$ 또는 $\{1, 2, 4\}$

치역이 $\{1, 2, 3\}$이라고 하자.

(가) 조건에서 $f(x)=1$이 가능한 건 $x=1$ 뿐.

따라서 $f(1)=1$로 고정.

(가) 조건에서 $f(5)$는 $\{3, 4\}$ 중 하나인데, 치역에 4가 없으니 $f(5)=3$으로 고정

이제 남은 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$가 $\{2, 3\}$으로 가면서, 반드시 '2'를 적어도 한 번은 찍어야 한다.

$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$가 $\{2, 3\}$으로 가는 모든 경우의 수는 $2^3=8$가지. 여기서 모두 '3'으로만 가는 1가지를 빼면 되니까 $8-1=7$가지.

치역이 $\{1, 2, 4\}$인 경우도 구조가 똑같다.

$f(1)=1$, $f(5)=4$로 고정되고, $f(2), f(3), f(4)$가 $\{2, 4\}$로 가면서 2를 찍어야 하니 똑같이 7가지.

CASE 2: 치역이 $\{1, 3, 4\}$

$f(1)=1$로 고정 (이유는 위와 동일)

이제 남은 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$가 $\{3, 4\}$로 가면서 $\{3, 4\}$를 모두 치역으로 만들어야 한다.

4개의 원소를 $\{3, 4\}$ 두 곳으로 보내는 함수의 총 개수는 $2^4=16$가지. 여기서 모두 '3'로만 가는 경우와 모두 '4'로만 가는 경우 2가지를 빼면 되니까 $16-2=14$가지

CASE 3: 치역이 $\{2, 3, 4\}$

이게 메인 이벤트. 1이 치역에 없어서 $f(1)$이 고정되지 않는다.

먼저 (가) 조건을 만족하면서 함숫값이 $\{2, 3, 4\}$ 안에만 있는 함수의 총개수를 구하자.

$f(1)$~$f(4)$는 $\{2, 3, 4\}$로 (각 3가지), $f(5)$는 $\{3, 4\}$로 (2가지) 갈 수 있으니, 총 $3^4 \times 2 = 81 \times = 162$

이제 여기서 치역이 2개 이하인 경우를 빼자.

- 치역 $\subseteq \{2, 3\}$: $f(1..4)$는 $\{2, 3\}$으로 (2가지씩), $f(5)$는 3으로만(1가지) 가능. $2^4 \times 1 = 16$가지.
- 치역 $\subseteq \{2, 4\}$: 위와 동일. $2^4 \times 1 = 16$가지.
- 치역 $\subseteq \{3, 4\}$: $f(1..5)$ 모두 $\{3, 4\}$로 가능. $2^5 = 32$가지.

치역이 1개인 경우를 더해주자 (두 번 빠졌으니까).

- 치역$=\{2\}$: $f(5)$가 2로 못 가니 불가능. 0가지.
- 치역$=\{3\}$: 모두 3으로 가는 1가지.
- 치역$=\{4\}$: 모두 4으로 가는 1가지.

계산하면: $162-(16+16+32)+(1+1)=100$가지.

03 2023학년도 6월 29번 정답률 13%

29. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(f(1))=4$
(나) $f(1) \le f(3) \le f(5)$

정 답 115

해 설

우선 경우를 나눌 건데, 가장 큰 범주부터 생각해보자.
그러면 (가) $f(f(1))=4$를 생각해볼 수 있다.

CASE 1. $f(1)=1$로 결정
• (가): $f(f(1))=f(1)=4$가 된다. (모순)

CASE 2. $f(1)=2$로 결정
• (가): $f(f(1))=f(2)=4$로 결정된다.
• (나): $2 \le f(3) \le f(5)$가 되므로 $f(3)$과 $f(5)$는 $\{2, 3, 4, 5\}$에서 중복으로 뽑을 수 있다.
${}_4H_2={}_5C_2=10$가지이다.
• $f(4)$는 뭐든 될 수 있으므로 5가지이다.
따라서 총 50가지이다.

CASE 3. $f(1)=3$로 결정
• (가): $f(f(1))=f(3)=4$로 결정된다.
• (나): $3 \le 4 \le f(5)$가 되므로 $\{4, 5\}$ 2가지 선택권이 있다.
• $f(2)$와 $f(4)$는 아무 값이나 가져도 상관없다. 5^2가지
따라서 총 50가지이다.

CASE 4. $f(1)=4$로 결정
• (가): $f(f(1))=f(4)=4$로 결정된다.
• (나): $4 \le f(3) \le f(5)$가 되므로 $f(3)$과 $f(5)$는 $\{4, 5\}$에서 중복으로 뽑을 수 있다.
${}_2H_2={}_3C_2=3$가지이다.
• $f(2)$는 아무 값이나 될 수 있으므로 5가지
따라서 총 15가지이다.

CASE 3. $f(1)=5$로 결정
• (가): $f(f(1))=f(5)=4$로 결정된다.
• (나): $5 \le f(3) \le f(5)=4$가 되므로 모순이다.

모든 경우의 수를 더하면 115이다.

04 2023학년도 수능 30번 정답률 3%

30. 집합 $X=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) 9 이하의 모든 자연수 x에 대하여 $f(x) \le f(x+1)$이다.
> (나) $1 \le x \le 5$일 때 $f(x) \le x$이고, $6 \le x \le 10$일 때 $f(x) \ge x$이다.
> (다) $f(6)=f(5)+6$

정 답 100

해 설

STEP1 문제 구조 파악하기 → 반으로 쪼개기

가장 먼저 눈에 띄는 조건은 (가)와 (다)야.

- (가) $f(x) \le f(x+1)$ 함수 f는 증가하거나 같은 값을 유지해야 해. (중복조합 느낌)
  $f(1) \le f(2) \le \cdots \le f(5) \le f(6) \le \cdots \le f(10)$
- (다) $f(6)=f(5)+6$: 이게 핵심 키다.
  함수를 $f(1) \cdots f(5)$와 $f(6) \cdots f(10)$ 두 부분으로 딱 가르는 연결고리야.

이제 (나) 조건으로 각 부분의 범위를 좁혀보자.

- $1 \le x \le 5$일 때 $f(x) \le x$
- $6 \le x \le 10$일 때 $f(x) \ge x$

이걸 (다) 조건과 섞어보면 $f(5)$와 $f(6)$의 가능한 값이 나와.

- $f(5) \le 5$
- $f(6) \ge 6$
- $f(6)=f(5)+6$

$f(5)$에 가능한 값을 넣어보자.

$f(5)=1$이면 $f(6)=7$ (조건 만족: $1 \le 5$, $7 \ge 6$)
$f(5)=2$이면 $f(6)=8$ (조건 만족)
$f(5)=3$이면 $f(6)=9$ (조건 만족)
$f(5)=4$이면 $f(6)=10$ (조건 만족)
$f(5)=5$이면 $f(6)=11$ 불가능! (치역은 10 이하)

결국 이 문제는 $f(5)$가 1, 2, 3, 4일 때 네 가지 케이스로 나뉘는 거야.

각 케이스별로 앞부분($f(1) \sim f(5)$)과 뒷부분($f(6) \sim f(10)$)의 경우의 수를 구해서 곱한 뒤, 모두 더하면 끝.

STEP2 앞부분 경우의 수 $N(k)$ 구하기

$f(5)=k$일 때, $f(1)$부터 $f(5)$까지의 경우의 수를 $N(k)$라고 하자. 우리가 찾아야 할 건 아래 조건을 만족하는 함수의 수:
$1=f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5)=k$이면서 $f(x) \le x$

- $N(1)$ ($f(5)=1$일 때):
  $1 \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le 1$이므로 모두 1. 1가지.
- $N(2)$ ($f(5)=2$일 때):
  $1 \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le 2$이면서 $f(2) \le 2$, $f(3) \le 3$, $f(4), =4$. $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$는 $\{1, 2\}$중에서 중복을 허용해 3개를 뽑는 것과 같아. ${}_2H_3={}_4C_3=$4가지.
- $N(3)$ ($f(5)=3$일 때):
  $1 \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le 3$이면서 $f(2) \le 2$
  전체 경우의 수(${}_3H_3=10$)에서 $f(2)>2$인 경우 (즉, $f(2)=3$인 경우 $(3, 3, 3)$ 1가지)를 빼면,
  $10-1=$9가지.
- $N(4)$ ($f(5)=4$일 때):
  $1 \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le 4$이면서 $f(2) \le 2$, $f(3) \le 3$.
  이고, 개수를 직접 세면 14가지.

STEP3 뒷부분 경우의 수 $M(k)$ 구하기

$f(6)=k+6$일 때, $f(6)$부터 $f(10)$까지의 경우의 수를 $M(k)$라고 하자.

조건: $k+6=f(6) \le f(7) \le f(8) \le f(9) \le f(10)=10$이면서 $f(x) \ge x$

- $M(4)$ ($f(6)=10$일 때)
  $10 \le f(7) \le f(8) \le f(9) \le 10$이므로 모두 10. 1가지.
- $M(3)$ ($f(6)=9$일 때)
  $9 \le f(7) \le f(8) \le f(9) \le 10$이면서 $f(x) \ge x$ (자동 만족)
  $\{9, 10\}$에서 중복 허용해 3개 뽑기.
  ${}_2H_3={}_4C_3=$4가지.
- $M(2)$ ($f(6)=8$일 때)
  $8 \le f(7) \le f(8) \le f(9) \le 10$이면서 $f(9) \ge 9$
  전체 경우의 수(${}_3H_3=10$)에서 $f(9)<9$인 경우 (즉, $f(9)=8$인 경우 $(8, 8, 8)$ 1가지)를 빼면,
  $10-1=$9가지.
- $M(1)$ ($f(6)=7$일 때)
  $7 \le f(7) \le f(8) \le f(9) \le 10$이면서 $f(8) \ge 8$, $f(9) \ge 9$
  이것도 $N(4)$처럼 계산하면 14가지.

STEP4 최종 계산

이제 각 케이스를 곱해서 더하면 끝이야.

여기서 놀라운 대칭성이 보여.

$N(1)=M(4)=1$, $N(2)=M(3)=4$, $N(3)=M(2)=9$, $N(4)=M(1)=14$

- $f(5)=1$, $f(6)=7$일 때: $N(1) \times M(1)=1 \times 14=14$
- $f(5)=2$, $f(6)=8$일 때: $N(2) \times M(2)=4 \times 9=36$
- $f(5)=3$, $f(6)=9$일 때: $N(3) \times M(3)=9 \times 4=36$
- $f(5)=4$, $f(6)=10$일 때: $N(4) \times M(4)=14 \times 1=14$

총합은 100이다.

05 2024학년도 6월 28번 정답률 38%

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는? [4점]

(가) $f(1) \times f(3) \times f(5)$는 홀수이다.
(나) $f(2) < f(4)$
(다) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128 ② 132 ③ 136 ④ 140 ⑤ 144

정 답 ⑤

해 설

STEP1 문제 이해하기

- $f: X \to X$는 치역도 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$라는 것이다.
- $f(1) \times f(3) \times f(5)$가 홀수라는 것은 각 함숫값이 홀수라는 뜻이다. 최대 $\{1, 3, 5\}$이다. [조건 (다) 참조]
- 함수 f의 치역의 원소의 개수가 3이라는 것은 예를 들어 $f(1)=1,\ f(2)=4,\ f(3)=1,\ f(4)=5,\ f(5)=5$이다. 이는 조건 (가), (나), (다)를 만족하고 있다.

STEP2 문제 접근하기

CASE 1. 홀수 그룹의 함숫값이 1종류일 때
$f(1)=f(3)=f(5)$이고 홀수는 3가지 경우가 있으므로 경우의 수는 3가지이다.

CASE 2. 홀수 그룹의 함숫값이 2종류일 때
홀수 1, 3, 5를 순서를 고려하지 않고 2개를 뽑으면 3가지이다. 그리고 뽑은 2개의 홀수를 $f(1), f(3), f(5)$에 넣는 경우의 수는 (1,1,3) (1,3,1) (1,3,3)이 가능하므로 다른 홀수에 대해서 하면 총 6가지이다. 따라서 홀수에 대한 경우의 수는 18가지이다.

그리고 치역은 정확하게 3개가 되야하므로 $f(2)$ 또는 $f(4)$ 중에서 하나만 새로운 원소여야 한다.

- $f(2)=2$라고 하면 $f(4)$는 3 또는 5이다.
- $f(2)=4$라고 하면 $f(4)$는 5이다.
- $f(4)=2$라고 하면 $f(2)$는 1이다.
- $f(4)=4$라고 하면 $f(2)$는 1 또는 3이다.

모든 경우의 수의 합은 6이다.

따라서 총 경우의 수는 108가지이다.

CASE 3. 홀수 그룹의 함숫값이 3종류일 때
$f(1), f(3), f(5)$는 1, 3, 5에 일대일 대응해야하므로 경우의 수는 3!=6가지이다.

그리고 $f(2)$, $f(4)$의 함숫값을 결정해보자면 1, 3, 5안에서 결정되므로 ${}_3C_2=3$가지이다.

따라서 총 경우의 수는 18가지이다.

최종적으로 조건을 만족시키는 함수의 총 개수는 144이다.

06 2024학년도 9월 27번 정답률 49%

27. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 X에서 Y로의 모든 일대일함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [3점]

(가) $f(2)=2$

(나) $f(1)\times f(2)\times f(3)\times f(4)$는 4의 배수이다.

① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{3}{35}$ ③ $\frac{1}{10}$ ④ $\frac{4}{35}$ ⑤ $\frac{9}{70}$

정 답 ④

해 설

STEP1 전체 경우의 수

집합 X에서 Y로 가는 일대일 함수의 개수를 묻고 있으므로 이는 순열을 계산하는 것과 같으므로

$P(7,4)=7\times6\times5\times4=840$가지이다.

STEP2 조건을 만족하는 경우의 수 구하기

(가) 조건을 (나)에 대입하면 $f(1)\times f(3)\times f(4)=2n$이므로 짝수가 된다. 곱이 짝수라는 것은 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$ 중에 적어도 하나가 짝수라는 의미이다. '적어도 하나' 라는 것은 여사건으로 풀면 된다. 여사건은 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$ 모두 홀수인 경우이다.

Y에서 홀수는 총 4개이고, $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$ 가 모두 홀수가 되는 경우의 수는 홀수 4개 중에 3개를 골라 나열하는 것과 같으므로 $P(4,3)=4\times3\times2=24$가지이다.

(가)를 만족하는 경우의 수는 $P(6,3)=6\times5\times4=120$가지이다. 위의 여사건을 빼면 96가지이다.

따라서 최종 확률 $P=\frac{96}{840}=\frac{4}{35}$이다.

07 2023학년도 9월 30번 정답률 4%

30. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$와 함수 $f: X \to X$에 대하여 함수 f의 치역을 A, 합성함수 $f \circ f$의 치역을 B라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $n(A) \le 3$

(나) $n(A)=n(B)$

(다) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) \neq x$이다.

정 답 260

해 설

STEP1 전체 경우의 수

집합 X에서 Y로 가는 일대일 함수의 개수를 묻고 있으므로 이는 순열을 계산하는 것과 같으므로

$P(7,4) = 7\times6\times5\times4=840$가지이다.

STEP2 조건을 만족하는 경우의 수 구하기

(가) 조건을 (나)에 대입하면 $f(1)\times f(3)\times f(4)=2n$이므로 짝수가 된다. 곱이 짝수라는 것은 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$ 중에 적어도 하나가 짝수라는 의미이다. '적어도 하나' 라는 것은 여사건으로 풀면 된다. 여사건은 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$ 모두 홀수인 경우이다.

