2027

미적분

CONNECT

수능에 필요한 모든 것을 담은 수능 공략서

UNOVA

Contents

1. 수열

· 개념편 02

· 문제편 24

2. 미분

· 개념편 73

· 문제편 105

3. 적분

· 개념편 164

· 문제편 181

PART 1
수열

개념 유형

(1) 수열의 극한과 극한값의 계산
(2) 등비수열
(3) 수열의 근사와 차수 (심화)
(4) 급수
(5) 등비급수

기출 유형

(1) 수열의 극한
(2) 수열의 극한 활용
(3) 삼각함수의 극한
(4) 수열의 합
(5) 등비수열의 합
(6) 등비수열의 극한
(7) 등비급수와 수열의 도형 활용

THEME

1 수열의 극한과 극한값의 계산

정리1 수열의 수렴과 발산

개념1 수열 $\{a_n\}$의 수렴

수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지거나 그 값이 α이면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 한다. 이때 α를 극한값 또는 극한이라고 하고, 이것을 기호로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \text{ 또는 } n \to \infty \text{일 때, } a_n \to \alpha$$

와 같이 나타낸다.

TIP

수열 $\{\frac{n+1}{n}\}$은 n의 값이 한없이 커질 때, 1로 수렴한다.

즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$이다.

개념2 수열 $\{a_n\}$의 발산

어떤 수열이 수렴하지 않을 때, 그 수열은 발산한다고 한다.
즉, 수렴하지 않는 수열은 모두 발산한다. 즉, '발산' 임을 보이기보다는, '수렴이 아님' 을 보이면 된다.

① 수렴하는 수열은 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 을 만족한다. (α는 일정한 값)

② $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (양의 무한대로 발산)

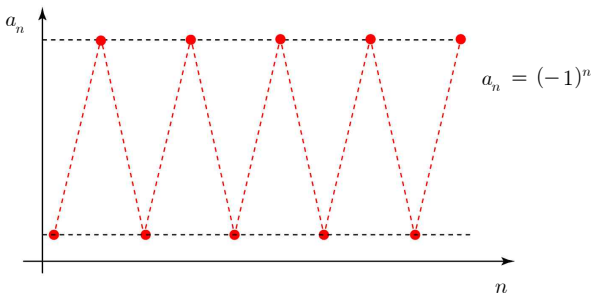
③ $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (음의 무한대로 발산)

④ 진동하는 수열

예1 $a_n = n+1$

예2 $a_n = -2n$

예3 $a_n = (-1)^n$



수렴하지 않기 때문에, 발산한다고 말한다.

정리2 수열의 극한값의 계산

개념1 수열의 극한에 대한 기본 성질

(주의. 각각의 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하지 않으면 수열의 극한에 대한 기본 성질을 적용할 수 없다.)

'무지성 암기'

① $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n$ (단, c는 상수)

② $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

③ $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$

④ $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n$

⑤ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ (단, $b_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$)

뭉쳐 있던 것을 서로 분리할 수 있다는 개념입니다. 또한, 서로 분리된 것을 뭉칠 수도 있습니다.
여기에서, ⑤번을 잘 봐야합니다. 예외 사항, 즉 분모가 0이 되는 상황은 분리하거나 뭉칠 수 없습니다.
킬러 문제에서는 이와 같이, 예외 경우를 불연속점 등 특수한 지점으로 인식해야 하고, 문제 풀이의 KEY POINT가 된다.

정리3 부정형 不定形 (뜻: 값이 확정되지 않음, indeterminate)

개념1 부정형 극한의 처리

① 우선 식에 존재하는 모든 n에 ∞를 대입한다.

② 계산이 안 되면 그 인자를 찾아 계산이 가능한 형태로 바꾼다.

위 **정리2 수열의 극한값의 계산**

에서, 수열의 극한에 대한 기본 성질을 사용하여 뭉쳐 있던 극한을 분리하여 따로따로 계산 할 수 있거나, 분리된 극한을 하나로 통합시켜 연산할 수 있었다.

그러나, 연산하고자 하는 수열이 수렴하지 않는 경우($\sqrt{n^2+4n}-n$)에는, 수열의 극한에 대한 기본 성질을 사용할 수 없다.

($\because$ 수열의 극한에 대한 기본 성질의 전제 조건: 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대해....)

예제1 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n}-n)$ 의 값은?

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n}-n)$라는 식을 처음 보고 난 후 극한값을 계산하기 위해서, $n\to\infty$ 로 갈 때를 체크해야 한다.

$n=\infty$ 를 대입하면, $\infty-\infty$꼴이 나옵니다. 어떻게 해야할까?

우리는 지금까지, ∞를 연산하는 방법을 배우지 않았다.

부정형 극한을 처리하는 방법을 아직 모르는 학생은, 이 부분에서 당황하며 풀이가 막혔을 것이다.

위 **예제1** 는 대표적인 부정형 유형이다.

계산 시 ∞가 포함되어있는 등, 위 **예제1** 와 같이, 바로 값을 하나로 정할 수 없는 느낌이 들면, 그것이 부정형 문제이다.

부정형 문제를 보면, 다음 문장을 떠올리면 된다.

★ '<수열의 극한에 대한 기본 성질>을 이용하기 위해서
'부정형'의 원인이 되는 인자를 없애도록 식을 조작하여, 계산이 가능한 형태로 바꾼다. (수렴하도록 바꾼다.)'

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n}-n)$의 경우, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+4n}$과 $\lim_{n\to\infty}n$ 이 모두 발산한다.

따라서, 수렴하는 형태로 바꾸어주기 위해 분모, 분자에 $\sqrt{n^2+4n}+n$을 곱하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}$ 이다.

아직 분모와 분자 모두 수렴하지 않고 양의 무한대로 발산하므로, 식 조작을 한 번 더 해 준다.

분모, 분자를 n으로 나누면 $\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}$ 이다.

이때, 분모는 2로 수렴하고 분자는 4로 수렴하므로 구하려는 극한값은 $\frac{4}{2}=2$ 이다.

TIP 부정형

① $\lim_{n\to\infty}f(x)-g(x)$의 형태에서 $f(x)$와 $g(x)$의 최고차항의 계수가 동일하다면 수렴한다.

② $\lim_{n\to\infty}f(x)-g(x)$의 형태에서 $f(x)$와 $g(x)$의 최고차항의 계수가 다르다면 발산한다.

정리4 수열의 극한의 대소 관계 (≒ 샌드위치 정리)

개념1 수열의 극한의 대소 관계 (의미: 극한을 취할 시 등호 가능)

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ 일 때,

모든 자연수 n에 대해 $a_n < c_n < b_n$ 이면

$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} c_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$ 이다.

즉, $\alpha \le \lim_{n\to\infty} c_n \le \beta$ 이다.

위와 같이, <**개념**> 수열의 극한의 대소 관계> 는 부등식에 극한을 취하면 부등호였던 것이 등호까지 포함할 수 있다는 것을 의미한다.

★ 수열의 극한의 대소 관계는 삼각함수가 포함된 식의 극한을 구할 때 자주 사용된다.
왜냐하면 삼각함수가 포함된 식은 대부분의 경우, <**개념**> 부정형 극한의 처리> 및 '직관'이 통하지 않아 극한값을 구할 수 없기 때문이다.

(sin, cos과 같은 삼각함수는 -1 에서 $+1$ 사이를 진동하는 특성을 가지기 때문에, 극한값을 예측할 수 없다.
아래 예제1, 2, 3을 순서대로 보면 무슨 말을 하고자 하는지 이해할 것이다.)