Y에서 홀수는 총 4개이고, $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$ 가 모두 홀수가 되는 경우의 수는 홀수 4개 중에 3개를 골라 나열하는 것과 같으므로 $P(4,3)=4\times3\times2=24$가지이다.

(가)를 만족하는 경우의 수는 $P(6,3)=6\times5\times4=120$가지이다. 위의 여사건을 빼면 96가지이다.

따라서 최종 확률 $P=\dfrac{96}{840}=\dfrac{4}{35}$이다.

08 2025학년도 6월 30번 정답률 4%

30. 집합 $X=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) X의 모든 원소 x에 대하여 $x+f(x) \in X$이다.
> (나) $x=-2, -1, 0, 1$일 때 $f(x) \geq f(x+1)$이다.

정 답 108

해 설

STEP1 조건 (가)에 의해 가능한 경우

- $x=-2$: $f(-2) \in \{0, 1, 2\}$
- $x=-1$: $f(-1) \in \{-1, 0, 1, 2\}$
- $x=0$: $f(0) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
- $x=1$: $f(1) \in \{-2, -1, 0, 1\}$
- $x=2$: $f(2) \in \{-2, -1, 0\}$

STEP2 조건 (나) 적용

조건 (나)는 $f(-2) \geq f(-1) \geq f(0) \geq f(1) \geq f(2)$를 의미한다.

STEP3 개수 계산

- $f(-2)$를 $\{0, 1, 2\}$에서 선택
- $f(-1)$를 $\{-1, 0, 1, 2\}$에서 선택하되 $f(-2) \geq f(-1)$
- $f(0)$를 $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$에서 선택하되 $f(-1) \geq f(0)$
- $f(1)$를 $\{-2, -1, 0, 1\}$에서 선택하되 $f(0) \geq f(1)$
- $f(2)$를 $\{-2, -1, 0\}$에서 선택하되 $f(1) \geq f(2)$

09 2025학년도 9월 28번 정답률 36%

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 $f : X \to X$인 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택하는 시행을 한다. 이 시행에서 선택한 함수 f가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$가 짝수일 확률은? [4점]

> $a \in X$, $b \in X$에 대하여
> a가 b의 약수이면 $f(a)$는 $f(b)$의 약수이다.

① $\frac{9}{19}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{27}{40}$ ⑤ $\frac{19}{25}$

정 답 ④

해 설

STEP1 문제 분석하기

주어진 조건은 a가 b의 약수이면 $f(a)$는 $f(b)$의 약수이다.
집합 X에 대하여 모든 약수 관계를 따져보자.

- 1은 2의 약수이고 $f(1)$은 $f(2)$의 약수
- 1은 3의 약수이고 $f(1)$은 $f(3)$의 약수
- 1은 4의 약수이고 $f(1)$은 $f(4)$의 약수
- 2은 4의 약수이고 $f(2)$은 $f(4)$의 약수

STEP2 분모 계산하기

CASE 1. $f(1)=1$

- $f(1)=1$은 모든 수의 약수이므로 $f(1)$ 관련 조건은 항상 만족한다.
- $f(2)$는 $f(4)$의 약수임을 풀면
  $f(2)=1$이면 $f(4)=1, 2, 3, 4$
  $f(2)=2$이면 $f(4)=2, 4$
  $f(2)=3$이면 $f(4)=3$
  $f(2)=4$이면 $f(4)=4$
  따라서 총 8개의 쌍이 가능하다.
- $f(3)$은 아무 값이나 가져도 된다. (4가지)

따라서 경우의 수는 32가지이다.

CASE 2. $f(1)=2$

- $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$는 모두 $f(1)=2$의 배수이다. $\{2, 4\}$
- $f(3)$은 2가지 선택지가 있다.
  $f(2)$는 $f(4)$의 약수 조건을 만족하는 쌍 $(f(2), f(4))$는 $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 4)$로 3가지이다.

따라서 경우의 수는 $3\times2=6$가지이다.

CASE 3. $f(1)=3$

- $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$는 모두 $f(1)=3$의 배수여야 한다.
  $f(2)=f(3)=f(4)=3$
- $f(2)=3$은 $f(4)=3$의 약수 조건을 만족한다.

따라서 경우의 수는 1가지이다. ($f(x)=3$함수)

CASE 4. $f(1)=4$

- $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$는 모두 $f(1)=4$의 배수여야 한다.
  $f(2)=f(3)=f(4)=4$
- $f(2)=4$는 $f(4)=4$의 약수 조건을 만족한다.

따라서 경우의 수는 1가지이다. ($f(x)=4$함수)

조건을 만족하는 총 함수의 개수는 $32+6+1+1=40$가지

STEP3 분자 계산하기

조건을 만족하면서 $f(4)$가 짝수인 함수의 개수

CASE 1. $f(1)=1$에서 $f(4)$가 짝수인 경우

- $f(4)=2$: $f(2)$는 2의 약수$(1, 2)$여야 한다. (2가지)
  $f(3)$은 무관하다. (4가지) 따라서 총 8가지이다.
- $f(4)=4$: $f(2)$는 4의 약수$(1, 2, 4)$여야 한다. (3가지)
  $f(3)$은 무관하다. (4가지) 따라서 총 12가지이다.

다 더하면 20가지이다.

CASE 2. $f(1)=2$에서 $f(4)$가 짝수인 경우

- 이 경우는 $f(4)$가 2, 4 중 하나이므로 항상 짝수이다.
  따라서 모든 6가지 경우가 해당된다.

CASE 3. $f(1)=3$에서 $f(4)$가 짝수인 경우

- $f(4)=3$이므로 해당하는 경우가 없다.

CASE 4. $f(1)=4$에서 $f(4)$가 짝수인 경우

- $f(4)=4$이므로 해당된다.

따라서 $f(4)$가 짝수인 함수의 개수는 27가지이다.

최종 확률은 $\frac{27}{40}$이다.

10 2025학년도 수능 28번 정답률 42%

28. 집합 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는? [4점]

(가) $f(1)\times f(6)$의 값이 6의 약수이다.
(나) $2f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5) \le 2f(6)$

① 166 ② 171 ③ 176 ④ 181 ⑤ 186

정 답 ②

해 설

STEP1 문제 분석하기

(가): $f(1)\times f(6)$이 6의 약수이므로 $\{1,2,3,6\}$ 중 하나이다.

(나): $2f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5) \le 2f(6)$에서
가장 중요한 정보는 $f(1) \le f(6)$이다. (가)와 결합!

따라서, 우리는 (가)조건과 (나)조건을 동시에 만족하는 $(f(1), f(6))$쌍만 고려하면 된다.

- $f(1)f(6)=1$이면 $(1,1)$
- $f(1)f(6)=2$이면 $(1,2)$
- $f(1)f(6)=3$이면 $(1,3)$
- $f(1)f(6)=6$이면 $(1,6)$, $(2,3)$

이렇게 총 4가지의 핵심 케이스로 압축할 수 있다.

STEP2 중복 조합을 이용한 케이스별 계산

(나) 조건에서 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$는 $2f(1)$ 이상 $2f(6)$이하의 범위 내에서 4개의 값을 중복을 허용하여 고르는 중복 조합 문제이다. 선택 가능한 자연수의 개수를 n이라 하면, 경우의 수는 ${}_nH_4 = {}_{n+3}C_4$가 된다.

CASE 1. $(f(1), f(6))=(1,1)$
$2 \le f(k) \le 2$이므로 선택가능한 값은 2이다.
따라서 경우의 수는 ${}_4C_4=1$이다.

CASE 2. $(f(1), f(6))=(1,2)$
$2 \le f(k) \le 4$이므로 선택가능한 값은 2, 3, 4이다.
따라서 경우의 수는 ${}_7C_4=15$

CASE 3. $(f(1), f(6))=(1,3)$
$2 \le f(k) \le 6$이므로 선택 가능한 값은 2, 3, 4, 5, 6이다.
따라서 경우의 수는 ${}_8C_4=70$

CASE 4. $(f(1), f(6))=(1,6)$
$2 \le f(k) \le 12$이지만 공역이 1부터 6까지이므로,
실제 범위는 $2 \le f(k) \le 6$이므로 ${}_8C_4=70$이다.

CASE 5. $(f(1), f(6))=(2,3)$
$4 \le f(k) \le 6$이므로 경우의 수는 ${}_6C_4=15$이다.

모든 경우의 수를 다 더하면 171이다.

11 2026학년도 6월 30번 정답률 19%

30. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $x=1, 2, 3, 4$일 때 $f(x+1)+3 \geq f(x)+x$이다.
(나) $f(2)$의 값은 홀수이다.

정 답 115

해 설

조건이 복잡하기 때문에 일단 나열하여 빠르게 경우의 수를 계산할 수 있는 방법을 찾아본다.
부등호가 나오는 경우 보통 중복조합을 사용할 수 있으며, 잘 보이지 않는 경우 그냥 개수 세기를 해도 된다.

STEP1 (가) 조건을 나열하여 경우 나누기

(가) 조건의 4개의 부등식을 모두 써보면 다음과 같다.
$f(2)+2 \geq f(1)$, $f(3)+1 \geq f(2)$, $f(4) \geq f(3)$, $f(5) \geq f(4)+1$이다.
여기에서 (나) 조건의 $f(2)$가 홀수인 조건을 활용하면, $f(2)=1, 3, 5$ 중 하나이다.
따라서, $f(2)$의 값을 기준으로 3가지 경우로 나누어 경우의 수를 구하자.

STEP2 각 경우의 수를 계산하여 정답 구하기

1) $f(2)=1$인 경우
$f(2)+2=3 \geq f(1)$이므로 $f(1)$로 가능한 경우는 3가지이다.
$f(3)+1 \geq f(2)=1$이므로 $f(3)$은 모든 값이 가능하다.
나머지 값들을 부등식으로 표현하면 다음과 같다.
$f(5)-1 \geq f(4) \geq f(3)$이다.
$f(5)-1 \geq f(4)$는 $f(5)>f(4)$로 표현할 수 있다.
이 경우의 수를 셀 때에는 $f(5) \geq f(4) \geq f(3)$의 경우의 수에서 $f(5)=f(4) \geq f(3)$의 경우의 수를 빼면 된다. (자세한 내용은 강의 참고)
$f(5) \geq f(4) \geq f(3)$의 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_3$이고, $f(5)=f(4) \geq f(3)$의 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_2$이다.

2) $f(2)=3$인 경우
$f(2)+2=5 \geq f(1)$이므로 $f(1)$로 가능한 경우는 5가지이다.
$f(3)+1 \geq f(2)=3$이므로 $f(3) \geq 2$이다.
나머지 값들을 부등식으로 표현하면 다음과 같다.
$f(5)-1 \geq f(4) \geq f(3) \geq 2$이다.
위와 마찬가지로 $f(5) \geq f(4) \geq f(3) \geq 2$의 경우의 수인 ${}_4\mathrm{H}_3$에서 $f(5)=f(4) \geq f(3) \geq 2$의 경우의 수인 ${}_4\mathrm{H}_2$를 빼면 된다.

3) $f(2)=5$인 경우
$f(2)+2=7 \geq f(1)$이므로 $f(1)$로 가능한 경우는 5가지이다.
$f(3)+1 \geq f(2)=5$이므로 $f(3) \geq 4$이다.
나머지 값들을 부등식으로 표현하면 다음과 같다.
$f(5)-1 \geq f(4) \geq f(3) \geq 4$이다.
이 경우, $f(5)=5$, $f(4)=f(3)=4$의 1가지만 가능하다.
따라서, 정답은 $3 \times ({}_5\mathrm{H}_3-{}_5\mathrm{H}_2)+5 \times ({}_4\mathrm{H}_3-{}_4\mathrm{H}_2)+5=115$가지이다.

유형 14 전개식의 계수 구하기

01 2022학년도 6월 23번 정답률 77%

23. 다항식 $(2x+1)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는? [2점]

① 20 ② 40 ③ 60 ④ 80 ⑤ 100

정 답 ④

해 설

STEP1 문제 이해하기

x^3를 만드려면, $2x$을 세 번 선택해야 한다.

STEP2 식 설정하기

총 5개의 괄호 중에서, $2x$을 꺼낼 괄호 3개를 고르자.

그리고 계수 2가 3개 있으므로 $({}_5C_3\times 2^3)$

그러면 나머지 2개의 괄호에서는 무조건 1가 뽑혀나온다.(1^2)

STEP3 답 구하기

따라서 x^3의 계수는 $={}_5C_3\times 2^3\times 1^2=10\times 8=80$이야.

02 2022학년도 9월 25번 정답률 64%

25. $\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^5$의 전개식에서 $\frac{1}{x^2}$의 계수와 x의 계수가 같을 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ②

해 설

STEP1 문제 이해하기

이런 문제는 일반항부터 차근차근 쓰는 건 시간 낭비이다.
핵심은 '어떤 항을 몇 번 선택할 것인가'에만 집중해서
필요한 계산만 빠르게 하는 것이다

STEP2 식 설정하기

x^2을 $5-k$번, $\frac{a}{x}$를 k번 선택해보자.

그러면 x의 지수는 $(x^2)^{5-k}\cdot(x^{-1})^k$이므로,
지수 부분은 $10-2k-k=10-3k$가 된다

1. $\frac{1}{x^2}$의 계수 찾기

x의 지수가 -2가 되어야 하므로, $10-3k=-2$에서 $k=4$

이다. 이는 $\frac{a}{x}$를 4번 선택했다는 뜻이므로 계수는 $a^4\times{}_5C_4$

2. x의 계수 찾기

x의 지수가 1이 되어야 하므로, $10-3k=1$에서 $k=3$이다.

이는 $\frac{a}{x}$를 3번 선택했다는 뜻이므로 계수는 $a^3\times{}_5C_3$

문제에서 두 계수가 같다고 했으므로 $5a^4=10a^3$에서
$a=2$이다.

03 2022학년도 수능 23번 정답률 79%

23. 다항식 $(x+2)^7$의 전개식에서 x^5의 계수는? [2점]

① 42 ② 56 ③ 70 ④ 84 ⑤ 98

정 답 ④

해 설

STEP1 문제 이해하기

x^5를 만드려면, x을 다섯 번 선택해야 한다.

STEP2 식 설정하기

총 7개의 괄호 중에서, x을 꺼낼 괄호 5개를 고르자. $({}_7C_5)$

그러면 나머지 2개의 괄호에서는 무조건 2가 뽑혀나온다.(2^2)

STEP3 답 구하기

따라서 x^5의 계수는 $={}_7C_5\times 2^2=21\times 4=84$이야.

04 2023학년도 6월 26번 정답률 45%

26. 다항식 $(x^2+1)^4(x^3+1)^n$의 전개식에서 x^5의 계수가 12일 때, x^6의 계수는? (단, n은 자연수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

정 답 ②

해 설

STEP1 n값 구하기

x^5를 만드려면 x^2을 한 번, x^3을 한 번 뽑는 경우만 있다.

${}_4C_1 \times {}_nC_1 = 4 \times n = 12$에서 $n=3$이다.

STEP2 답 구하기

x^6이 되려면 뽑는 경우는 $(0,2)$, $(3,0)$ 두 가지 경우가 있다.