예제1 (난이도 下) 에서는, 직관으로 푸는 방식이 통하는 경우 (엄밀하지 않음, 비추천)

예제2 에서는 왜 수열의 극한의 대소 관계를 사용해야 하는지를 몸소 느끼게 해 주는 상황을 다룬다. (직관이 통하지 않는 경우)

◆ 복잡한 식일수록, 직관은 통하지 않는다.

예제2 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ 의 값은?

잘못된 풀이: 현재 n이 무한대로 갈 때, 분모는 ∞로, 분자는 $\sin(\infty\theta)$로 간다.

즉, $\frac{\sin(\infty\theta)}{\infty}$ 입니다. 물론, $-1 \le \sin x \le 1$이라서 분자의 값은 θ에 상관없이 -1 과 $+1$ 사이의 값을 이동하기에,

$\frac{c}{\infty}$ (단, c는 상수) 라고 생각하여 극한값이 0이라고 말할 수 있다.

답은 맞습니다만, 이 방법은 엄밀하지 않을뿐더러 극한 식이 조금 더 복잡하게 등장하면 이러한 '직관'으로는 풀 수 없게 된다.

직관으로 풀 수 없는 경우는 **예제2** 에서 다루도록 하고, 일단은 **예제1** 의 올바른 풀이를 먼저 진행하겠다.

올바른 풀이: $-1 \le \sin(n\theta) \le 1$ 이고, $n \ne 0$ 이고, $n > 0$ 이므로 각 변을 n으로 나누어도 되며,
부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

$-\frac{1}{n} \le \frac{\sin(n\theta)}{n} \le \frac{1}{n}$ 에서, $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의해 $0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} \le 0$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = 0$이다.

정리4 수열의 극한의 대소 관계 (≒ 샌드위치 정리)

예제3 $\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n^2)\sin(2n\theta)}{n^3}$ 의 값은?

잘못된 풀이: 현재 n이 무한대로 갈 때, 분모는 ∞로, 분자는 $\infty\times\sin(\infty\theta)$로 갑니다. 즉, $\frac{\infty\times\sin(\infty\theta)}{\infty}$ 이다.

부정형 꼴이므로, 우선, <**개념** 부정형 극한의 처리>를 사용할 생각을 할 수 있다.

즉, 수렴하는 수열로 만들어야 한다. $\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n^2)}{n^2}=1$로 수렴하므로, $\frac{(1+n^2)}{n^2}\times\frac{\sin(2n\theta)}{n}$ 로 우선 분리할 수 있다.

그러나 수열의 극한의 대소 관계를 모르는 학생이 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(2n\theta)}{n}$ 를 계산하기 위해서는, **예제1** 에서 풀었던 것처럼 '직관'을 사용해야 한다.

★ 이와 같이, 수학적으로 엄밀하지 않은 '직관'을 사용하여 출제자의 의도에 맞지 않게 문제를 푸는 습관이 들면, 킬러 문제를 풀 수 없게 된다. 킬러 문제는 '특수한 상황' 혹은 개념을 사용하기 위한 '전제 조건' 에서의 '예외 상황'을 주로 다루기 때문이다. 직관을 사용하는 것이 습관화되면 '개념'의 '전제 조건' 등 킬러 문제에서의 KEY POINT가 되는 부분들을 까먹게 되며, 수학 실력 상승이 불가능해진다.

올바른 풀이: $-1\leq\sin(2n\theta)\leq 1$ 이고 $n>0$ 이므로 부등식의 각 변에 $\frac{1+n^2}{n^3}$을 곱하면

$-\frac{1+n^2}{n^3}\leq\frac{(1+n^2)\sin(2n\theta)}{n^3}\leq\frac{1+n^2}{n^3}$ 이다.

$\lim_{n\to\infty}-\frac{1+n^2}{n^3}=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1+n^2}{n^3}=0$ 이므로 <**개념** 수열의 극한의 대소 관계>에 의해,

$0\leq\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n^2)\sin(2n\theta)}{n^3}\leq 0$ 이다.

즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n^2)\sin(2n\theta)}{n^3}=0$ 이다.

정리4 수열의 극한의 대소 관계 (≒ 샌드위치 정리)

예제4 $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(n\theta)+3n^2}{3n-2n^2}$ 의 값은?

식이 복잡해졌습니다. 식을 바로 보았을 때, $\frac{\infty}{\infty-\infty}$ 모양의 부정형인데,

<개념 부정형 극한의 처리>를 적용하기 위해 수렴하는 수열들로 모두 나타내어야 하는데, 복잡하고 어려워보인다.
이러한 경우, 즉 복잡한 '삼각함수가 포함된 식'의 극한값을 구할 때 <개념 수열의 극한의 대소 관계>의 진가가 드러난다.

올바른 풀이: 분모, 분자를 n^2 으로 나누면 ($\because n\neq 0$ 이므로 가능) $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\cos(n\theta)}{n^2}+3}{\frac{3}{n}-2}$ 이다.

$-1\le\cos(n\theta)\le 1$ 에서, 부등식의 각 변을 n^2 으로 나누면 $-\frac{1}{n^2}\le\frac{\cos(n\theta)}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$ 이다.

이때, $\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n^2}=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ 이므로, <개념 수열의 극한의 대소 관계> 에 의해 $0\le\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n^2}\le 0$ 이다.

즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n^2}=0$ 이다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\cos(n\theta)}{n^2}+3}{\frac{3}{n}-2}=-\frac{3}{2}$$

★ 예제2 에서, 수열의 극한의 대소 관계를 사용하여 문제를 풀 수 있었다.
이와 같이, 삼각함수가 포함된 식의 극한값을 구할 때에는 항상 <개념 수열의 극한의 대소 관계>를 떠올린다.

예제1 수열의 극한에 대한 기본 성질

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3}{3a_n-4}=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}(4a_n+2)$의 값은?

(단, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\neq\frac{4}{3}$이다.)

해설

- $\lim_{n\to\infty}a_n=a$라고 하면, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3}{3a_n-4}=\frac{a+3}{3a-4}=1$이고,
  $a+3=3a-4$에서 $2a=7$이다.
- $\lim_{n\to\infty}(4a_n+2)=4\times7+2=16$이다.

예제2 무한대/무한대 형태의 극한값

$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+2}{3n-1}$의 값을 구하시오.

해설

분모, 분자의 차수가 같으므로

계수만 확인하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{5n+2}{3n-1}=\frac{5}{3}$이다.

예제3 무한대-무한대 형태의 극한값

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-n)$의 값을 구하시오.

해설

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}{\sqrt{n^2+3n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}$$

분모 분자의 차수가 같으므로 계수만 확인하면 $\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$

예제4 샌드위치 정리

수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\frac{2n+1}{n+2} \leqq c_n \leqq \frac{2n+3}{n+1}$을 만족시킬 때 $\lim_{n\to\infty} c_n$의 값을 구하시오.

해설

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2$, $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+1} = 2$이므로 $\lim_{n\to\infty} c_n = 2$이다.

THEME

2 — 등비수열

정리1 등비수열의 수렴과 발산

개념1 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산

등비수열에 대해서 공비의 조건에 따라 등비수열의 극한값이 달라진다.

공비의 조건	등비수열의 극한값	발산/수렴
$r>1$	$\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$	$\lim_{n\to\infty} 2^n=\infty$ (발산)
$r=1$	$\lim_{n\to\infty} r^n=1$	$\lim_{n\to\infty} 1^n=1$ (수렴)
$-1<r<1$	$\lim_{n\to\infty} r^n=0$	$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ (수렴)
$r\leqq -1$	수열 $\{r^n\}$은 진동	$\lim_{n\to\infty}(-2)^n=\begin{cases}+\infty\\-\infty\end{cases}$ (발산)

TIP 등비수열이 수렴할 조건

등비수열이 $\{r^n\}$이 수렴하는 공비의 필요충분조건은 $-1<r\leqq 1$이다.

TIP 등비수열의 극한을 구하는 방법

분모/분자를 약분하여 몇 개의 항을 "분수 형태($\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=0$)"로 만들고 계산한다.

정리2 등비수열로 구성된 함수 (수능 심화)

개념1 등비수열로 구성된 함수란?

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+bx^{2n-1}+x}{x^{2n}+2}$ 과 같이, x^{2n} 따위가 포함된 식으로 구성된 함수를 의미한다.

개념2 풀이 방법

대부분의 경우, x^{2n}과 같이 지수가 항상 짝수가 되도록 출제된다. 위 함수 $f(x)$에서 x^{2n-1}은 $\frac{x^{2n}}{x}$으로 볼 수 있기에, x의 지수가 짝수라고 볼 수 있다. (나중에 문제를 풀다 보면, 무슨 말인지 이해가 될 것이다.)
지수가 짝수일 때에는, ④에서 -1이, 제곱이 되어, 1이 되므로 빠른 계산이 가능해진다.

따라서, ③과 ④를 구분할 필요가 없다. x의 지수가 짝수이므로, $1^2=(-1)^2$ 이다.
그러므로, 대부분의 경우 ① $|x|<1$ ② $|x|>1$ ③ $x=1$ 3가지만 고려해도 된다.

대부분의 경우(지수가 항상 짝수)에는, ③ $x=1$ ④ $x=-1$ 가 똑같은 결과가 나오므로 '중복된 작업'을 하고 있다는 생각이 들 것이다. 그러나 수능에는 어떤 경우가 나올지 모르기에, 4가지 범위를 모두 체크하는 것을 습관화하자.

예제1 등비수열의 극한

함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+2}{x^{2n}+1}$에 대하여 $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(2)$의 값은?

해설

- $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}+2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}+1}=\frac{0+2}{0+1}=2$
- $f(2)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+2}{2^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 2^n+2}{4^n+1}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n}=\frac{0+0}{1+0}=0$
- 따라서 $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(2)=2$이다.

예제2 등비수열의 극한 (심화)

함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}+3}$에 대하여 $f(k)=-\frac{1}{3}$을 만족시키는 정수 k의 개수는?

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

해설

① $\left|\frac{x}{4}\right|<1$이면 $-4<x<4$이다.

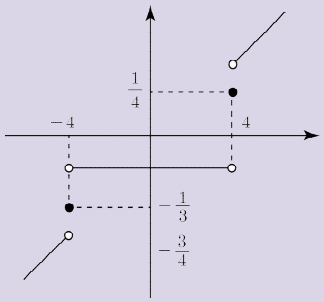
② $\left|\frac{x}{4}\right|>1$이면 $x>4$ 또는 $x<-4$이다.

③ $\frac{x}{4}=1$이면 $x=4$이다.

④ $\frac{x}{4}=-1$ $x=-4$이다.

- ①의 경우 $\left(\frac{x}{4}\right)^2<1$이므로, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}=0$이다.
즉, $-4<x<4$에서 $f(x)=-\frac{1}{3}$이다.
- ②의 경우 $\left(\frac{x}{4}\right)^2>1$이므로, $\left(\frac{4}{x}\right)^2<1$이다.
그러므로, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{x}\right)^{2n}=0$이다.
$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\frac{x}{4}-\left(\frac{4}{x}\right)^{2n}}{1+3\times\left(\frac{4}{x}\right)^{2n}}=\frac{x}{2}$이다.
- ③의 경우, $x=4$일 때 $f(4)=\frac{1}{4}$이다.
- ④의 경우, $x=-4$일 때 $f(-4)=-\frac{3}{4}$이다.

(보다시피 ③이 성립하지 않으므로 ④도 성립하지 않는다.)



따라서 $k=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$으로 총 7개다.

THEME

3 — 수열의 근사와 차수

들어가며 수열의 극한의 방향성

WHAT? 수열 a_n의 근사

우리가 수능 수학에서 수열의 극한 문제를 마주하게 되는 경우는 크게 두 가지입니다.
하나는 23번, 25번처럼 비교적 쉬운 문제에서 간단한 극한 계산을 묻는 경우이고, 다른 하나는 30번처럼 최고난도 문항으로 등장하는 경우입니다.

특히 최근 킬러 문항 배제 정책 이후, 삼각함수의 도형 극한이나 무한등비급수와 같은 전통적인 킬러 주제들이 출제되지 않게 되면서 상대적으로 저평가되었던 '수열의 극한'이 2025학년도 6월 모의평가의 30번 문제로 최고난도로 등장하게 되었습니다.

문제만 보면 매우 복잡해 보이고, 풀이 과정 또한 일관되지 않게 느껴질 수 있습니다.
하지만 이번 파트에서는 수열을 근사하여 깔끔하게 풀어내는 방법을 소개할 것입니다.
이 '수열 근사'는 미적분 전반에서 가장 핵심적인 논리인 차수 확인법을 기초로 합니다.
자세한 내용은 차수 추리법에서 다룰 예정이니, 조금 어렵게 느껴지더라도 하나하나 차근히 따라와 주세요.

정리1 수열의 근사

복잡해보이는 수열 a_n이 존재할 때 a_n은 높은 확률로 다항식으로 근사가 가능합니다.
이는 미적분학에서 배우는 테일러급수와 맥클로린 급수와 연관이 있지만 넘어가도록 하겠습니다.
이러한 a_n을 다항함수로 바꾸어 생각해주는 것이 수열의 근사입니다.

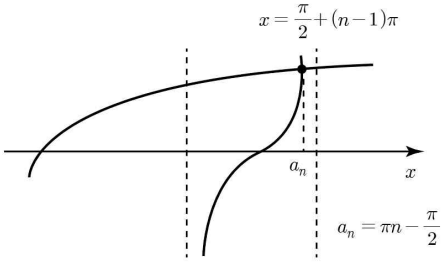
개념1 수열 a_n은 높은 확률로 다항식꼴의 간단한 수열로 표현가능하다.

30. 함수 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{10}$의 그래프와 함수 $y=\tan x$의 그래프가 만나는 모든 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$$\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty} a_n^3\tan^2(a_{n+1}-a_n)$$

의 값을 구하시오. [4점]

250630에서 수열 a_n은 $y=\tan x$, $y=\dfrac{\sqrt{x}}{10}$의 교점이지만 그래프를 그려 a_n을 유심히 관찰하면 $n\pi-\dfrac{\pi}{2}$에 가까워짐을 파악할 수 있습니다.



즉 이런식으로 원하는 수열이 나온다면 그래프를 통하여 n이 무한대로 갈 때 a_n이 어디에 가까워지는 지를 파악하는 것이 중요합니다.

결국 $a_n=n\pi-\dfrac{\pi}{2}$라는 간단한 다항식으로 나타낼 수 있습니다.

이는 별거 아닌 것 같지만 극한 계산에서 매우 큰 이점을 가져갈 수 있다.