- x^3을 두 번 뽑기
  앞에선 상수항을 뽑고, 뒤에선 $(x^3)^2$을 뽑는다는 뜻이다.
  따라서 x^6의 계수$= 1 \times {}_3C_2 = 1 \times 3 = 3$이다.
- x^2을 세 번 뽑기
  앞에선 $(x^2)^3$을 뽑고, 뒤에선 상수항을 뽑는다는 뜻이다.
  따라서 x^6의 계수$= {}_4C_3 \times 1 = 4 \times 1 = 4$이다.

이 두 경우는 동시에 일어날 수 없으니, 각각의 계수를 더해주면 총 계수는 7이다.

05 2023학년도 9월 23번 정답률 72%

23. 다항식 $(x^2+2)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는? [2점]

① 240 ② 270 ③ 300 ④ 330 ⑤ 360

정 답 ①

해 설

STEP1 문제 이해하기

x^4를 만드려면, x^2을 두 번 선택해야 한다.

STEP2 식 설정하기

총 6개의 괄호 중에서, x^2을 꺼낼 괄호 2개를 고르자. $({}_6C_2)$

그러면 나머지 4개의 괄호에서는 무조건 2가 뽑혀나온다. (2^4)

STEP3 답 구하기

따라서 x^4의 계수는 $= {}_6C_2 \times 2^4 = 15 \times 16 = 240$이다.

06 2023학년도 수능 23번 정답률 77%

23. 다항식 $(x^3+3)^5$의 전개식에서 x^9의 계수는? [2점]

① 30 ② 60 ③ 90 ④ 120 ⑤ 150

정 답 ③

해 설

STEP1 문제 이해하기

x^9를 만드려면, x^3을 세 번 선택해야 한다.

STEP2 식 설정하기

총 5개의 괄호 중에서, x^3을 꺼낼 괄호 3개를 고르자. $({}_5C_3)$

그러면 나머지 2개의 괄호에서는 무조건 3가 뽑혀나온다. (3^2)

STEP3 답 구하기

따라서 x^9의 계수는 $={}_5C_2\times3^2=10\times9=90$이다.

07 2024학년도 6월 26번 정답률 51%

26. 다항식 $(x-1)^6(2x+1)^7$의 전개식에서 x^2의 계수는? [3점]

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

정 답 ③

해 설

STEP1 문제 이해하기

x^2을 만드려면 $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$번을 뽑으면 된다.

STEP2 식 설정하기

- (왼쪽 x^2)×(오른쪽 상수)
  - 왼쪽: x를 2번 뽑고 -1을 4번 뽑아야 함.
    계수: ${}_6C_2\times(-1)^4=15$
  - 오른쪽: 상수항임.
  - 조합하면 $15\times1=15$이다.

- (왼쪽 x)×(오른쪽 x)
  - 왼쪽: x를 1번, -1을 5번 뽑음
    계수: ${}_6C_1\times(-1)^5=-6$
  - 오른쪽: $2x$를 1번, 1을 6번 뽑음
    계수: $2\times{}_7C_2\times1^6=14$
  - 조합하면 $-6\times14=-84$이다.

- (왼쪽 상수)×(오른쪽 x^2)
  - 왼쪽: 상수항은 -1을 6번 뽑는 것이므로 1이다.
  - 오른쪽: $2x$를 2번, 1을 5번 뽑음.
    계수: $2^2\times{}_7C_2\times1^5=84$
  - 조합하면 84이다.

STEP3 답 구하기

이제 위에서 구한 계수를 모두 더해주면 15이다.

08 2025학년도 6월 25번 정답률 78%

25. 다항식 $(x^2-2)^5$의 전개식에서 x^6의 계수는? [3점]

① -50 ② -20 ③ 10 ④ 40 ⑤ 70

정 답 ④

해 설

STEP1 문제 이해하기

x^6를 만드려면, x^2을 세 번 선택해야 한다.

STEP2 식 설정하기

총 5개의 괄호 중에서, x^2을 꺼낼 괄호 3개를 고르자. $({}_5C_3)$
그러면 나머지 2개의 괄호에서는 무조건 -2가 뽑혀나온다. $(-2)^2$

STEP3 답 구하기

따라서 x^6의 계수는 $={}_5C_3\times(-2)^2=10\times4=40$이다.

09 2025학년도 수능 23번 정답률 70%

23. 다항식 $(x^3+2)^5$의 전개식에서 x^6의 계수는? [2점]

① 40 ② 50 ③ 60 ④ 70 ⑤ 80

정 답 ⑤

해 설

STEP1 문제 이해하기

x^6를 만드려면, x^3을 두 번 선택해야 한다.

STEP2 식 설정하기

총 5개의 괄호 중에서, x^3을 꺼낼 괄호 2개를 고르자. $({}_5C_2)$
그러면 나머지 3개의 괄호에서는 무조건 2가 뽑혀나온다. (2^3)

STEP3 답 구하기

따라서 x^6의 계수는 $={}_5C_2\times2^3=10\times8=80$이다.

10 2026학년도 6월 25번 정답률 90%

25. 다항식 $(2x-1)^5(x+1)$의 전개식에서 x^3의 계수는? [3점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

정 답 ③

해 설

$(2x-1)^5(x+1)$에서 오른쪽 항은 x와 1의 항을 만들 수 있으므로 왼쪽 항에서 x^2와 x^3의 계수의 합을 구하면 답이 된다.

왼쪽 항에서 x^2의 계수는 공식에 의해 ${}_5C_2\times2^2\times(-1)^3=-40$이다.

x^3의 계수는 공식에 의해 ${}_5C_3\times2^3\times(-1)^2=80$이다.

따라서, 답은 40이다.

유형 15 벤다이어그램 그리기

01 2022학년도 6월 24번 정답률 78%

24. 어느 동아리의 학생 20명을 대상으로 진로활동 A와 진로활동 B에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 진로활동 A와 진로활동 B 중 하나를 선택하였고, 각각의 진로활동을 선택한 학생 수는 다음과 같다.

(단위 : 명)

구분	진로활동 A	진로활동 B	합계
1학년	7	5	12
2학년	4	4	8
합계	11	9	20

이 조사에 참여한 학생 20명 중에서 임의로 선택한 한 명이 진로활동 B를 선택한 학생일 때, 이 학생이 1학년일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{9}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{11}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

정 답 ②

해 설

먼저, B를 선택한 학생의 총 수는 9명이다.
이 중 1학년 학생은 5명이다.

따라서 확률은 $\frac{5}{9}$이다.

02 2023학년도 9월 24번 정답률 61%

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=1,\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B|A)$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{11}{16}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

정 답 ③

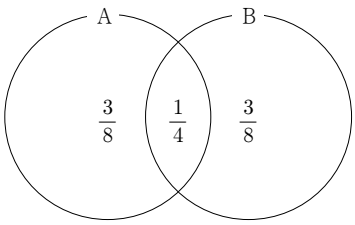
해 설

STEP1 조건 분석하기

$P(A|B)=P(B|A)$이므로 $P(A)=P(B)$이다.

STEP2 답 구하기

벤다이어그램을 그려보면 $P(A)=\frac{5}{8}$이다.



03 2024학년도 6월 24번 정답률 69%

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{9},\quad \mathrm{P}(B^C)=\frac{7}{18}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{11}{18}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{13}{18}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

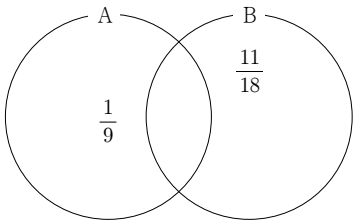
정 답 ④

해 설

벤다이어그램을 그려보면 A만의 영역은 $\frac{1}{9}$이고,

B의 여집합으로 인하여 $P(B)=\frac{11}{18}$이다.

따라서 $\mathrm{P(A\cup B)}$ $\frac{13}{18}$이다.



04 2024학년도 9월 25번 정답률 46%

25. 두 사건 A, B에 대하여 A와 B^C은 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5},\quad \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{7}{10}$$

일 때, $\mathrm{P}(A^C\cap B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

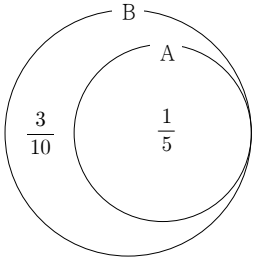
정 답 ③

해 설

A와 B^C가 배반 사건이므로 A는 B의 부분집합이다.
(개념쪽 참고하세요.)

$P(A\cap B)=P(A)=\frac{1}{5}$가 되고, $P(B)=\frac{1}{2}$이다.

따라서 $P(A^c\cap B)=\frac{3}{10}$이다.



05 2024학년도 수능 24번 정답률 61%

24. 두 사건 A, B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(A)$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

정 답 ④

해 설

A와 B가 서로 독립이므로 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}$

이다. 또한, $P(A^{C})=1-P(A)=2P(A)$이므로

$1=3P(A)$에서 $P(A)=\frac{1}{3}$이다.

따라서 $P(B)=\frac{\frac{1}{4}}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$이다.

06 2025학년도 6월 24번 정답률 74%

24. 두 사건 A, B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{5}{6},\quad \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{4}$$

일 때, $\mathrm{P}(B^C)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{11}{24}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{13}{24}$

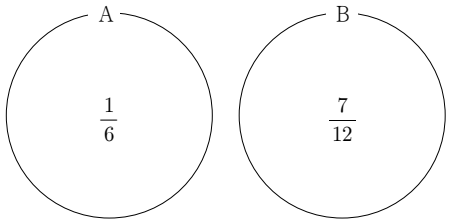
정 답 ②

해 설

A의 여집합 조건을 통하여 $P(A)=\frac{1}{6}$이다.

그리고 합집합 조건을 통하여 $P(B)=\frac{7}{12}$이므로

$P(B^c)=\frac{5}{12}$이다.



07 2025학년도 9월 24번 정답률 50%

24. 두 사건 A, B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3},\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{19}{24}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

정 답 ①

해 설

A와 B가 서로 독립이므로 $\frac{1}{6}=\frac{2}{3}P(B)$에서 $P(B)=\frac{1}{4}$이다.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{3}{4}$

08 2025학년도 수능 24번 정답률 64%

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\,|\,B)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

정 답 ③

해 설

주어진 조건에서 $P(A|B)=P(A)=\frac{1}{2}$이므로

두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$, $\frac{1}{5}=\frac{1}{2}P(B)$이므로

$P(B)=\frac{2}{5}$이다.

따라서 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{7}{10}$이다.

09 2026학년도 6월 24번 정답률 86%

24. 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A\cup B)=1,\ \mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(A)$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

정 답 ④

해 설

배반사건이므로 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cup B)$이다.

조건에서 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cup B)=1$이므로 $\mathrm{P}(A^C)=\mathrm{P}(B)$이다.

따라서, $\mathrm{P}(B)=2\mathrm{P}(A)$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$이다.

10 2026년 실시 9월 24번 정답률 92%

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{6},\ \mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{4}$$

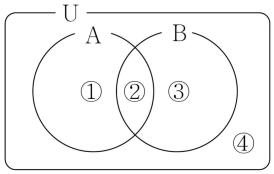
일 때, $\mathrm{P}(A^C)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{11}{24}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

정 답 ③

해 설

벤 다이어그램을 그려서 해결하면 쉽게 풀 수 있다.



위의 4가지 영역에서 ③의 영역이 $\frac{1}{4}$이고, (①+②+③)의 영역이 $\frac{5}{6}$이다.

$\mathrm{P}(A^C)$는 (③+④)이다.

(①+②+③)에서 ③을 빼면, (①+②)이 $\frac{7}{12}$이므로 (③+④)는 $\frac{5}{12}$이다.

PART 2
통계

개념 유형

(1) 이산확률변수의 확률분포
(2) 연속확률변수의 확률분포
(3) 통계적 추정

기출 유형

(1) 이산확률변수를 표로 제시
(2) 이산확률변수를 함수로 제시
(3) 확률변수를 이항분포로 제시
(4) 확률변수를 상황으로 제시
(5) 연속확률변수를 그래프로 제시
(6) 표준정규분포표 제시
(7) 신뢰구간 문제

THEME

1 이산확률변수의 확률분포

정리1 이산확률변수

개념1 확률변수 (Random Variable)

확률변수는 특정 확률 실험의 결과를 숫자로 나타낸 변수로써 예를 들어 확률변수 X: "앞면이 나오는 횟수"라고 정의할 수 있다.

개념2 이산확률변수 (Discrete Random Variable)

확률변수가 가질 수 있는 값의 개수가 셀 수 있을 때를 말한다.
값이 뚝뚝 떨어져 있어 '이산(Discrete, 離散)'이라는 이름이 붙었다. 주로 정수 값을 갖는다.
확률 변수 X가 어떤 값 x를 가질 확률을 기호로 $\mathrm{P}(X=x)$와 같이 나타낸다.

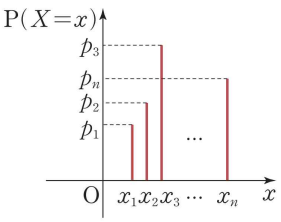
예 두 개의 동전을 동시에 던지는 시행에서 앞면이 나오는 동전의 개수를 확률변수 X라 하자.
우선 확률변수 X가 갖는 값은 $0,\ 1,\ 2$이다. (확률변수가 뚝뚝 떨어져 있으므로 '이산확률변수'라고 이름을 붙인다!)

개념3 확률질량함수 (Probability Mass Function)

확률질량함수는 이산확률변수에서 각각의 값이 나올 확률을 알려주는 함수이다.

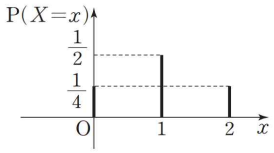
① 확률질량함수는 값이 셀 수 있는 이산확률변수에만 사용된다. (주사위 눈금, 동전 앞면 개수 등)
② 함수 값($P(X=x)$)은 확률을 의미한다. 따라서 함수 값은 항상 0 이상 1 이하 ($0 \le P(X=x) \le 1$이다.)
③ 확률변수가 가질 수 있는 모든 값에 대한 확률을 다 더하면 항상 1이 된다.

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1



예 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X가 갖는 값은 $0,\ 1,\ 2$이므로
X는 이산확률변수이고, X의 확률질량함수는 $\mathrm{P}(X=x)={}_2C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}=\frac{{}_2C_x}{4}$ $(x=0,1,2)$이다.
이때 확률변수 X의 확률분포를 표와 그래프로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1



정리2 기댓값, 분산, 표준편차

개념1 기댓값 (Expected Value)

기댓값($E(X)$)는 평균과 같은 개념이다. 어떤 확률적인 실험을 무수히 많이 반복했을 때, 평균적으로 기대할 수 있는 값을 의미한다. 데이터의 중심이 어디인지를 알려주는 대표적인 값이다.

예를 들어 주사위를 한 번 던질 때 나오는 눈의 기댓값은 $\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5$이다.

실제로 3.5라는 눈은 없지만 주사위를 수천, 수만 번 던져 나온 눈의 평균을 내면 3.5에 가까워진다는 의미이다.

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i \ (i=1,2,3,\cdots,n)$일 때,

① 기댓값(평균): $E(X)=m=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i \Rightarrow E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$

② 제곱기댓값: $E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i$

개념2 분산 (Variance)

분산($V(X)$)는 데이터가 기댓값(평균)으로부터 얼마나 넓게 흩어져 있는지를 나타내는 지표이다.
따라서 분산이 클수록 데이터들이 평균에서 멀리, 넓게 흩어져 있다는 뜻이다

$V(X)=E(X-m)^2)=(x_i-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n$ ← 계산의 편의성을 위해 $E(X)=m$으로 두자.

$=(x_1^2p_1+x_2^2p_2+\cdots+x_n^2p_n)-2m(x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n)+m^2(p_1+p_2+\cdots+p_n)$

$=E(X^2)-2m^2+m^2$ ← $x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=m$이고 $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$을 대입하자.

$=E(X^2)-[E(X)]^2$이므로 $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

개념3 표준편차 (Standard Deviation)

표준편차(σ)는 분산의 단점을 보완한 것이다. 분산에 제곱근($\sqrt{\ }$)을 씌워 계산하며, 데이터가 평균으로부터 평균적으로 얼마나 떨어져 있는지를 나타낸다. 예를 들어 "우리 반 성적의 표준편차가 5점이다"라는 것은 학생들의 점수가 평균 점수를 기준으로 대략 ±5점 범위 안에 많이 분포한다는 의미로 해석할 수 있다.

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

개념4 평균, 분산, 표준편차의 성질

확률변수 X와 두 상수 a, b $(a\neq0)$에 대하여

① $E(aX+b)=aE(X)+b$ (그대로)
② $E(aX^2+bX+c)=aE(X^2)+bE(X)+c$
③ $V(aX+b)=a^2V(X)$ (계수만 제곱)
④ $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$ (계수만 절댓값)

예제1 기댓값, 분산, 표준편차

한 개의 동전을 세 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 할 때, 기댓값과 분산을 구하시오.

해설

확률변수 X가 갖는 값이 0, 1, 2, 3이고 X의 확률질량함수는 $\mathrm{P}(X=x)={}_3C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}=\frac{{}_3C_x}{8}$

$(x=0, 1, 2, 3)$

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

① $E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

② $E(X^2)=0+\left(1^2\cdot\frac{3}{8}\right)+\left(2^2\cdot\frac{3}{8}\right)+\left(3^2\cdot\frac{1}{8}\right)$
$=\frac{3}{8}+\frac{12}{8}+\frac{9}{8}=3$

③ $V(X)=3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$

TIP 분포가 대칭일 때 기댓값은?

분포 $P(X=x)$가 대칭이면 기댓값은 그 대칭의 중심이므로 위 문제에서 바로 $E(X)=\frac{3}{2}$임을 알 수 있다.

예제2 기댓값, 분산, 표준편차의 성질

이산확률변수 X에 대하여 $E(X)=6$, $V(X)=9$일 때, 확률변수 $2X+1$의 평균, 분산, 표준편차를 구하시오.

해설

① $E(2X+1)=2E(X)+1=2\times6+1=13$

② $V(2X+1)=2^2V(X)=4\times9=36$

③ $\sigma(2X+1)=|2|\sigma(X)=2\times\sqrt{9}=6$

정리3 이항분포

개념1 이항분포 (Binomial Distribution)

어떤 실험에서 성공 또는 실패, 두 가지 결과만 나오는 경우 이 실험을 여러 번 반복했을 때 특정 횟수만큼 성공할 확률이 어떻게 분포하는지를 알려준다.

이항분포가 성립하려면 다음 조건을 반드시 만족해야 한다.

① 정해진 횟수(n): 동전을 10번 던지거나, 자유투를 5번 시도하는 것처럼 시행 횟수가 미리 정해져 있어야 한다.
② 독립 시행: 각 시행의 결과가 다른 시행의 결과에 영향을 주지 않아야 한다.
(예: 첫 번째 동전 던지기 결과가 두 번째에 영향을 주지 않음)
③ 두 가지 결과: 각 시행의 결과는 '성공' 또는 '실패'처럼 오직 두 가지로만 구분되어야 한다. (예: 앞면/뒷면, 합격/불합격)
④ 일정한 성공 확률(p): 모든 시행에서 '성공'할 확률은 p로 동일해야 한다. (예: 동전의 앞면이 나올 확률은 항상 $\frac{1}{2}$)

그러므로 X의 확률질량함수는 $\mathrm{P}(X=x)={}_nC_x p^x q^{n-x}$ ($x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$이고 $q=1-p$)이다.

이러한 조건을 만족하는 확률변수 X는 이항분포 $B(n, p)$를 따른다고 표현한다.

개념2 이항분포의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때

① 기댓값 : $E(X)=np$
② 제곱기댓값: $E(X^2)=n(n-1)p^2+np$
② 분산 : $V(X)=np(1-p)$
③ 표준편차 : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{np(1-p)}$

예제3 이항분포

어떤 농구 선수의 자유투 성공률은 80%라고 한다.
이 선수가 자유투를 30번 시도할 때, 성공하는 횟수를 확률변수 X라고 하자. 기댓과 분산을 구하시오.

해설

주어진 조건을 정리하면
- 시행 횟수 $n=30$
- 성공 확률 $p=0.8$
- 실패 확률 $q=0.2$

기댓값은 $E(X)=30\times0.8=24$으로, 이 선수는 평균적으로 24번의 자유투를 성공할 것으로 기대된다.
분산은 $V(X)=30\times0.8\times0.4.8$이다.

THEME

2 연속확률변수의 확률분포

정리1 연속확률변수

개념1 연속확률변수

연속확률변수는 특정 범위 안의 모든 실수 값을 가질 수 있는 변수를 말합니다. 키, 몸무게, 시간처럼 값이 딱딱 끊어지지 않고 연속적으로 이어지는 경우이다.

• 이산확률변수 (Discrete):
주사위 눈(1, 2, 3…)이나 동전의 앞면 개수처럼 값이 뚝뚝 끊어져 있어 셀 수 있다.
$P(X=2)$처럼 특정 값의 확률을 정확히 구할 수 있다.

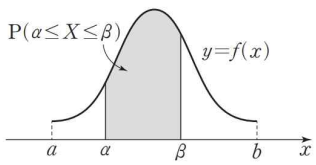
• 연속확률변수 (Continuous)
키나 몸무게처럼 값이 끊임없이 이어져 있어 셀 수 없다.
예를 들어, "키가 정확히 $175cm$일 확률"은 0이다. $175.0001cm$, $174.9999cm$ 등 무한히 많은 가능성이 있기 때문이다.
따라서 "키가 $174cm$에서 $176cm$ 사이일 확률"처럼 구간(범위)의 확률로만 의미를 가진다.

개념2 확률밀도함수(Probability Density Function)

연속확률변수에서는 특정 값의 확률을 말할 수 없으므로, 확률밀도함수라는 특별한 함수를 사용한다.
이 함수는 그래프로 그려지며, 확률은 그래프 아래의 면적으로 정의된다.

일반적으로 $a \leq X \leq b$의 모든 실수의 값을 가지는 연속확률변수 X에 대하여 $a \leq x \leq b$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음의 세 가지를 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$를 연속확률변수 X의 확률밀도함수라고 한다.

① $f(x) \geq 0$
② 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.
③ $\mathrm{P}(\alpha \leq X \leq \beta)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. (단, $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$)
④ 연속확률변수 X가 하나의 값을 가질 확률은 0이다.
$\mathrm{P}(X=\alpha)=\mathrm{P}(X=\beta)=0$
$\mathrm{P}(\alpha<X<\beta)=\mathrm{P}(\alpha \leq X<\beta)=\mathrm{P}(\alpha<X \leq \beta)=\mathrm{P}(\alpha \leq X \leq \beta)$



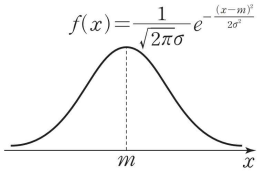
정리2 정규분포

개념1 정규분포 (Normal Distribution)

정규분포는 평균을 중심으로 좌우가 대칭인 종 모양(Bell Shape)의 곡선이다.
정규분포의 모양은 오직 평균(m)과 표준편차(σ)의 두 가지 값으로 결정된다.

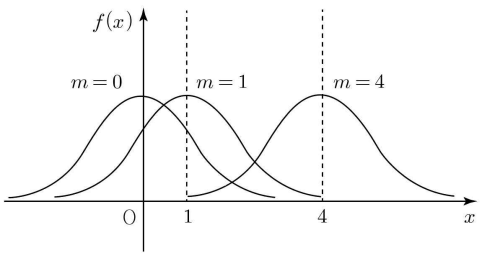
연속확률변수 X가 모든 실수의 값을 갖고, 그 확률밀도함수 $f(x)$가 두 상수 m, σ $(\sigma>0)$에 대하여

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (e\text{는 } 2.718281\cdots\text{인 무리수})$$

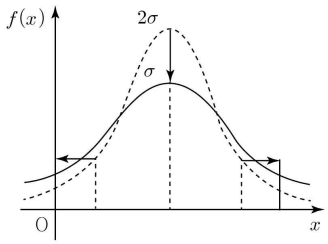


일 때 X의 확률분포를 정규분포라고 한다.
이때 확률변수 X의 평균과 표준편차는 각각 m, σ임이 알려져 있다.
또한 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$과 같이 나타내고, 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$을 따른다고 한다.

① 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이고, 점근선은 x축이다.
② 그래프와 x축 사이의 넓이는 1이다.
③ σ의 값이 일정할 때, m의 값이 달라지면 대칭축의 위치는 바뀌지만 그래프의 모양은 변하지 않는다.
④ m의 값이 일정할 때, σ의 값이 클수록 가운데 부분의 높이는 낮아지면서 옆으로 퍼진 모양이 된다



[기댓값이 커질 때]



[표준편차가 커질 때]

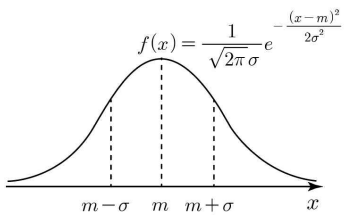
TIP 대칭인 함수의 성질

① $f(x)=f(2m-x)$
② $f(m+x)=f(m-x)$

개념2 확률변수에 따른 정규분포

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$을 따를 때, 다음을 만족시킨다.

① $\mathrm{P}(X\leqq m)=\mathrm{P}(X\geqq m)=0.5$
② $\mathrm{P}(m-\sigma\leqq X\leqq m)=\mathrm{P}(m\leqq X\leqq m+\sigma)$
③ $\mathrm{P}(m-k\sigma\leqq X\leqq m)=\mathrm{P}(m\leqq X\leqq m+k\sigma)$ (단, k는 양의 상수)

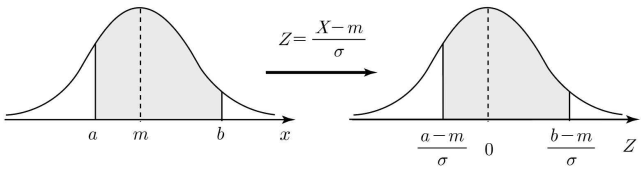


정리3 표준정규분포

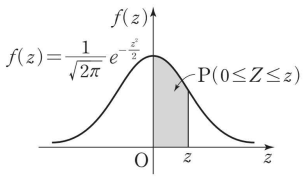
개념1 표준정규분포 (Standard Normal Distribution)

세상에는 평균과 표준편차가 각기 다른 무한히 많은 정규분포가 존재한다.
A 학교 학생들의 성적 분포와 B 학교 학생들의 성적 분포를 직접 비교하기 어려운 것처럼, 기준이 다르면 확률을 계산하고 비교하기가 매우 복잡하다. 따라서 문제점을 해결하기 위해 모든 정규분포를 통일된 기준으로 변환을 해보자.
이것이 바로 표준정규분포이다.

① 평균(m)은 0, 표준편차(σ)는 1로 고정되어 있다.
($\mathrm{N}(0,1)$로 표기)
② 표준화: 일반 정규분포를 표준정규분포로 바꾸는 과정을 '표준화'라고 한다. 이 과정을 통해 어떤 데이터 값이든 평균으로부터 표준편차의 몇 배만큼 떨어져 있는지를 나타내는 Z-점수(Z-score): $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$로 변환할 수 있다.



③ 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따를 때,
Z의 확률밀도함수 $f(z)$는 $f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$ (e는 2.718281…인 무리수)이다.
이때 임의의 양수 a에 대하여 $\mathrm{P}(0\leqq Z\leqq a)$는 오른쪽 그림에서 색칠된 부분의 넓이와 같다.



예 서로 다른 시험을 본 두 학생 A, B의 성적을 비교해보자.
- A 학생: 수학 시험에서 80점을 받음 (반 평균 70점, 표준편차 5점)
- B 학생: 영어 시험에서 85점을 받음 (반 평균 75점, 표준편차 10점)

점수만 보면 B 학생이 더 잘한 것 같지만, 각 시험의 난이도와 분포가 다르므로 직접 비교는 무의미하다.
이때 Z-점수를 구하면 상대적인 위치를 알 수 있다.

$\mathrm{Z_A}=\dfrac{80-70}{5}=+2$, $\mathrm{Z_B}=\dfrac{85-75}{10}=+1$

결론적으로 Z-점수가 더 높은 A 학생이 상대적으로 더 우수한 성적을 받은 것을 알 수 있습니다.

예 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따를 때 $\mathrm{P}(0\leqq Z\leqq a)$의 값은 표준정규분포표를 이용하여 구할 수 있다.

예를 들어 $\mathrm{P}(0\leqq Z\leqq 1.96)$의 값은 표준정규분포표의 왼쪽에 있는 수 중에서 1.9를 찾고, 표의 위쪽에 있는 수 중에서 0.06을 찾아 1.9의 가로줄과 0.06의 세로줄이 만나는 곳의 수를 찾으면 된다.
즉, $\mathrm{P}(0\leqq Z\leqq 1.96)=0.4750$이다.

z	0.00	0.01	…	0.06	…
0.0	.0000	.0040	…	.0239	…
0.1	.0398	.0438	…	.0636	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.9	.4713	.4719	…	.4750	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

예 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(8,2^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(6\leqq X\leqq 10)$의 값을 구해보자.

$Z=\dfrac{X-8}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따르고,
표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\leqq Z\leqq 1)=0.3413$이므로

$\mathrm{P}(6\leqq X\leqq 10)=\mathrm{P}\left(\dfrac{6-8}{2}\leqq\dfrac{X-8}{2}\leqq\dfrac{10-8}{2}\right)=\mathrm{P}(-1\leqq Z\leqq 1)$

$=2\mathrm{P}(0\leqq Z\leqq 1)=2\times 0.3413=0.6826$이다.

z	$\mathrm{P}(0\leqq Z\leqq z)$
1.0	0.3413
1.1	0.3643
1.2	0.3849
1.3	0.4032

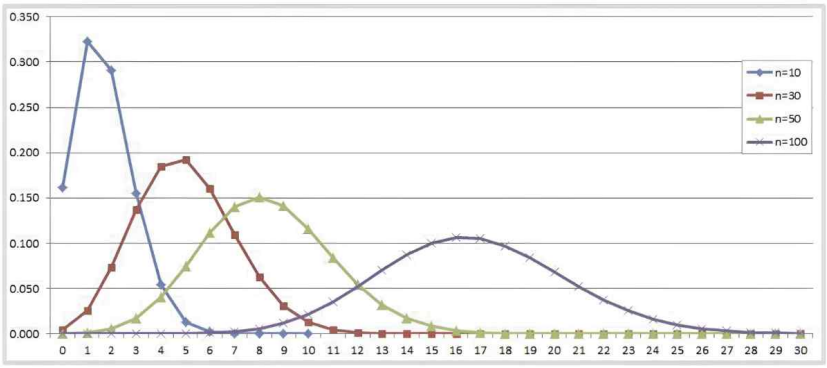
정리4 이항분포와 정규분포의 관계

개념1 이항분포와 정규분포의 관계를 나타내는 그래프

한 개의 주사위를 n번 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

그림은 주사위를 던지는 횟수가 $n=10$, $n=30$, $n=50$일 때의 이항분포를 그래프로 나타낸 것이다.