정리2 차수보기

개념1 지배항: 수열에서 필요한 차수만을 간결히 계산하기

여기 극한식 하나가 존재합니다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{2}x^3+3x^2+x}{x^5+\frac{2}{5}x^7+2x}$$

이때 한 번 잘 생각해보면 $x\to 0$이므로 최저차항만을 계산하여 주면 된다.
여기서 알 수 있는 점은 우리는 굳이 극한식을 구할 때 다 구할 필요가 없다는 뜻이다.
$x\to\infty$ **으로 갈 때는 최고차항**만을, $x\to 0$**으로 갈 때는 최저차항**만을 구하면 된다는 뜻이다.

250630을 풀다보면 다음과 같은 식이 나온다.

$a_n=n\pi-\frac{\pi}{2}$이며 다음식의 극한값을 구하는 문제이다.

$$\frac{\frac{a_{n+1}-a_n}{10}}{(1+\frac{\sqrt{a_{n+1}a_n}}{100})(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})}$$

그렇다면 어떻게 극한을 해치우는 것이 좋을까?
우선 차수를 보도록 하자.

$$(1+\frac{\sqrt{a_{n+1}a_n}}{100})(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})$$

이 극한식을 계산해야하는 상황에서 $n\to\infty$이므로 최고차항만을 계산하는 상황이다.
그렇다면 저 식을 다 전개할 필요가 있을까요? 그렇지 않다는 이야기이다.
최고차항이 될 수 있는 경우만을 생각하여 계산하면 된다.
1과 곱해진 항들은 n이 있는 항들끼리 곱해져 생긴 항보다 차수가 낮을 수 밖에 없다.
이렇게 차수를 확인하여 필요한 계산을 뽑아내는 것이 **차수보기**이다.

따라서 고려하지 않아도 되는 항을 버리고 a_n에 $n\pi$를 대입하면,

즉, $\frac{\sqrt{(n\pi)^2}}{100}\times(\sqrt{n\pi}+\sqrt{n\pi})$를 계산하면 된다.

이를 **지배항**이라고 한다.

이때 왜 $a_n=n\pi-\frac{\pi}{2}$인데 $n\pi$를 대입하는지 궁금할 수 있다.

아까와 같은 원리이다.

$\frac{\pi}{2}$는 차수가 낮으므로 삭제하여도 되며

a_{n+1} 또한 a_n과 공차(상수) 차이이니 최고차항 계산에서 고려할 필요가 없다.

하지만 주의해야하는 경우가 있다,
바로 **빼기**가 있는 경우이다.

개념2 수열끼리의 차가 있는 경우 차수를 정확히 따져야한다

차의 연산이 들어가는 경우, 최고, 최소 차항이 변하는 경우가 있으니 함부로 계산해선 안된다.
이는 **차수추리법**으로 해결할 수 있다. 이는 뒤의 차수추리법 단원에서 더 정확하게 배워보도록 하겠다.

예제1 복잡한 식에서 차수 계산

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n = n^3$이다. 이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n^{\frac{5}{2}} + a_n - \sqrt{a_n})(\sqrt{(a_n + a_{n+3})^3} + a_n)}{(\sqrt{a_n + a_{n+1}} + \frac{1}{2}a_n)(10\pi + 4a_n^3)}$$ 의 값을 구하시오.

해설

우선 극한식이 비정상적으로 복잡하기는 하지만
차수보기와 차수제거만 하면 간단하게 풀어낼 수 있습니다.
우선 극한식을 간단하게 해봅시다.
분자부터 확인하면

$(a_n^{\frac{5}{2}} + a_n - \sqrt{a_n})(\sqrt{(a_n + a_{n+3})^3} + a_n)$이므로

두 곱의 식에서 지배항은 각각 $a_n^{\frac{5}{2}}$와 $\sqrt{(a_n + a_{n+3})^3}$ 입니다.
이때 $a_n = n^3$이므로 a_{n+3}은 무한대로 가면 삼차항을 제외한 모든 항을 버릴 수 있습니다. ($\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+3} = \infty$)

즉 지배항은 $\sqrt{(a_n + a_{n+3})^3} = (2a_n)^{\frac{3}{2}}$라고 할 수 있습니다.
따라서 분자는 $2\sqrt{2}\,a_n^4$입니다,

이제 분모를 보면

$(\sqrt{a_n + a_{n+1}} + \frac{1}{2}a_n)(10\pi + 4a_n^3)$이며 같은 이유로

가장 차수가 높은 지배항 $\frac{1}{2}a_n$과 $4a_n^3$만이 남고

분모는 $2a_n^4$입니다.
즉 극한값은

$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{2}\,a_n^4}{2a_n^4} = \sqrt{2}$ 로 정리할 수 있습니다.

핵심은 **"다 구하지 말고 버릴 건 버리자"**입니다.

예제2 빼기 연산에서 차수보기

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+3n}-n)(n^2+n)-\dfrac{3}{2}n^2}{n}$ 의 값을 구하시오.

해설

이 문제도 복잡한 극한식입니다. 하지만 다른 점이 뭘까요?
바로 빼기 연산이 존재한다는 점입니다.
빼기 연산은 차수를 바꾸므로 계산에 유의해야합니다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n}-n)(n^2+n)-\frac{3}{2}n^2}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n(n^2+n)-\frac{3}{2}n^2(\sqrt{n^2+3n}+n)}{(\sqrt{n^2+3n}+n)n}$$

여기서 차수보기를 쓰면 실수를 줄일 수 있습니다.
우선 분모의 차수는 2차입니다.
따라서 분모의 지배항은 $2n^2$
하지만 분자의 식에서 $3n^3$이 보입니다.
만약 $3n^3$이 제거되지 않는다면 무한대로 발산할테니
빼기 연산에서 $3n^3$이 지워질 것이다.
이제 분자에서 남는 항은 $3n^2$이고 빼기 연산 이후에
$\frac{3}{2}n^2(\sqrt{3n})$이라는 항이 남지만 이는 $3n^2$보다
차수가 작으므로($\frac{3}{2}$차 $<$ 2차) 분자의 최종 지배항은 $3n^2$
입니다. 따라서 $\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{2n^2}=\frac{3}{2}$입니다.

THEME

4 — 급수

정리1 급수: '급수의 합 = 부분합의 극한'

개념1 급수의 뜻

수열의 각 항을 덧셈 기호로 연결한 '식'

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ 을 급수라 하고, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 으로 표현한다.

개념2 부분합

수열의 제 1항부터 제 n항까지의 합

$S_n=\sum_{n=1}^{n} a_k$ 을 이 급수의 제 n항까지의 부분합이라고 한다.

개념3 급수의 합 ★(=부분합의 극한)

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴할 때

즉, $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$ 일 때

이 급수는 S 에 수렴한다고 한다.

이때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=S$ 또는 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ 와 같이 나타낸다.

예제1 급수의 합

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 점 $\mathrm{P_n}(n, \sqrt{3}n)$과 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 각각 a_n, b_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{a_n b_n}$의 값은?

해설

원점 O에 대하여

$\overline{\mathrm{OP_n}}=\sqrt{n^2+(\sqrt{3}n)^2}=2n$이고,

원 $x^2+y^2=1$의 반지름의 길이가 1이므로 점 $\mathrm{P_n}$은

원 $x^2+y^2=1$의 외부의 점이다.

즉, $a_n=2n+1$, $b_n=2n-1$이다.