일반적으로 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$의 그래프는 n의 값이 커지면 정규분포의 확률밀도함수의 그래프에 가까워짐이 알려져 있다.



개념2 이항분포와 정규분포의 관계

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따를 때 n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np, npq)$를 따른다. (단, $q=1-p$)

이때 확률변수 $Z=\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다.

(일반적으로 $np \geq 5$, $nq \geq 5$이면 n이 충분히 큰 것으로 생각한다.)

예 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{2}\right)$을 따를 때, $\mathrm{P}(55 \leq X \leq 60)$의 값을 구해 보자.

$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{2}=50$, $\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=25$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50, 5^2)$을 따르고,

$Z=\dfrac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다.

표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)=0.3413$, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)=0.4772$이므로

$\mathrm{P}(55 \leq X \leq 60)=\mathrm{P}\left(\dfrac{55-50}{5} \leq \dfrac{x-50}{5} \leq \dfrac{60-50}{5}\right)=\mathrm{P}(1 \leq Z \leq 2)=\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)=0.4772-0.3413=0.1359$이다.

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.1	0.3643
1.2	0.3849
1.3	0.4032

THEME

3 통계적 추정

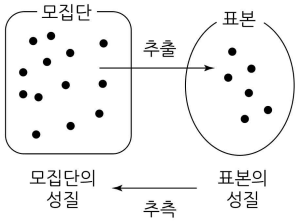
정리1 모집단과 표본

개념1 모집단과 표본

① 통계 조사에서 조사의 대상이 되는 집단 전체를 모집단이라 하고, 조사하기 위하여 모집단에서 뽑은 일부분을 표본이라고 한다. 이때 모집단에서 표본을 뽑는 것을 추출이라고 한다.

② 통계 조사에서 모집단 전체를 조사하는 것을 전수조사라 하고, 모집단의 일부분, 즉 표본을 조사하는 것을 표본조사라고 한다. 이때 표본에 포함된 대상의 개수를 표본의 크기라고 한다.

③ 모집단에서 표본을 추출할 때, 모집단에 속하는 각 대상이 같은 확률로 추출되도록 하는 방법을 임의추출이라고 한다.



전수조사	표본조사
• 자료의 특성을 정확히 알 수 있다. • 많은 시간과 비용이 필요하다.	• 자료의 특성을 근사적으로 알 수 있다. • 시간과 비용을 절약해야 하는 경우에 사용한다.

정리2 모평균, 표본평균

개념1 모평균과 표본평균

① 어떤 모집단에서 조사하고자 하는 특성을 나타내는 확률변수를 X라 할 때, X의 평균, 분산, 표준편차를 각각 모평균, 모분산, 모표준편차라 하고, 기호로 각각 m, σ^2, σ와 같이 나타낸다.

② 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본을 X_1, X_2, X_3, $\cdots$, X_n이라 할 때, 이 표본의 평균, 분산, 표준편차를 각각 표본평균, 표본분산, 표본표준편차라 하고, 기호로 $\overline{X}$, S^2, S와 같이 나타낸다.
이때 $\overline{X}$, S^2, S는 다음과 같이 구한다.

- $\overline{X}=\dfrac{1}{n}(X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n)$
- $S^2=\dfrac{1}{n-1}\left\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+(X_3-\overline{X})^2+\cdots+(X_n-\overline{X})^2\right\}$ (단, $n\geq 2$)
- $S=\sqrt{S^2}$

개념2 표본평균의 확률분포

모평균 m은 고정된 상수이지만 표본평균 $\overline{X}$는 임의추출된 표본에 따라 여러 가지 값을 가질 수 있으므로 확률변수이다.
따라서 $\overline{X}$의 확률분포를 구할 수 있다.

예 모집단의 확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때, 이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본 (X_1, X_2)와 그 표본평균 $\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2}{2}$는 다음과 같다.

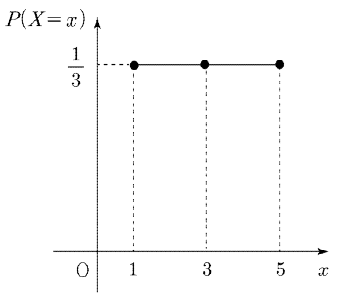
X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

(X_1, X_2)	$(1, 1)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 1)$	$(2, 2)$	$(2, 3)$	$(3, 1)$	$(3, 2)$	$(3, 3)$
$\overline{X}$	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

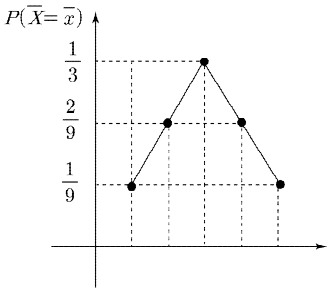
따라서 표본평균 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.
이때 $\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\mathrm{P}(X=1)\times\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$

$\overline{X}$	1	1.5	2	2.5	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

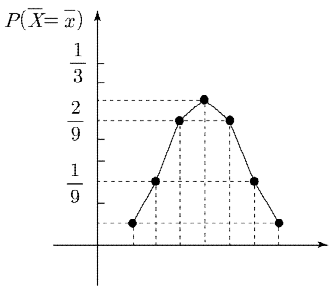
표본의 크기가 커지면 표본평균 $\overline{X}$의 그래프는 정규분포에 가까워진다.



모집단의 분포



$\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2}{2}$의 분포



$\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}$의 분포

정리3 표본평균의 평균, 분산, 표준편차

개념1 표본평균의 평균, 분산, 표준편차

모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 다음이 성립한다.

① $\mathrm{E}(\overline{X})=m$

② $V(\overline{X})=\dfrac{V(X)}{n}=E(\overline{X}^2)-[E(\overline{X})]^2$

③ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

예 모집단의 확률변수 X의 확률분포가 표와 같을 때, 모평균 m, 모분산 σ^2, 모표준편차 σ는 각각 다음과 같다.

$m=2\times\dfrac{1}{3}+4\times\dfrac{1}{3}+6\times\dfrac{1}{3}=4$

$\sigma^2=2^2\times\dfrac{1}{3}+4^2\times\dfrac{1}{3}+6^2\times\dfrac{1}{3}-4^2=\dfrac{8}{3}$

$\sigma=\sqrt{\dfrac{8}{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

X	2	4	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 (X_1, X_2)라 할 때, 그 표본평균 $\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2}{2}$가 갖는 값은 2, 3, 4, 5, 6이고 확률변수 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

$\mathrm{E}(\overline{X})=2\times\dfrac{1}{9}+3\times\dfrac{2}{9}+4\times\dfrac{1}{3}+5\times\dfrac{2}{9}+6\times\dfrac{1}{9}=4$

$\mathrm{V}(\overline{X})=2^2\times\dfrac{1}{9}+3^2\times\dfrac{2}{9}+4^2\times\dfrac{1}{3}+5^2\times\dfrac{2}{9}+6^2\times\dfrac{1}{9}-4^2=\dfrac{4}{3}$

$\sigma(\overline{X})=\sqrt{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

이때 표본의 크기가 $n=2$이므로 $\dfrac{\sigma^2}{n}=\dfrac{8}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 다음이 성립한다.

① $\mathrm{E}(\overline{X})=4=m$

② $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{4}{3}=\dfrac{\sigma^2}{\sqrt{n}}$

③ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

정리4 표본평균의 분포

개념1 표본평균의 분포

모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 다음이 성립한다.

① 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$을 따른다.

② 모집단이 정규분포를 따르지 않을 때에도 표본의 크기 n이 충분히 크면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$을 따른다.

예 모집단의 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50, 8^2)$을 따르고, 이 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출할 때 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$m = E(X) = 50$, $\sigma^2 = V(X) = 8^2 = 64$이므로 $E(\overline{X}) = E(X) = 50$, $V(\overline{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{64}{4} = 16$

따라서 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(50, 4^2)$을 따른다.

예 정규분포 $\mathrm{N}(50, 8^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출할 때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(50, 4^2)$을 따르므로 확률변수 $Z = \frac{\overline{X} - 50}{4}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다. 따라서 $\mathrm{P}(\overline{X} \geq 54)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구해 보면 다음과 같다.

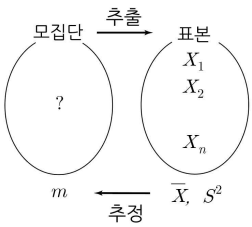
$\mathrm{P}(\overline{X} \geq 54) = \left(\frac{\overline{X} - 50}{4} \geq \frac{54 - 50}{4} \right) = \mathrm{P}(Z \geq 1) = 0.5 - \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$이다.

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

정리4 모평균의 추정

개념1 추정

표본조사에서 모집단의 일부인 표본을 조사하여 얻은 정보로부터 모집단의 성질을 확률적으로 추측하는 것을 추정이라고 한다.
모평균의 추정은 크기가 n인 표본을 단 한 번 추출하여 얻은 표본평균과 표본분산을 이용하여 모평균의 범위를 추정하는 일회성 과정이다.



- 점추정: 전국 고등학생의 하루 평균 공부 시간을 예측할 때, "아마 6.5시간일 거야"라고 하나의 값으로 콕 집어 예측하는 방식
- 구간추정: 같은 상황에서, "아마 6시간에서 7시간 사이에 있을 거야"라고 구간(범위)으로 예측하는 방식
  현실에서는 구간 추정이 훨씬 더 유용하며, 이때 '신뢰도'의 개념이 함께 사용된다.

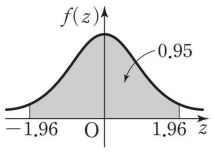
개념2 신뢰도

신뢰도는 우리가 예측한 구간이 실제 모집단의 값(모수)을 포함할 것이라고 믿는 정도를 확률로 나타낸 것이다.
보통 95%나 99%를 사용한다.
"신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간은 [6시간, 7시간]이다."
이런 방식으로 100번 조사를 반복하면, 그중 95번은 우리가 만든 구간([6시간, 7시간]과 같은) 안에 실제 평균 공부 시간이 포함될 것이라고 기대할 수 있다는 뜻이다.

개념3 모평균의 추정

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 크기가 n인 표본을 임의추출하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따르고,

확률변수 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.



이때 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(-1.96 \leq \mathrm{Z} \leq 1.96)=0.95$이므로

$$P\left(-1.96 \leq \frac{\overline{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 1.96\right)=P\left(-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X}-m \leq 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$

따라서 모집단으로부터 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 할 때,

- 신뢰도 95%의 신뢰구간 : $\overline{x}-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x}+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- 신뢰도 99%의 신뢰구간 : $\overline{x}-2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x}+2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

따라서 신뢰구간의 길이는 $l=2k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다.

유형 01 이산확률변수를 표로 제시

01 2022학년도 9월 29번 정답률 73%

29. 두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	3	5	7	9	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	b	a	1

Y	1	3	5	7	9	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$a+\frac{1}{20}$	b	$c-\frac{1}{10}$	b	$a+\frac{1}{20}$	1

$\mathrm{V}(X)=\frac{31}{5}$ 일 때, $10\times\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오. [4점]

02 2023학년도 9월 27번 정답률 44%

27. 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	a	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	1

$\sigma(X)=\mathrm{E}(X)$일 때, $\mathrm{E}(X^2)+\mathrm{E}(X)$의 값은? (단, $a>1$) [3점]

① 29 ② 33 ③ 37 ④ 41 ⑤ 45

유형 02 이산확률변수를 함수로 제시

01 2025학년도 9월 27번 정답률 59%

27. 이산확률변수 X가 가지는 값이 0부터 4까지의 정수이고

$$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(X=k+2)\ (k=0,\ 1,\ 2)$$

이다. $\mathrm{E}(X^2)=\dfrac{35}{6}$일 때, $\mathrm{P}(X=0)$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{24}$ ② $\dfrac{1}{12}$ ③ $\dfrac{1}{8}$ ④ $\dfrac{1}{6}$ ⑤ $\dfrac{5}{24}$

유형 03 확률변수를 이항분포로 제시

01 2022학년도 9월 23번 정답률 82%

23. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(60, \frac{1}{4}\right)$을 따를 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? [2점]

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

02 2022학년도 수능 24번 정답률 64%

24. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르고 $\mathrm{V}(2X)=40$일 때, n의 값은? [3점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

03 2024학년도 9월 23번 정답률 78%

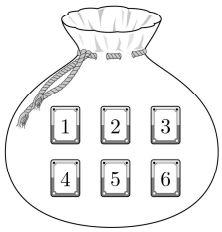
23. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(30, \frac{1}{5}\right)$을 따를 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

유형 04 확률변수를 상황으로 제시

01 2023학년도 9월 29번 정답률 8%

29. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 네 개의 수의 평균을 $\overline{X}$ 라 할 때, $\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{11}{4}\right)=\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



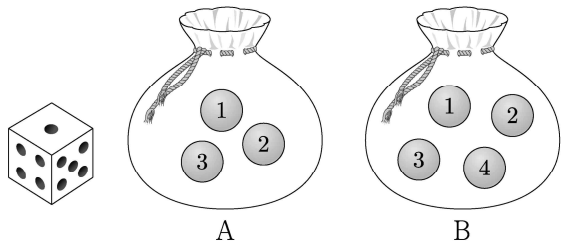
02 2024학년도 9월 28번 정답률 27%

28. 주머니 A에는 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적힌 3개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4개의 공이 들어 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 3의 배수이면
> 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고,
> 나온 눈의 수가 3의 배수가 아니면
> 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다.
> 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 차를 기록한 후,
> 공을 꺼낸 주머니에 이 2개의 공을 다시 넣는다.

이 시행을 2번 반복하여 기록한 두 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $P(\overline{X}=2)$의 값은? [4점]

① $\frac{11}{81}$ ② $\frac{13}{81}$ ③ $\frac{5}{27}$ ④ $\frac{17}{81}$ ⑤ $\frac{19}{81}$



03 2024학년도 수능 26번 정답률 36%

26. 4개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 나오는 동전의 개수를 확률변수 X라 하고, 이산확률변수 Y를

$$Y=\begin{cases} X & (X\text{가 } 0 \text{ 또는 } 1\text{의 값을 가지는 경우}) \\ 2 & (X\text{가 } 2 \text{ 이상의 값을 가지는 경우}) \end{cases}$$

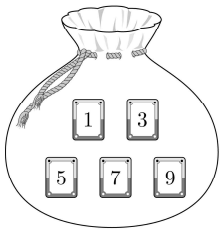
라 하자. $\mathrm{E}(Y)$의 값은? [3점]

① $\frac{25}{16}$ ② $\frac{13}{8}$ ③ $\frac{27}{16}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{29}{16}$

04 2025학년도 수능 27번 정답률 28%

27. 숫자 1, 3, 5, 7, 9가 각각 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 1장의 카드를 꺼내어 카드에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 3번 반복하여 확인한 세 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{V}(a\overline{X}+6)=24$일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



05 2025학년도 9월 27번 정답률 67%

27. 각 면에 숫자 1, 2, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 서로 다른 상자 2개가 있다. 이 두 상자를 동시에 던져서 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 두 수의 차를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{V}(X)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{5}{16}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{7}{16}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

06 2025년 실시 수능 24번 정답률 19%

27. 이산확률변수 X가 가지는 값이 0부터 4까지의 정수이고

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases}\dfrac{|2x-1|}{12} & (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)\\ a & (x=4)\end{cases}$$

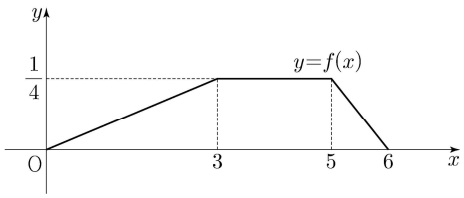
일 때, $\mathrm{V}\left(\frac{1}{a}X\right)$의 값은? (단, a는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

① 36 ② 39 ③ 42 ④ 45 ⑤ 48

유형 05 연속확률변수를 그래프로 제시

01 2022학년도 수능 29번 정답률 8%

29. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 6$, $0 \le Y \le 6$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



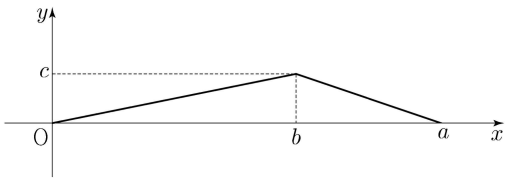
$0 \le x \le 6$인 모든 x에 대하여

$$f(x)+g(x)=k \ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킬 때, $\mathrm{P}(6k \le Y \le 15k)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

02 2023학년도 수능 28번 정답률 45%

28. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le a$이고, X의 확률밀도함수의 그래프가 그림과 같다.