이때 $\frac{6}{a_n b_n}=\frac{6}{(2n+1)(2n-1)}=3\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{a_n b_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}3\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}3\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=3$$

예제2 급수와 수열의 극한 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2)=10$일 때, $\lim_{n\to\infty}(S_{n+2}-2n)$의 값은?

해설

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2)$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=0$이다.

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n-2)+2\}=\lim_{n\to\infty}(a_n-2)+2=2$

이므로 $\lim_{n-\infty}a_{n+1}=2$, $\lim_{n\to\infty}a_{n+2}=2$이다. 한편,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-2)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}2\right)$$

$=\lim_{n\to\infty}(S_n-2n)$이므로 $\lim_{n\to\infty}(S_n-2n)=10$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}(S_{n+2}-2n)=\lim_{n\to\infty}(S_n+a_{n+1}+a_{n+2}-2n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\{(S_n-2n)+a_{n+1}+a_{n+2}\}=10+2+2=14$$

예제3 급수의 합

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 의 값을 구하시오.

해설

'급수의 합 = 부분합의 극한' 이다.

제 n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}=\frac{1}{2}$ 이다.

예제4 급수의 합

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ 의 값은?

해설

'급수의 합 = 부분합의 극한'이다.

제 n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\begin{array}{l}\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\cdots\\+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\end{array}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

$=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$ 이다.

정리2 급수와 수열의 극한값 사이의 관계

개념1 급수와 수열의 극한값 사이의 관계 # '무지성 암기'

① 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이다.

② $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ 이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.

TIP

★ ①과 ②는 서로 대우 명제이다. (고1 수학: 어떤 명제가 참이면 그 대우도 참이다.)

★ 명제 ①의 역은 일반적으로 성립하지 않는다.

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이라고 해서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴함이 보장되지 않다는 것을 의미한다.

예를 하나 들자면, $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$ 이지만, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 은 양의 무한대로 발산한다.

예제5 급수와 수열의 극한값 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3a_n+7}{a_n-5} = 4$ 일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$ 의 값은?

해설

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3a_n+7}{a_n-5}$ 이 수렴하므로 '급수와 수열의 극한값 사이의 관계 ①'에 의해 $\lim_{n\to\infty} \frac{3a_n+7}{a_n-5} = 0$ 이다.

$\frac{3a_n+7}{a_n-5} = C_n$ 으로 놓으면, $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$ 이다.

$3a_n+7 = C_n(a_n-5)$ 에서 $(C_n-3)a_n = 5C_n+7$ 이고,

즉 $a_n = \frac{5C_n+7}{C_n-3}$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5C_n+7}{C_n-3} = -\frac{7}{3}$ 이다.

정리3 급수의 연산

개념1 급수의 성질 # '무지성 암기'

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 모두 수렴할 때

① $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ (의미: '합'에 대해, 분리와 결합이 모두 가능하다.)

② $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ (의미: '차'에 대해, 분리와 결합이 모두 가능하다.)

③ $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n=c\sum_{b=1}^{\infty}a_n$ (단, c는 상수) (의미: '상수배'에 대해, 분리와 결합이 모두 가능하다.)

TIP

★ <개념 급수의 성질>은, <개념 수열의 극한에 대한 기본 성질> 과 비슷한 맥락으로
급수의 연산에서, 뭉쳐있는 식들을 분리하거나, 분리되어 있는 식들을 뭉치는 것이 가능하다는 것을 설명하는 개념이다.

★ 급수의 성질은, 수렴하는 급수에 대해서만 성립한다.
항상 개념을 배울 때, 전제 조건을 정확하게 알고 있어야 한다.
그리고 문제를 풀 때, 전제 조건을 만족하는지를 꼭! 확인하고 그 개념을 적용해야 한다.

예제6 급수와 수열의 극한값 사이의 관계

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 가 모두 수렴하고

$\sum_{n=1}^{\infty}(4a_n-b_n)=20$, $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=40$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 의 값은?

해설

$\sum_{n=1}^{\infty}(4a_n-b_n)=20$, $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=40$이다.

즉, 두 급수는 모두 수렴한다.

따라서, '급수의 성질 ①'에 의해

$\sum_{n=1}^{\infty}(4a_n-b_n)+\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=60$, 즉 $\sum_{n=1}^{\infty}6a_n=60$이다.

'급수의 성질 ③'에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}6a_n=6\sum_{n=1}^{\infty}a_n=60$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=10$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=40$, 즉 $2\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=40$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=20$이다.

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=10+20=30$이다.

THEME

5 — 등비급수

정리1 등비급수

개념1 등비급수

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 에서 다루고자 하는 수열 $\{a_n\}$이 등비수열인 경우를 보는 겁니다.

개념2 등비급수의 수렴과 발산 # '무지성 암기'

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ $(a \neq 0)$ 는

① $|r|<1$일 때, 수렴합니다.

② $|r| \geq 1$일 때, 발산합니다.

TIP

★ 즉, 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ $(a \neq 0)$가 수렴하기 위한 필요충분조건은 $-1 < r < 1$ 이다.

★ $a=0$이면, 공비 r의 값에 관계없이, $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 은 항상 0으로 수렴한다.

개념3 등비급수의 합 # '무지성 암기'

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ $(a \neq 0)$이 수렴할 때, 즉 $|r|<1$일 때 등비급수의 합은 $\frac{a}{1-r}$ 이다.

예제1 등비급수

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n-1}-3^n}{12^n}$ 의 값은?

해설

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n-1}-3^n}{12^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{8}{12}\right)^n-\left(\frac{3}{12}\right)^n\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

($\because$ 두 급수는 |공비|<1이므로 수렴한다.
즉, '급수의 성질②'를 사용할 수 있다.)

$$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}\right)-\left(\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right)=\left(\frac{1}{2}\times 2\right)-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

예제2 등비급수

등비수열 $\{a_n\}$에 대해, $\lim_{n\to\infty}\frac{6^{n+1}}{36a_n+3^n}=60$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 의 값은?

해설

$\lim_{n\to\infty}\frac{6^{n+1}}{36a_n+3^n}=60$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{6^n}{36a_n+3^n}=10$이다.

$\{a_n\}$은 등비수열이므로 $a_n=a_1r^{n-1}$이라고 한다.

분모·분자를 6^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6a_1\times\left(\frac{r}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=10\ \cdots\ ①$$

i) $|\frac{r}{6}|<1$이면 주어진 극한은 무한대로 발산한다.

ii) $\frac{r}{6}=-1$이면 주어진 극한은 진동한다. (발산)

iii) $\frac{r}{6}=1$이면 좌변은 $\frac{1}{6a_1}$, 우변은 10이다.

즉, $\frac{1}{6a_1}=10$이므로 $a_1=\frac{1}{60}$, $r=6$이다.

$a_n=\frac{1}{60}\times 6^{n-1}$이므로, $\frac{1}{a_n}=60\times\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$이다.

$\frac{1}{a_1}=60$이므로, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{60}{1-\frac{1}{6}}=72$이다.

예제3 등비급수의 합

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=6,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=-\frac{27}{5}$일 때, a_4의 값은?

해설

$a_2=6,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=-\frac{27}{5}$이므로 $-1<r<1,\ r\neq 0$이다. ㉠

$a_2=6$이므로 $a_1=\frac{6}{r}$이고,

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{6}{r}}{1-r}=\frac{6}{r(1-r)},\ \frac{6}{r(1-r)}=-\frac{27}{5}$에서

$9r^2-9r-10=0,\ (3r+2)(3r-5)=0$에서

$r=-\frac{2}{3}$ 또는 $r=\frac{5}{3}$이다. (㉠에 의하여 $r=-\frac{2}{3}$이다.)

따라서 $a_4=a_2\times r^2=6\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2=6\times\frac{4}{9}=\frac{8}{3}$이다.

유형 01 수열의 극한

01 2023학년도 6월 23번 정답률 95%

23. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

02 2023학년도 9월 23번 정답률 94%

23. $\lim_{n\to\infty} \frac{2\times 3^{n+1}+5}{3^n+2^{n+1}}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

03 2023학년도 수능 23번 정답률 87%

23. $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

04 2024학년도 6월 23번 정답률 89%

23. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

05 2024학년도 9월 25번 정답률 87%

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+2}{2}=6$일 때,

$\lim_{n\to\infty} \frac{na_n+1}{a_n+2n}$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

06 2024학년도 수능 25번 정답률 87%

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=3$일 때,

a_2의 값은? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

07 2025학년도 6월 23번 정답률 92%

23. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n}-\sqrt{n^2+4n}\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

08 2025학년도 9월 29번 정답률 62%

29. 두 실수 a, $b\,(a>1,\ b>1)$이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=a,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\frac{9}{a}$$

를 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

09 2025학년도 6월 23번 정답률 94%

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

10 2025학년도 6월 25번 정답률 91%

25. 수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3n^2-n}{2n^2+1}\right)=2$$

를 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^{\,2}+2a_n\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{17}{4}$ ② $\frac{19}{4}$ ③ $\frac{21}{4}$ ④ $\frac{23}{4}$ ⑤ $\frac{25}{4}$

11 2025학년도 9월 25번 정답률 89%

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\times a_n-1}{3\times 2^{n+1}}=1$$

일 때, a_1+a_2의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

12 2025학년도 수능 25번 정답률 89%

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2+3}=1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n^{\,2}+n}-a_n\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

13 2026학년도 6월 23번 정답률 97%

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{4\times 3^{n+1}}{2^n+3^n}$의 값은? [2점]

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

14 2026학년도 9월 25번 정답률 92%

25. 두 실수 a, b에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{an^b}{\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}}=6$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

15 2026학년도 수능 25번 정답률 81%

25. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sqrt{9n^2-5}+2n<a_n<5n+1$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(a_n+2)^2}{na_n+5n^2-2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

유형 02 수열의 극한 활용

01 2025학년도 6월 30번 정답률 6%

30. 함수 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{10}$의 그래프와 함수 $y=\tan x$의 그래프가 만나는 모든 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$$\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty}a_n^3\tan^2(a_{n+1}-a_n)$$

의 값을 구하시오. [4점]

유형 03 삼각함수의 극한

01 2025학년도 9월 23번 정답률 96%

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

02 2025학년도 수능 23번 정답률 96%

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2}{\sin^2 x}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

유형 04 수열의 합

01 2024학년도 6월 27번 정답률 75%

27. 첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

02 2025학년도 6월 30번 정답률 11%

30. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} -1 & (a_n \le -1) \\ a_n & (a_n > -1) \end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$은 수렴하고 그 합은 -3이다.

(나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$은 수렴하고 그 합은 8이다.

$b_3 = -1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$의 값을 구하시오. [4점]

03 2025학년도 9월 26번 정답률 73%

26. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 $a_1=b_1=1$, $a_2b_2=1$이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_na_{n+1}}+b_n\right)=2$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

04 2025학년도 9월 29번 정답률 49%

29. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 합을 S_m이라 하자. 모든 자연수 m에 대하여

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m+1}{n(n+m+1)}$$

일 때, $a_1 + a_{10} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

05 2026학년도 6월 25번 정답률 87%

25. 양수 a에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a-3n}{n} + \frac{an+6}{n+a}\right)$이 실수 S에 수렴할 때, $a+S$의 값은? [3점]

① 7 ② $\frac{15}{2}$ ③ 8 ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ 9

유형 05 등비수열의 합

01 2025학년도 수능 29번 정답률 16%

29. 첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right),$$

$$3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$$

이 성립한다. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n} = S$일 때, $120S$의 값을 구하시오. [4점]

02 2025학년도 수능 29번 정답률 21%

29. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\frac{40}{3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\frac{20}{3}$$

을 만족시킨다. 부등식

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)>\frac{1}{700}$$

을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

03 2026학년도 6월 29번 정답률 27%

29. 두 정수 α, $\beta\,(\alpha>\beta)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_n=\alpha\times\sin\frac{n}{2}\pi+\beta\times\cos\frac{n}{2}\pi$$
> 이고, $a_1\times a_2\times a_3\times a_4=4$이다.

수열 $\{a_n\}$과 $b_1>0$인 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-2}\,b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-3}\,b_{2n})=6$$

일 때, $b_1\times b_3=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

04 2026학년도 9월 29번 정답률 34%

29. 첫째항이 양수이고 공비가 유리수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고, 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 + a_2 < 10$

(나) 수열 $\{a_n\}$의 정수인 항의 개수는 3이고, 이 세 항의 곱은 216이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

05 2026학년도 수능 29번 정답률 31%

29. 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> 어떤 자연수 k에 대하여
>
> $$b_{k+i}=\frac{1}{a_i}-1 \ (i=1,\ 2,\ 3)$$
>
> 이다.

부등식

$$0<\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n-\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right)<30$$

이 성립할 때, $a_2\times\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $a_1\neq 0$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

유형 06 등비수열의 극한

01 2023학년도 수능 25번 정답률 66%

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3,\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\,2}=6$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

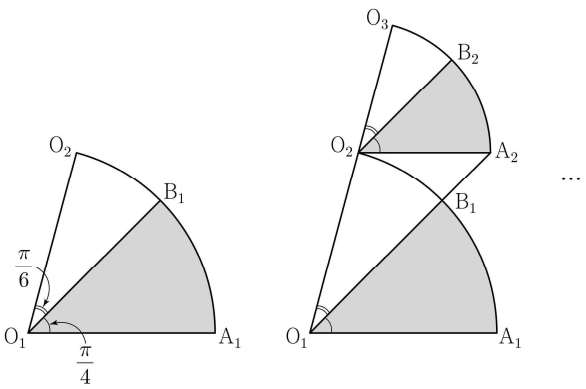
유형 07 등비급수와 수열의 도형 활용

01 2023학년도 6월 26번 정답률 80%

26. 그림과 같이 중심이 O_1, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_1A_1O_2$가 있다. 호 A_1O_2 위에 점 B_1을 $\angle A_1O_1B_1=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_1A_1B_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 O_2를 지나고 선분 O_1A_1에 평행한 직선이 직선 O_1B_1과 만나는 점을 A_2라 하자. 중심이 O_2이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_2A_2O_3$을 부채꼴 $O_1A_1B_1$과 겹치지 않도록 그린다. 호 A_2O_3 위에 점 B_2를 $\angle A_2O_2B_2=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_2A_2B_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{3\pi}{16}$ ② $\frac{7\pi}{32}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{9\pi}{32}$ ⑤ $\frac{5\pi}{16}$

02 2023학년도 9월 27번 정답률 54%

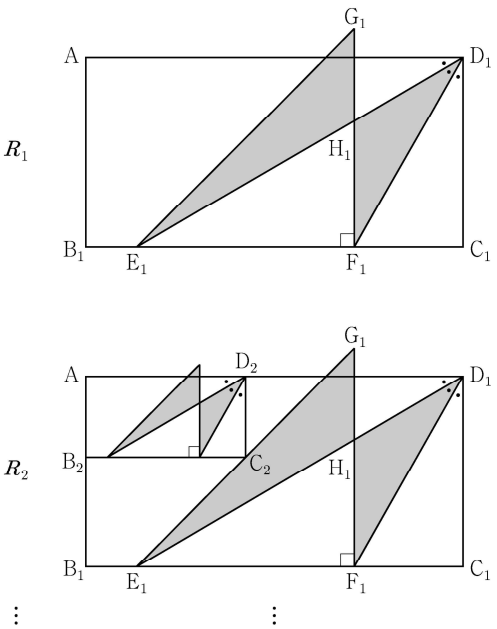
27. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. $\angle AD_1C_1$을 삼등분하는 두 직선이 선분 B_1C_1과 만나는 점 중 점 B_1에 가까운 점을 E_1, 점 C_1에 가까운 점을 F_1이라 하자.