$\mathrm{P}(X \le b)-\mathrm{P}(X \ge b)=\dfrac{1}{4}$, $\mathrm{P}(X \le \sqrt{5})=\dfrac{1}{2}$일 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

① $\dfrac{11}{2}$ ② 6 ③ $\dfrac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\dfrac{15}{2}$

유형 06 표준정규분포표 제시

01 2022학년도 9월 27번 정답률 41%

27. 지역 A에 살고 있는 성인들의 1인 하루 물 사용량을 확률변수 X, 지역 B에 살고 있는 성인들의 1인 하루 물 사용량을 확률변수 Y라 하자. 두 확률변수 X, Y는 정규분포를 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 두 확률변수 X, Y의 평균은 각각 220과 240이다.
> (나) 확률변수 Y의 표준편차는 확률변수 X의 표준편차의 1.5배이다.

지역 A에 살고 있는 성인 중 임의추출한 n명의 1인 하루 물 사용량의 표본평균을 $\overline{X}$, 지역 B에 살고 있는 성인 중 임의추출한 $9n$명의 1인 하루 물 사용량의 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X} \le 215) = 0.1587$일 때, $\mathrm{P}(\overline{Y} \ge 235)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 물 사용량의 단위는 L이다.) [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915 ② 0.7745 ③ 0.8185
④ 0.8413 ⑤ 0.9772

02 2024학년도 9월 26번 정답률 62%

26. 어느 고등학교의 수학 시험에 응시한 수험생의 시험 점수는 평균이 68점, 표준편차가 10점인 정규분포를 따른다고 한다. 이 수학 시험에 응시한 수험생 중 임의로 선택한 수험생 한 명의 시험 점수가 55점 이상이고 78점 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.1	0.3643
1.2	0.3849
1.3	0.4032

① 0.7262 ② 0.7445 ③ 0.7492 ④ 0.7675 ⑤ 0.7881

03 2024학년도 수능 30번 정답률 13%

30. 양수 t에 대하여 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(1, t^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X \le 5t) \ge \frac{1}{2}$$

이 되도록 하는 모든 양수 t에 대하여 $\mathrm{P}(t^2-t+1 \le X \le t^2+t+1)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자. $1000 \times k$의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

04 2025학년도 9월 29번 정답률 13%

29. 수직선의 원점에 점 A가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가
> 4 이하이면 점 A를 양의 방향으로 1만큼 이동시키고,
> 5 이상이면 점 A를 음의 방향으로 1만큼 이동시킨다.

이 시행을 16200번 반복하여 이동된 점 A의 위치가 5700 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자. $1000 \times k$의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494

05 2025학년도 수능 29번 정답률 23%

29. 정규분포 $\mathrm{N}(m_1,\ \sigma_1^2)$을 따르는 확률변수 X와 정규분포 $\mathrm{N}(m_2,\ \sigma_2^2)$을 따르는 확률변수 Y가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 x에 대하여
> $\mathrm{P}(X \le x) = \mathrm{P}(X \ge 40 - x)$이고
> $\mathrm{P}(Y \le x) = \mathrm{P}(X \le x + 10)$이다.

$\mathrm{P}(15 \le X \le 20) + \mathrm{P}(15 \le Y \le 20)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것이 0.4772일 때, $m_1 + \sigma_2$의 값을 구하시오. (단, σ_1과 σ_2는 양수이다.) [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

06 2026학년도 9월 29번 정답률 32%

29. 두 집합 $A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{2, 3\}$에 대하여 다음 시행을 한다.

> 집합 A의 모든 부분집합 8개 중에서
> 임의로 한 개를 선택하고,
> 집합 B의 모든 부분집합 4개 중에서
> 임의로 한 개를 선택한다.
> 선택한 두 집합의 교집합의 원소의 개수를 기록한다.

이 시행을 15360번 반복하여
기록한 수가 1인 횟수가
5880 이상일 확률을
오른쪽 표준정규분포표를 이용하여
구한 값이 k일 때,
$1000\times k$의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494
3.0	0.499

07 2025년 실시 수능 29번 정답률

32%

29. 6 이하의 자연수 a에 대하여 한 개의 주사위와 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 a보다 작거나 같으면
> 동전을 5번 던져 앞면이 나온 횟수를 기록하고,
> 나온 눈의 수가 a보다 크면
> 동전을 3번 던져 앞면이 나온 횟수를 기록한다.

이 시행을 19200번 반복하여 기록한 수가 3인 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)=4800$일 때, $\mathrm{P}(X \le 4800+30a)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값이 k이다. $1000 \times k$의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.191
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494
3.0	0.499

유형 07 신뢰구간 문제

01 2022학년도 수능 27번 정답률 50%

27. 어느 자동차 회사에서 생산하는 전기 자동차의 1회 충전 주행 거리는 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다.
이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 100대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다.
이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 400대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $c \le m \le d$이다.
$\overline{x_1} - \overline{x_2} = 1.34$이고 $a = c$일 때, $b-a$의 값은? (단, 주행 거리의 단위는 km이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 5.88 ② 7.84 ③ 9.80
④ 11.76 ⑤ 13.72

02 2023학년도 9월 25번 정답률 58%

25. 어느 인스턴트 커피 제조 회사에서 생산하는 A 제품 1개의 중량은 평균이 9, 표준편차가 0.4인 정규분포를 따르고, B 제품 1개의 중량은 평균이 20, 표준편차가 1인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 A 제품 중에서 임의로 선택한 1개의 중량이 8.9 이상 9.4 이하일 확률과 B 제품 중에서 임의로 선택한 1개의 중량이 19 이상 k 이하일 확률이 서로 같다. 상수 k의 값은? (단, 중량의 단위는 g이다.) [3점]

① 19.5 ② 19.75 ③ 20 ④ 20.25 ⑤ 20.5

03 2023학년도 수능 27번 정답률 88%

27. 어느 회사에서 생산하는 샴푸 1개의 용량은 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다고 한다. 이 회사에서 생산하는 샴푸 중에서 16개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $746.1 \le m \le 755.9$이다. 이 회사에서 생산하는 샴푸 중에서 n개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구하는 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$일 때, $b-a$의 값이 6 이하가 되기 위한 자연수 n의 최솟값은? (단, 용량의 단위는 mL이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 70 ② 74 ③ 78 ④ 82 ⑤ 86

04 2024학년도 수능 27번 정답률 47%

27. 정규분포 $\mathrm{N}(m, 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 49인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le \frac{6}{5}a$이다. $\overline{x}$의 값은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

① 15.2 ② 15.4 ③ 15.6 ④ 15.8 ⑤ 16.0

05 2025학년도 9월 26번 정답률 56%

26. 정규분포 $\mathrm{N}(m, 6^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$, 정규분포 $\mathrm{N}(6, 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X} \le 12) + \mathrm{P}(\overline{Y} \ge 8) = 1$이 되도록 하는 m의 값은? [3점]

① 5 ② $\frac{13}{2}$ ③ 8 ④ $\frac{19}{2}$ ⑤ 11

06 2025학년도 수능 25번 정답률 47%

25. 정규분포 $\mathrm{N}(m, 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 256인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다. $b-a$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

① 0.49 ② 0.52 ③ 0.55 ④ 0.58 ⑤ 0.61

07 2026학년도 실시 9월 26번 정답률 79%

26. 평균이 m이고 표준편차가 $2\sqrt{2}$인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 128인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균의 값이 $\overline{x}$일 때, 이를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $\overline{x}-c \le m \le \overline{x}+c$이다. c의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

① 0.47 ② 0.49 ③ 0.51 ④ 0.53 ⑤ 0.55

08 2026학년도 수능 26번 정답률 62%

26. 평균이 m이고 표준편차가 5인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 36인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $1.2 \le m \le a$이다. a의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 5.1 ② 5.2 ③ 5.3 ④ 5.4 ⑤ 5.5

유형 01 이산확률변수를 표로 제시

01 2022학년도 9월 29번 정답률 73%

29. 두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	3	5	7	9	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	b	a	1

Y	1	3	5	7	9	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$a+\frac{1}{20}$	b	$c-\frac{1}{10}$	b	$a+\frac{1}{20}$	1

$\mathrm{V}(X)=\frac{31}{5}$ 일 때, $10\times\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오. [4점]

정 답 78

해 설

STEP1 문제 이해하기

분포가 대칭이면, 기댓값은 그 대칭의 중심이므로
$E(X)=E(Y)=5$이다.

STEP2 답 구하기

분산은 $V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2$이다.
미지수 a, b, c를 소거하기 위해서 두 분산의 차이를 구하면 $V(Y)-V(X)=E(Y^2)-E(X^2)$이다.
정리하면 $V(Y)=V(X)+(E(Y^2)-E(X^2))$이다.

$$E(Y^2)-E(X^2)=1^2\left(\frac{1}{20}\right)+5^2\left(-\frac{1}{10}\right)+9^2\left(\frac{1}{20}\right)=\frac{8}{5}$$

이므로 $10\times V(Y)=10\times\left(\frac{31}{5}+\frac{8}{5}\right)=78$이다.

02 2023학년도 9월 27번 정답률 44%

27. 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	a	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	1

$\sigma(X)=\mathrm{E}(X)$일 때, $\mathrm{E}(X^2)+\mathrm{E}(X)$의 값은? (단, $a>1$) [3점]

① 29 ② 33 ③ 37 ④ 41 ⑤ 45

정 답 ⑤

해 설

조건 $\sigma(X)=E(X)$을 이용해보자.
양변을 제곱하면 $V(X)=(E(X))^2=E(X^2)-(E(X))^2$을 만족하므로 $E(X^2)=2(E(X))^2$이다.

$E(X)=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}a$, $E(X^2)=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}a^2$이므로

위의 조건에 대입하면 $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}a^2=2\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}a\right)^2$ 이고,

정리하면 $2a(a-10)=0$이 되므로 $a=10$이다.

최종적으로 $E(X^2)+E(X)=\frac{81}{2}+\frac{9}{2}=45$이다.

유형 02 이산확률변수를 함수로 제시

01 2025학년도 9월 27번 정답률 59%

27. 이산확률변수 X가 가지는 값이 0부터 4까지의 정수이고

$$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(X=k+2)\ (k=0,\ 1,\ 2)$$

이다. $\mathrm{E}(X^2)=\frac{35}{6}$ 일 때, $\mathrm{P}(X=0)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{5}{24}$

정 답 ④

해 설

이산확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이고,
$P(X=k)=P(X=k+2)$이므로
$P(X=0)=P(X=2)=P(X=4)=p$,
$P(X=1)=P(X=3)=q$로 놓는다.
그러면 전체 확률의 합은 $3p+2q=1$이다.

기댓값 $E(X^2)=0^2p+1^2q+2^2p+3^2q+4^2p=20p+10q=\frac{35}{6}$

따라서 $2p+q=\frac{7}{12}$이다.

두 식을 연립하면 $p=\frac{1}{6}$이다.

유형 03 확률변수를 이항분포로 제시

01 2022학년도 9월 23번 정답률 82%

23. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(60, \frac{1}{4}\right)$을 따를 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? [2점]

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

정 답 ③

해 설

이항분포 $B(n, p)$를 따르는 확률변수 X의 기댓값은

$E(X) = np$이다. 여기서 $n = 60$, $p = \frac{1}{4}$이므로

$E(X) = 60 \times \frac{1}{4} = 15$이다.

02 2022학년도 수능 24번 정답률 64%

24. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르고 $\mathrm{V}(2X) = 40$일 때, n의 값은? [3점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

정 답 ④

해 설

$V(aX) = a^2 V(X)$ 공식을 이용하면 $V(2X) = 4V(X) = 40$

이므로 $V(X) = 10$이다.

이항분포 B의 분산은

$V(X) = np(1-p) = n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2n}{9} = 10$이다.

따라서 $n = 45$이다.

03 2024학년도 9월 23번 정답률 78%

23. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(30, \frac{1}{5}\right)$을 따를 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

정 답 ①

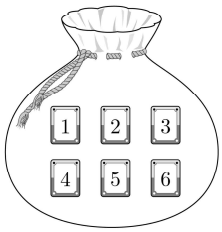
해 설

$E(X) = 30 \times \frac{1}{5} = 6$이다.

유형 04 확률변수를 상황으로 제시

01 2023학년도 9월 29번 정답률 8%

29. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 네 개의 수의 평균을 $\overline{X}$ 라 할 때, $\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{11}{4}\right)=\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



정 답 175

해 설

STEP1 문제 분석하기

$\overline{X}=\frac{11}{4}$라는 것은 뽑은 네 수의 합이 11이 되어야 한다는 의미이므로 이제 문제는 "주사위를 4번 던져 나온 눈의 합이 11이 될 경우의 수는?"이라는 고전적인 문제로 바뀌었다.

STEP2 경우의 수 구하기

$(6, 3, 1, 1)$: 같은 숫자가 2개 있으므로 $\frac{4!}{2!}=12$가지

$(6, 2, 2, 1)$: 같은 숫자가 2개 있으므로 $\frac{4!}{2!}=12$가지

$(5, 4, 1, 1)$: 같은 숫자가 2개 있으므로 $\frac{4!}{2!}=12$가지

$(5, 3, 2, 1)$: 숫자가 모두 다르므로 $4!=24$가지

$(5, 2, 2, 2)$: 같은 숫자가 3개 있으므로가지 $\frac{4!}{3!}=4$가지

$(4, 4, 2, 1)$: 같은 숫자가 2개 있으므로 $\frac{4!}{2!}=12$가지

$(4, 3, 3, 1)$: 같은 숫자가 2개 있으므로 $\frac{4!}{2!}=12$가지

$(4, 3, 2, 2)$: 같은 숫자가 2개 있으므로 $\frac{4!}{2!}=12$가지

$(3, 3, 3, 2)$: 같은 숫자가 3개 있으므로 $\frac{4!}{3!}=4$가지

총 104가지이다.

따라서 확률은 $\frac{104}{6^4}=\frac{13}{162}$이므로 $p+q=175$이다.