$\overline{E_1F_1}=\overline{F_1G_1}$, $\angle E_1F_1G_1=\dfrac{\pi}{2}$이고 선분 AD_1과 선분 F_1G_1이 만나도록 점 G_1을 잡아 삼각형 $E_1F_1G_1$을 그린다.

선분 E_1D_1과 선분 F_1G_1이 만나는 점을 H_1이라 할 때, 두 삼각형 $G_1E_1H_1$, $H_1F_1D_1$로 만들어진 ⫽ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 E_1G_1 위의 점 C_2, 선분 AD_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 ⫽ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$의 값은? [3점]



① $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ ② $\dfrac{5\sqrt{3}}{18}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\dfrac{7\sqrt{3}}{18}$ ⑤ $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

03 2024학년도 6월 26번 정답률 71%

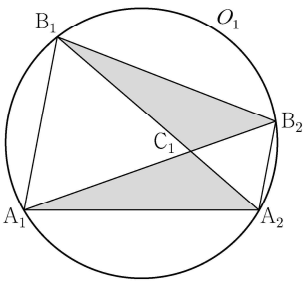
26. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1A_2}=3$이고 $\angle A_1B_1A_2=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 $A_1A_2B_1$과 이 삼각형의 외접원 O_1이 있다.

점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1에 평행한 직선이 원 O_1과 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 B_2라 하자. 두 선분 A_1B_2, B_1A_2가 만나는 점을 C_1이라 할 때, 두 삼각형 $A_1A_2C_1$, $B_1C_1B_2$로 만들어진 ⋛ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

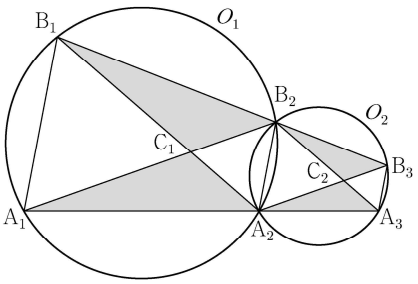
그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1A_2에 평행한 직선이 직선 A_1A_2와 만나는 점을 A_3이라 할 때, 삼각형 $A_2A_3B_2$의 외접원을 O_2라 하자. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 B_3, C_2를 잡아 원 O_2에 ⋛ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{11\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{13\sqrt{3}}{9}$

④ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

04 2024학년도 9월 27번 정답률 61%

27. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=1$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 두 대각선의 교점을 E_1이라 하자.

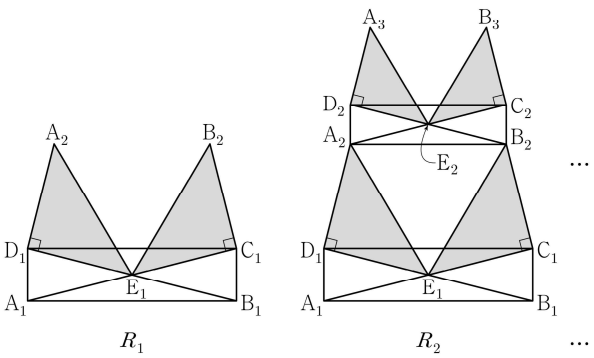
$\overline{A_2D_1}=\overline{D_1E_1}$, $\angle A_2D_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 A_2E_1이 만나도록 점 A_2를 잡고, $\overline{B_2C_1}=\overline{C_1E_1}$, $\angle B_2C_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 B_2E_1이 만나도록 점 B_2를 잡는다.

두 삼각형 $A_2D_1E_1$, $B_2C_1E_1$을 그린 후 △ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=4:1$이고 선분 D_2C_2가 두 선분 A_2E_1, B_2E_1과 만나지 않도록 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다.

그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 점 E_2, A_3, B_3을 잡고 두 삼각형 $A_3D_2E_2$, $B_3C_2E_2$를 그린 후 △ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{68}{5}$ ② $\frac{34}{3}$ ③ $\frac{68}{7}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{68}{9}$

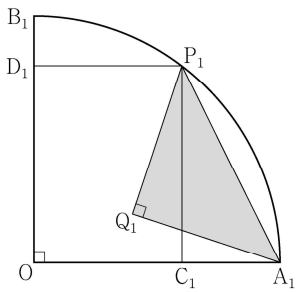
05 2024학년도 수능 27번 정답률 68%

27. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_1B_1이 있다. 호 A_1B_1 위에 점 P_1, 선분 OA_1 위에 점 C_1, 선분 OB_1 위에 점 D_1을 사각형 $OC_1P_1D_1$이 $\overline{OC_1}:\overline{OD_1}=3:4$인 직사각형이 되도록 잡는다. 부채꼴 OA_1B_1의 내부에 점 Q_1을 $\overline{P_1Q_1}=\overline{A_1Q_1}$, $\angle P_1Q_1A_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 이등변삼각형 $P_1Q_1A_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

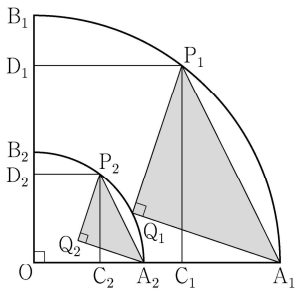
그림 R_1에서 선분 OA_1 위의 점 A_2와 선분 OB_1 위의 점 B_2를 $\overline{OQ_1}=\overline{OA_2}=\overline{OB_2}$가 되도록 잡고, 중심이 O, 반지름의 길이가 $\overline{OQ_1}$, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 점 P_2, C_2, D_2, Q_2를 잡고, 이등변삼각형 $P_2Q_2A_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{9}{40}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{11}{40}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{13}{40}$

유형 01 수열의 극한

01 2023학년도 6월 23번 정답률 95%

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ②

해 설

있는 그대로 계산 시 $\frac{1}{\infty-\infty}$꼴, 즉, 부정형이다.

'부정형'인자인 '분모'가 수렴하도록 식을 조작한다.

분모 · 분자에 $(\sqrt{n^2+n+1}+n)$을 곱하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}{1+\frac{1}{n}}=2$$

02 2023학년도 9월 23번 정답률 94%

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{2\times3^{n+1}+5}{3^n+2^{n+1}}$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

정 답 ③

해 설

$\frac{\infty}{\infty}$꼴 부정형이다. 부정형 인자를 없애기 이해,

즉 분자가 ∞가 되기에, 부정형이 발생된다.

'분모'가 ∞가 되면, 0으로 수렴할 수 있기 때문에,

부정형 인자는 '분자'의 3^n이다.

분모 · 분자를 3^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2\times3+5\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}\right\}=6$$

03 2023학년도 수능 23번 정답률 87%

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ⑤

해 설

있는 그대로 계산 시 $\frac{0}{0}$꼴, 즉, 부정형이다.