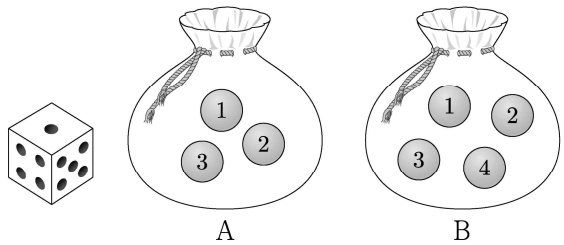
02 2024학년도 9월 28번 정답률 27%

28. 주머니 A에는 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적힌 3개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4개의 공이 들어 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 3의 배수이면
> 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고,
> 나온 눈의 수가 3의 배수가 아니면
> 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다.
> 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 차를 기록한 후,
> 공을 꺼낸 주머니에 이 2개의 공을 다시 넣는다.

이 시행을 2번 반복하여 기록한 두 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X}=2)$의 값은? [4점]

① $\frac{11}{81}$ ② $\frac{13}{81}$ ③ $\frac{5}{27}$ ④ $\frac{17}{81}$ ⑤ $\frac{19}{81}$



정 답 ⑤

해 설

STEP1 1회 시행의 확률분포 구하기

(1) 주머니 선택 확률:

- A 주머니 선택: $P(A)=\frac{1}{3}$
- B 주머니 선택: $P(B)=\frac{2}{3}$

(2) 각 주머니에서 나올 수 있는 차(D)의 확률:

- A 주머니 $\{1,2,3\}$ (총 ${}_3C_2=3$가지)

  차=1: $\{1,2\}$, $\{2,3\}$ ⇒ $P(D=1|A)=\frac{2}{3}$

  차=2: $\{1,3\}$ ⇒ $P(D=2|A)=\frac{1}{3}$
- B 주머니 $\{1,2,3,4\}$ (총 ${}_4C_2=6$가지)

  차=1: $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$ ⇒ $P(D=1|B)=\frac{1}{2}$

  차=2: $\{1,3\}$, $\{2,4\}$ ⇒ $P(D=2|B)=\frac{1}{3}$

  차=3: $\{1,4\}$ ⇒ $P(D=3|B)=\frac{1}{6}$
- 1회 시행의 최종 확률분포 (전체 확률의 법칙 사용)

$$P(D=1)=P(A)P(D=1|A)+P(B)P(D=1|B)$$
$$=\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{9}$$
$$P(D=2)=P(A)P(D=2|A)+P(B)P(D=2|B)$$
$$=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{9}$$
$$P(D=3)=P(A)P(D=3|A)+P(B)P(D=3|B)$$
$$=\left(\frac{1}{3}\times 0\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{9}$$

STEP2 $\overline{X}=2$ 조건 분석하기

두 번의 시행 결과를 각각 X_1, X_2라 할 때,

표본평균 $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}=2$이므로,

$X_1+X_2=4$이다.

STEP3 최종 확률 계산하기

$X_1+X_2=4$가 되는 경우는 다음과 같다. (두 시행은 독립)

CASE 1. $X_1=1$, $X_2=3$

$$P(X_1=1)P(X_2=3)=\frac{5}{9}\frac{1}{9}=\frac{5}{81}$$

CASE 2. $X_1=2$, $X_2=2$

$$P(X_1=2)P(X_2=2)=\frac{3}{9}\frac{3}{9}=\frac{9}{81}$$

CASE 3. $X_1=3$, $X_2=1$

$$P(X_1=3)P(X_2=1)=\frac{1}{9}\frac{5}{9}=\frac{5}{81}$$

따라서 최종 확률은 $\frac{19}{81}$이다.

03 2024학년도 수능 26번 정답률 36%

26. 4개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 나오는 동전의 개수를 확률변수 X라 하고, 이산확률변수 Y를

$$Y=\begin{cases} X & (X\text{가 } 0 \text{ 또는 } 1\text{의 값을 가지는 경우}) \\ 2 & (X\text{가 } 2 \text{ 이상의 값을 가지는 경우}) \end{cases}$$

라 하자. $\mathrm{E}(Y)$의 값은? [3점]

① $\frac{25}{16}$ ② $\frac{13}{8}$ ③ $\frac{27}{16}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{29}{16}$

정 답 ②

해 설

X는 4개의 공정한 동전을 던질 때 앞면의 개수이므로,

$X \sim B(4, \frac{1}{2})$를 따르므로 각 확률을 계산하면,

- $P(X=0, 4) = {}_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
- $P(X=1, 3) = {}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16}$
- $P(X=2) = {}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16}$

이를 통해 확률변수 Y의 확률분포를 재구성해보자.

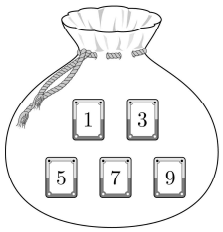
- $P(Y=0) = P(X=0) = \frac{1}{16}$
- $P(Y=1) = P(X=1) = \frac{4}{16}$
- $P(Y=2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \frac{11}{16}$

따라서 $E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{11}{16} = \frac{13}{8}$이다.

04 2025학년도 수능 27번 정답률 28%

27. 숫자 1, 3, 5, 7, 9가 각각 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 1장의 카드를 꺼내어 카드에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 3번 반복하여 확인한 세 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{V}(a\overline{X}+6)=24$일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



정 답 ③

해 설

STEP1 주어진 식 변형하기

- $V(a\overline{X}+6)=a^2V(\overline{X})=24$임을 알 수 있다.

STEP2 모집단의 분산 구하기

- $E(X)=\dfrac{1+3+5+7+9}{5}=5$
- $E(X^2)=\dfrac{1^2+3^2+5^2+7^2+9^2}{5}=\dfrac{165}{5}=33$
- $\sigma^2=V(X)=33-5^2=8$

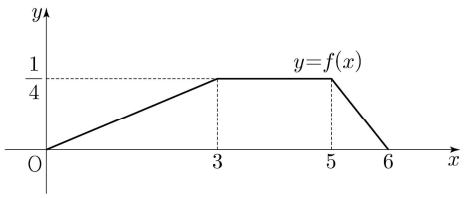
STEP3 표본평균의 분산 구하기

$V(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}=\dfrac{8}{3}$을 위의 식에 대입하면 $a=3$이다.

유형 05 연속확률변수를 그래프로 제시

01 2022학년도 수능 29번 정답률 8%

29. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 6$, $0 \le Y \le 6$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$0 \le x \le 6$인 모든 x에 대하여

$$f(x)+g(x)=k \quad (k\text{는 상수})$$

를 만족시킬 때, $\mathrm{P}(6k \le Y \le 15k)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정 답 31

해 설

STEP1 조건 해결하기

주어진 관계식을 적분하면

$$\int_0^6 (f(x)+g(x))dx=\int_0^6 k\,dx$$

이때 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 구간 $[0,6]$에서의 확률밀도함수이므로 $\int_0^6 f(x)dx=\int_0^6 g(x)dx=1$을 만족한다.

따라서 $1+1=6k$이므로 $k=\dfrac{1}{3}$이다.

STEP2 답 구하기

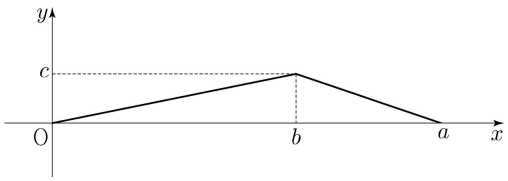
$$P(6k \le Y \le 15k)=P(2 \le Y \le 5)=\int_2^5 g(x)dx$$

$$=\int_2^5 \frac{1}{3}dx-\int_2^5 f(x)dx=\frac{7}{24}$$

이므로 $p+q=31$이다.

02 2023학년도 수능 28번 정답률 45%

28. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le a$이고, X의 확률밀도함수의 그래프가 그림과 같다.



$\mathrm{P}(X \le b)-\mathrm{P}(X \ge b)=\dfrac{1}{4}$, $\mathrm{P}(X \le \sqrt{5})=\dfrac{1}{2}$일 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

① $\dfrac{11}{2}$ ② 6 ③ $\dfrac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\dfrac{15}{2}$

정 답 ④

해 설

STEP1 주어진 조건 이용하기

- 그래프에서 밀도함수의 면적은 1이므로 $\dfrac{1}{2}ca=1$이다.
- $P(X \le b)+P(X \ge b)=1$ (그래프)

  $P(X \le b)-P(X \ge b)=\dfrac{1}{4}$ (조건)

  를 이용하면 $P(X \le b)=\dfrac{5}{8}$이다.

  이는 왼쪽 삼각형을 의미하고 $\dfrac{1}{2}bc=\dfrac{5}{8}$이다.
- $P(X \le \sqrt{5})=\dfrac{1}{2}$이므로 $\sqrt{5}$가 이 분포의 중앙값이라는 의미이다. 삼각형의 면적을 생각해보면 $\sqrt{5}<b$임을 알 수 있다. 따라서 삼각형의 면적은 $\dfrac{1}{2}(\sqrt{5})(\sqrt{5}\,\dfrac{c}{b})=\dfrac{5c}{2b}=\dfrac{1}{2}$이다.

STEP2 연립하기

- $bc=\dfrac{5}{4}$에 $c=\dfrac{1}{5}b$을 대입하면 $\dfrac{1}{5}b^2=\dfrac{5}{4}$에서 $b=\dfrac{5}{2}$, $c=\dfrac{1}{2}$이다.
- $a=\dfrac{2}{c}=4$이다.

따라서 $a+b+c=7$이다.

유형 06 표준정규분포표 제시

01 2022학년도 9월 27번 정답률 41%

27. 지역 A에 살고 있는 성인들의 1인 하루 물 사용량을 확률변수 X, 지역 B에 살고 있는 성인들의 1인 하루 물 사용량을 확률변수 Y라 하자. 두 확률변수 X, Y는 정규분포를 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 두 확률변수 X, Y의 평균은 각각 220과 240이다.
> (나) 확률변수 Y의 표준편차는 확률변수 X의 표준편차의 1.5배이다.

지역 A에 살고 있는 성인 중 임의추출한 n명의 1인 하루 물 사용량의 표본평균을 $\overline{X}$, 지역 B에 살고 있는 성인 중 임의추출한 $9n$명의 1인 하루 물 사용량의 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. $P(\overline{X} \le 215) = 0.1587$일 때, $P(\overline{Y} \ge 235)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 물 사용량의 단위는 L이다.) [3점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915 ② 0.7745 ③ 0.8185
④ 0.8413 ⑤ 0.9772

정 답 ⑤

해 설

STEP1 표본평균의 분포 정리

- $E(\overline{X}) = \mu_X = 220$
- $\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- $E(\overline{Y}) = \mu_Y = 240$
- $\sigma(\overline{Y}) = \dfrac{\sigma_Y}{\sqrt{9n}} = \dfrac{1.5\sigma}{3\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

STEP2 $\overline{X}$정보로 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$값 구하기

주어진 확률 $P(\overline{X} < 215) = 0.1587$을 표준화하자.

$P(Z \le \dfrac{215-220}{\sigma/\sqrt{n}}) = P(Z \le -\dfrac{5}{\sigma/\sqrt{n}}) = 0.1587$

확률값 0.1587은 0.5보다 작으므로,
표준정규분포 그래프의 왼쪽 꼬리 부분이다.
(참조: $0.1587 = 0.5 - 0.3413$)

따라서 $P\left(-\dfrac{5}{\sigma/\sqrt{n}} \le Z \le 0\right) = P\left(0 \le Z \le \dfrac{5}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0.3413$

주어진 표에서 $P(0 \le Z \le 1.0) = 3413$이므로

$\dfrac{5}{\sigma/\sqrt{n}} = 1$에서 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5$이다.

STEP3 $\overline{Y}$의 확률 계산하기

$\sigma(\overline{Y}) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.5$

이제 $P(Z \ge \dfrac{235-240}{2.5}) = P(Z \ge -2) = P(Z \le 2)$이므로

0.9772이다.

02 2024학년도 9월 26번 정답률 62%

26. 어느 고등학교의 수학 시험에 응시한 수험생의 시험 점수는 평균이 68점, 표준편차가 10점인 정규분포를 따른다고 한다. 이 수학 시험에 응시한 수험생 중 임의로 선택한 수험생 한 명의 시험 점수가 55점 이상이고 78점 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.1	0.3643
1.2	0.3849
1.3	0.4032

① 0.7262 ② 0.7445 ③ 0.7492 ④ 0.7675 ⑤ 0.7881

정 답 ②

해 설

표준화 공식에 대입하자. (평균은 68이고, 표준편차는 10이다.)

- 55점의 Z값: $Z_1 = \dfrac{55-68}{10} = -1.3$
- 78점의 Z값: $Z_2 = \dfrac{78-68}{10} = 1$

따라서 우리가 구하려는 확률
$P(55 \le X \le 78) = P(-1.3 \le Z \le 1)$을 구하는 것과 동일함.
계산하면 $0.4032 + 0.3413 = 0.7445$이다.

03 2024학년도 수능 30번 정답률 13%

30. 양수 t에 대하여 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(1, t^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X \le 5t) \ge \frac{1}{2}$$

이 되도록 하는 모든 양수 t에 대하여 $\mathrm{P}(t^2-t+1 \le X \le t^2+t+1)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자. $1000 \times k$의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

정 답 673

해 설

STEP1 주어진 조건 이용하기

문제의 조건 $P(X \le 5t) \ge \frac{1}{2} = P(X \le 1)$을 만족해야하므로

$t \ge \frac{1}{5}$임을 알 수 있다.

STEP2 구하려는 확률 표준화하기

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{x-1}{t}$이므로

- 하한: $\frac{(t^2-t+1)-1}{t} = \frac{t^2-t}{t} = t-1$
- 상한: $\frac{(t^2+t+1)-1}{t} = \frac{t^2+t}{t} = t+1$

따라서 구하려는 확률은 $P(t-1 \le Z \le t+1)$이다.

STEP3 확률의 최댓값 찾기

우선 표준화된 구간 $[t-1, t+1]$의 중심은 t이고,

최댓값을 갖는다. 그리고 t의 범위는 $t \ge \frac{1}{5}$을 만족하며

중심이 봉우리의 중심인 0에 가까워야하므로 $t = \frac{1}{5}$를

선택해서 계산하면 구간은 $[-0.8, 1.2]$이다.

$k = P(-0.8 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 1.2)$

$k = P(0 \le Z \le 0.8) + P(0 \le Z \le 1.2)$ (대칭성 이용)

$k = 0.288 + 0.385 = 0.673$이므로 $1000k = 673$이다.

04 2025학년도 9월 29번 정답률 13%

29. 수직선의 원점에 점 A가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가
> 4 이하이면 점 A를 양의 방향으로 1만큼 이동시키고,
> 5 이상이면 점 A를 음의 방향으로 1만큼 이동시킨다.

이 시행을 16200번 반복하여 이동된 점 A의 위치가 5700 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자. $1000 \times k$의 값을 구하시오. [4점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494

정 답 994

해 설

STEP1 조건 분석하기

각 주사위 시행에서 $+1$로 이동할 확률은 $p=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$,

-1로 이동할 확률은 $q=\frac{1}{3}$이다.

따라서 16200번의 시행 중 성공 횟수를 확률변수 X라고 하면, X는 이항분포 $A(16200, \frac{2}{3})$를 따른다.

STEP2 최종 위치 표현하기

- 성공($+1$이동)횟수: X
- 실패(-1이동)횟수: $16200-X$

점 A의 최종 위치를 Y라고 하면

$Y=X+(-1)(16200-X)=2X-16200$

STEP3 정규분포 근사하기

시행 횟수 $n=16200$은 충분히 크므로, X는 정규분포를 따르는 것으로 근사할 수 있다.

$E(X)=np=16200\times\frac{2}{3}=10800$

$V(X)=npq=10800\times\frac{1}{3}=3600=60^2$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(10800, 60^2)$을 따른다.

STEP4 답 구하기

문제에서 요구하는 확률은 $P(Y \le 5700)$이다.

$P(2X-16200 \le 5700)$이므로 $P(X \le 10950)$을 구하자.

이 값을 표준화하면 $Z=\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}=\frac{10950-10800}{60}=2.5$

따라서 우리가 구하려는 확률은

$P(Z \le 2.5)=0.5+0.494=0.994$이다.

따라서 $1000k=994$이다.

05 2025학년도 수능 29번 정답률 23%

29. 정규분포 $\mathrm{N}(m_1, \sigma_1^2)$을 따르는 확률변수 X와 정규분포 $\mathrm{N}(m_2, \sigma_2^2)$을 따르는 확률변수 Y가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 x에 대하여
> $\mathrm{P}(X \le x) = \mathrm{P}(X \ge 40 - x)$이고
> $\mathrm{P}(Y \le x) = \mathrm{P}(X \le x + 10)$이다.

$\mathrm{P}(15 \le X \le 20) + \mathrm{P}(15 \le Y \le 20)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것이 0.4772일 때, $m_1 + \sigma_2$의 값을 구하시오. (단, σ_1과 σ_2는 양수이다.) [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

정 답 25

해 설

STEP1 주어진 조건 이용하기

• 조건 (가)를 분석해서 m_1을 구하자.

$P(X \le x) = P(X \ge 40 - x)$

정규분포는 평균에 대해 완벽하게 대칭이다.

위 등식은 x와 $40-x$가 평균 m_1에 대해 서로 대칭적인 위치에 있음을 의미하므로 $m_1 = 20$이다.

• 조건 (나)를 분석해서 m_2와 σ_2 관계 구하기

$P(Y \le x) = P(X \le x + 10)$

이 조건은 확률변수 Y의 분포가 X의 분포를 x축 방향으로 -10만큼 평행이동한 것과 같다는 의미이다.

(1) 분포의 모양이 같으므로 표준편차는 같다. $\sigma_2 = \sigma_1$

(2) 평균은 10만큼 작아진다. $m_2 = 10$

STEP2 답 구하기

$P(15 \le x \le 20) + P(15 \le Y \le 20) = 0.4772$

각 항을 표준화하면

• $P(15 \le X \le 20) = P(\frac{15-20}{\sigma} \le X \le \frac{20-20}{\sigma})$

$= P(-\frac{5}{\sigma} \le Z \le 0) = P(0 \le Z \le \frac{5}{\sigma})$

• $P(15 < Y \le 20) = P\left(\frac{15-10}{\sigma} \le Z \le \frac{20-10}{\sigma}\right)$

$= P\left(\frac{5}{\sigma} \le Z \le \frac{10}{\sigma}\right)$

두 확률을 더하면 두 구간이 자연스럽게 합쳐져서

$P(0 \le Z \le \frac{10}{\sigma}) = 0.4772$가 된다.

따라서 $\frac{10}{\sigma} = 2$에서 $\sigma_2 = 5$이다.

$m_1 + \sigma_2 = 20 + 5 = 25$

06 2026학년도 9월 29번 정답률 32%

29. 두 집합 $A=\{2,3,4\}$, $B=\{2,3\}$에 대하여 다음 시행을 한다.

> 집합 A의 모든 부분집합 8개 중에서
> 임의로 한 개를 선택하고,
> 집합 B의 모든 부분집합 4개 중에서
> 임의로 한 개를 선택한다.
> 선택한 두 집합의 교집합의 원소의 개수를 기록한다.

이 시행을 15360번 반복하여 기록한 수가 1인 횟수가 5880 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값이 k일 때, $1000\times k$의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494
3.0	0.499

정 답 23

해 설

공식을 써서 풀 수 있는 문항으로, 전형적인 이항분포 문항에 대한 연습이 되어있다면 빠르게 풀 수 있었을 만한 문항이다.

STEP1 조건을 만족하는 확률 구하기

조건을 만족할 확률을 먼저 구하자.

A와 B의 교집합의 원소 개수가 1일 확률을 구하면 된다.

전체 경우의 수는 $8\times4=32$가지이다.

이 중에서 교집합의 원소가 2만 해당되는 경우를 세어보자.

교집합의 원소가 2 뿐이므로 3은 A 또는 B에 들어가거나 둘다 들어가지 않는 경우 총 3가지이고, 4는 A에 들어가거나 들어가지 않으므로 2가지 경우가 존재한다.

따라서, 총 6가지이다.

교집합의 원소가 3만 해당되는 경우는 마찬가지로 6가지이다.

따라서, 확률은 $\frac{12}{32}=\frac{3}{8}$이다.

STEP2 정규분포를 활용하여 정규화하기

확률변수는 이항분포 $X\sim\mathrm{B}(15360,\frac{3}{8})$를 따른다.

이 때 분산은 $15360\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}=3600$이고, 표준편차는 60이다.

정규분포로 바꾸면, $X\sim N(5760,60^2)$이다.

따라서, $\mathrm{P}(X\ge5880)$을 $Z=\frac{X-5760}{60}$로 표준화하자.

$\mathrm{P}(X\ge5880)=\mathrm{P}(\frac{X-5760}{60}\ge\frac{5880-5760}{60})=\mathrm{P}(Z\ge2)$이다.

따라서, 구하는 확률은 $0.5-0.477=0.023$이다.

07 2025년 실시 수능 29번

정답률 32%

29. 6 이하의 자연수 a에 대하여 한 개의 주사위와 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 a보다 작거나 같으면
> 동전을 5번 던져 앞면이 나온 횟수를 기록하고,
> 나온 눈의 수가 a보다 크면
> 동전을 3번 던져 앞면이 나온 횟수를 기록한다.

이 시행을 19200번 반복하여 기록한 수가 3인 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)=4800$일 때, $\mathrm{P}(X \le 4800+30a)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값이 k이다. $1000\times k$의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.191
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494
3.0	0.499

정 답 977

해 설

독립 시행에 대한 정보를 주고 미지수를 구한 뒤, 정규분포와 연관시키는 전형적인 문항이다.

STEP1 독립 시행의 확률 구하기

시행을 통해 앞면이 기록된 횟수가 3일 확률을 p라 하자.

$\mathrm{E}(X)=np=4800$이고, $n=19200$이므로 $p=\frac{1}{4}$이다.

독립 시행의 확률이 $\frac{1}{4}$가 되기 위한 a의 값을 찾자.

먼저, 주사위를 던져 나온 눈의 수가 a보다 작거나 같을 확률은 $\frac{a}{6}$이다.

이 경우 동전을 5번 던지므로 앞면이 3번 나올 확률은 ${}_5\mathrm{C}_3(\frac{1}{2})^5=\frac{5}{16}$이다.

나온 눈의 수가 a보다 클 확률은 $\frac{6-a}{6}$이고, 동전을 3번 던지므로 앞면이 3번 나올 확률은 $(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$이다.

따라서, $p=\frac{a}{6}\times\frac{5}{16}+\frac{6-a}{6}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$이다.

a를 구하면, $a=4$이다.

STEP2 이항분포를 이용해 조건을 찾고 정규분포 활용하기

이항분포를 정규분포로 바꾸자.

$B(19200, \frac{1}{4})$를 따르고, $\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{3600}=60$이므로 정규분포로 근사하면 $N(4800, 60^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X \le 4800+30a)=\mathrm{P}(Z \le \frac{4800+30a-4800}{60})=P(Z \le 2)$

이다.

따라서, $k=0.5+0.477=0.977$이다.

유형 07 신뢰구간 문제

01 2022학년도 수능 27번 정답률 50%

27. 어느 자동차 회사에서 생산하는 전기 자동차의 1회 충전 주행 거리는 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다.
이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 100대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다.
이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 400대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $c \le m \le d$이다.
$\overline{x_1} - \overline{x_2} = 1.34$이고 $a = c$일 때, $b-a$의 값은? (단, 주행 거리의 단위는 km이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $P(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 5.88 ② 7.84 ③ 9.80
④ 11.76 ⑤ 13.72

정 답 ②

해 설

STEP1 신뢰구간의 하한(a,c) 표현하기

- 95% 신뢰구간 하한 a: $\overline{x_1} - 1.96\frac{\sigma}{10}$이다.
- 95% 신뢰구간 하한 c: $\overline{x_2} - 2.58\frac{\sigma}{10}$이다.

STEP2 조건 $a=c$를 이용하여 σ 구하기

$a=c$이므로 위에서 구한 두 식을 같다고 하면
$\overline{x_1} - \overline{x_2} = 0.067\sigma = 1.34$ (문제 제시)
따라서 $\sigma = 20$이다.

STEP3 신뢰 구간의 길이 계산

문제에서 요구하는 $b-a$는 95% 신뢰 구간의 길이이고,
공식은 $b-a = 2\times k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\times 1.96\times\frac{20}{10} = 7.84$

02 2023학년도 9월 25번 정답률 58%

25. 어느 인스턴트 커피 제조 회사에서 생산하는 A 제품 1개의 중량은 평균이 9, 표준편차가 0.4인 정규분포를 따르고, B 제품 1개의 중량은 평균이 20, 표준편차가 1인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 A 제품 중에서 임의로 선택한 1개의 중량이 8.9 이상 9.4 이하일 확률과 B 제품 중에서 임의로 선택한 1개의 중량이 19 이상 k 이하일 확률이 서로 같다. 상수 k의 값은? (단, 중량의 단위는 g이다.) [3점]

① 19.5 ② 19.75 ③ 20 ④ 20.25 ⑤ 20.5

정 답 ④

해 설

- X_A는 $N(9, 0.4^2)$을 따른다.
- X_B는 $N(20, 1^2)$을 따른다.

조건에 의하여 $P(8.9 \le X_A \le 9.4) = P(19 \le X_B \le k)$
위 식을 표준화하면
$P(-0.25 \le Z \le 1) = P(-1 \le Z \le k-20)$이고,
표준정규분포 그래프는 0에 대해 대칭이므로
잘 정리하면 $P(0 \le Z \le 0.25) = P(0 \le Z \le k-20)$이 된다.
따라서 $k = 20.25$이다.

03 2023학년도 수능 27번 정답률 88%

27. 어느 회사에서 생산하는 샴푸 1개의 용량은 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다고 한다. 이 회사에서 생산하는 샴푸 중에서 16개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $746.1 \le m \le 755.9$이다.
이 회사에서 생산하는 샴푸 중에서 n개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구하는 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$일 때, $b-a$의 값이 6 이하가 되기 위한 자연수 n의 최솟값은? (단, 용량의 단위는 mL이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 70 ② 74 ③ 78 ④ 82 ⑤ 86

정 답 ②

해 설

STEP1 모표준편차(σ) 구하기

95% 신뢰구간의 길이는 $755.9 - 746.1 = 9.8$이다.

STEP2 신뢰구간의 길이 공식

길이공식은 $2 \times k \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다.

주어진 값들을 대입하면 $\sigma = 10$이다.

STEP3 99% 신뢰구간의 길이($b-a$)가 6이하가 되야한다.

$b-a = 2 \times 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 6$

따라서 $n \ge (8.6)^2 = 73.96$이다.

04 2024학년도 수능 27번 정답률 47%

27. 정규분포 $\mathrm{N}(m, 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 49인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le \frac{6}{5}a$이다. $\overline{x}$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

① 15.2 ② 15.4 ③ 15.6 ④ 15.8 ⑤ 16.0

정 답 ②

해 설

STEP1 신뢰구간의 중심을 이용해 $\overline{x}$ 구하기

문제의 신뢰구간은 $a \le m \le \frac{6}{5}a$이므로

$\overline{x} = \frac{11}{10}a$이다. (등차수열로 평균을 생각해도 좋다.)

STEP2 신뢰구간의 길이를 이용해 a구하기

· 상한-하한 $= \frac{6}{5}a - a = \frac{1}{5}a$

· 공식으로 계산한 길이 $= 2 \times k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \times 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{49}} = 2.8$

두 길이는 같아야하므로 $a = 14$이다.

따라서 $\overline{x} = 15.4$이다.

05 2025학년도 9월 26번 정답률 56%

26. 정규분포 $\mathrm{N}(m, 6^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$, 정규분포 $\mathrm{N}(6, 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X} \le 12) + \mathrm{P}(\overline{Y} \ge 8) = 1$이 되도록 하는 m의 값은? [3점]

① 5 ② $\frac{13}{2}$ ③ 8 ④ $\frac{19}{2}$ ⑤ 11

정 답 ③

해 설

STEP1 확률 관계식 변환하기

$P(\overline{X} \le 12) = 1 - P(\overline{Y} \ge 8) = 1$에서 확률의 성질에 따라

$1 - P(A) = P(A^c)$이므로,

$P(\overline{X} \le 12) = P(\overline{Y} < 8)$

정규분포와 같은 연속확률분포에서 특정 한 지점의 확률은 0이므로 $P(\overline{X} \le 12) = P(\overline{Y} \le 8)$이다.

위 등식이 성립하려면, 각 확률을 표준화했을 때 Z값이 같아야 한다.

STEP2 표본평균의 분포 정리

· $E(\overline{X}) = m$, $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n_X}} = 2$이므로 $N(m, 2^2)$을 따름

· $E(\overline{Y}) = 6$, $\sigma(\overline{Y}) = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n_Y}} = 1$이므로 $N(6, 1^2)$을 따름

STEP3 Z값 구하기

· $\overline{X} = 12$의 Z값: $Z_X = \frac{12 - m}{2}$이다.

· $\overline{Y} = 8$의 Z값: $Z_Y = \frac{8 - 6}{1} = 2$이다.

두 식을 연립하면 $m = 8$이다.

06 2025학년도 수능 25번 정답률 47%

25. 정규분포 $\mathrm{N}(m, 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 256인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다. $b-a$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

① 0.49 ② 0.52 ③ 0.55 ④ 0.58 ⑤ 0.61

정 답 ①

해 설

신뢰구간의 길이공식에 대입하면

$b-a = 2 \times 1.96 \times \dfrac{2}{\sqrt{256}} = 0.49$이다.

07 2026학년도 실시 9월 26번 정답률 79%

26. 평균이 m이고 표준편차가 $2\sqrt{2}$인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 128인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균의 값이 $\bar{x}$일 때, 이를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $\bar{x}-c \le m \le \bar{x}+c$이다. c의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

① 0.47 ② 0.49 ③ 0.51 ④ 0.53 ⑤ 0.55

정 답 ②

해 설

공식을 활용하여 신뢰구간을 구하면 되는 전형적인 문항이다.

신뢰도 95%이므로 신뢰구간에서 c의 값은 $1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다.

$\sigma = 2\sqrt{2}$, $n = 128$이므로 $c = \dfrac{1.96}{4} = 0.49$이다.

08 2026학년도 수능 26번 정답률 62%

26. 평균이 m이고 표준편차가 5인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 36인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $1.2 \le m \le a$이다. a의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 5.1 ② 5.2 ③ 5.3 ④ 5.4 ⑤ 5.5

정 답 ⑤

해 설

모평균의 신뢰구간에 대한 공식을 이용하여 풀자.

모평균의 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$\overline{X} - 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X} + 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이다.

따라서, $a = 1.2 + 2 \times 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이다.

문제의 조건에서 $\sigma = 5$이고, $n = 36$이다.

$a = 1.2 + 2 \times 2.58\frac{5}{\sqrt{36}} = 5.5$이다.