'부정형'인자인 '분모'가 0이 되지 않도록 식을 조작한다.

분모, 분자에 n을 곱하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}(5+\frac{3}{n})}{\lim_{n\to\infty}(1-\frac{2}{n^2})}=5$$

04 2024학년도 6월 23번 정답률 89%

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

정 답 ①

해 설

$\frac{1}{\infty-\infty}$ 꼴, 즉, 부정형 형태이다.

'분모'가 부정형의 '인자'이므로 분모-분자에 $\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}$ 을 곱하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2}=1$$

05 2024학년도 9월 25번 정답률 87%

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ⑤

해 설

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n+2}{2}\right)\times\lim_{n\to\infty}2=6\times\lim_{n\to\infty}2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n+2}{2}\times2\right)=6\times2 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n+2)\text{이고,}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=10 \cdots ①$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+\frac{1}{n}}{\frac{a_n}{n}+2}=\frac{10}{2}=5$$

06 2024학년도 수능 25번 정답률 87%

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=3$일 때,

a_2의 값은? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

정 답 ②

해 설

분모의 지배항은 2^{2n-1}이다.

즉 $a_n=a_1 4^{n-1}$라고 할 수 있다.

즉 무한대로 갈 때 지배항의 극한을 구하면 된다.

여기서 팁을 알려주면 공비가 같다면 둘 다 1을 넣고 비교하자

즉 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 4^{n-1}}{2^{2n-1}}=\frac{a_1}{2}=3,\quad a_1=6$

$a_2=24$

07 2025학년도 6월 23번 정답률 92%

23. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n}-\sqrt{n^2+4n}\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

정 답 ②

해 설

$\sqrt{(이차식)}-\sqrt{(이차식)}$꼴의 극한은 다음과 같이 구한다.
$\sqrt{(이차식)}$의 이차식을 완전제곱식으로 변형하여
$\sqrt{(완전제곱식)}$ = 일차식으로 게산할 수 있다.
이또한 지배항의 원리로 근사한 것이다,

==========

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n+\frac{81}{4}}-\sqrt{n^2+4n+4}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(n+\frac{9}{2}\right)-(n+2)\right\}=\frac{5}{2}$$

08 2025학년도 9월 29번 정답률 62%

29. 두 실수 a, $b\,(a>1,\ b>1)$이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=a,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\frac{9}{a}$$

를 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

정 답 18

해 설

STEP1 첫 번째 극한

$a>1$이므로 a^n과 3^n은 모두 지수적으로 증가하지만,
그 성장 속도는 a와 3의 상대적 크기에 따라 달라진다.
따라서 $1<a<3$, $a=3$, $3<a$인 경우를 살펴보겠다.

- CASE 1. $a=3$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+3^{n+1}}{3^{n+1}+3^n}=1=a$ (이는 $a=3$에 모순이다.) (X)

- CASE 2. $1<a<3$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}$에서 분모·분자를 3^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{a}{3}\right)^n\times 3}{3+\left(\frac{a}{3}\right)^n}=\frac{1}{3}=a$$ (이는 $1<a<3$에 모순이다.) (X)

- CASE 3. $a>3$

$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}\right\}$에서 분모·분자를 a^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\left(\frac{3}{a}\right)^n+a}{\left(\frac{3}{a}\right)^n\times 3+1}\right\}=a=a$$ (O)

STEP2 두 번째 극한

여기서도 $a>b$, $a=b$, $a<b$인 경우를 다루면 된다.

- CASE 1. $a>b$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}$에서, 분모·분자를 a^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+b\times\left(\frac{b}{a}\right)^n}{a+\left(\frac{b}{a}\right)^n}=\frac{1}{a}\neq\frac{9}{a}$$ (X)

- CASE 2. $b>a$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}$에서, 분모·분자를 b^n으로 나누면

$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n+b}{(\frac{a}{b})^n+1}=b=\frac{9}{a}$에서 $ab=9$를 만족해야한다.

$3<a<b$이므로 만족할 수 없다. (X)

- CASE 3. $a=b$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=1=\frac{9}{a}\ \rightarrow\ a=9$

이때, $a=b$이므로 $a=b=9$이다.
따라서 $a+b=18$이다. 즉, $ab=9$이다.

09 2025학년도 6월 23번 정답률 94%

23. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ②

해 설

보자마자 우선 $n=\infty$를 대입하면 $\frac{0}{0}$꼴 부정형임을 알 수 있다. 즉, 분모에 0이 되는 '부정형 인자'를 없애기 위해 분모·분자에 2^n을 곱하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+(\frac{2}{3})^{n+1}}{\frac{1}{2}+(\frac{2}{3})^n}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

10 2025학년도 6월 25번 정답률 91%

25. 수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3n^2-n}{2n^2+1}\right)=2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n^2+2a_n)$의 값은? [3점]

① $\frac{17}{4}$ ② $\frac{19}{4}$ ③ $\frac{21}{4}$ ④ $\frac{23}{4}$ ⑤ $\frac{25}{4}$

정 답 ③

해 설

STEP1 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 구하기

주어진 급수가 수렴하므로

'급수와 수열의 극한값 사이의 관계'에 의해

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n}{2n^2+1}=\frac{3}{2}$$

STEP2 답 구하기

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^2+2a_n)=\lim_{n\to\infty}a_n(a_n+2)$$

$$=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}(a_n+2)=\frac{3}{2}\times\frac{7}{2}=\frac{21}{4}$$

($\because a_n$과 (a_n+2)모두 수렴하므로 분리하여 연산 가능)

11 2025학년도 9월 25번 정답률 89%

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\times a_n-1}{3\times 2^{n+1}}=1$$

일 때, a_1+a_2의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

정 답 ④

해 설

$a_n=a_1r^{n-1}$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{(4r)^{n-1}\times 4a_1}{3\times 2^{n+1}}=1$, 분모·분자를 2^n으로 나누면

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2r)^n\times\frac{a_1}{r}}{3\times 2}=1$이다. 즉, $2r=1$, $r=\frac{1}{2}$이다.

따라서 $a_1=3$, $r=\frac{1}{2}$이므로 $a_1+a_2=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

12 2025학년도 수능 25번 정답률 89%

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2+3}=1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n^{\,2}+n}-a_n\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

정 답 ②

해 설

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n^2+n}-a_n)=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{\sqrt{a_n^2+n}+a_n})$

$=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{(\frac{a_n}{n})^2+\frac{1}{n}}+\frac{a_n}{n}})$

$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2+3}$에서, 분모·분자를 n^2으로 나누면

$\lim_{n\to\infty}(\frac{\frac{a_n}{n}}{1+\frac{3}{n^2}})=1$, 양변에 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n^2})$ $(=1)$을 곱하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1$이다.

즉, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+\frac{1}{n}}+\frac{a_n}{n}}\right)=\frac{1}{2}$이다.

13 2026학년도 6월 23번 정답률 97%

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{4\times 3^{n+1}}{2^n+3^n}$의 값은? [2점]

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

정 답 ①

해 설

$\lim_{n\to\infty}\frac{4\times 3^{n+1}}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times 3}{\frac{2^n}{3^n}+1}=12$이다.

14 2026학년도 9월 25번 정답률 92%

25. 두 실수 a, b에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^b}{\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}}=6$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

정 답 ②

해 설

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^b}{\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}}$에서 분모에 루트의 차가 포함되어 있으므로 유리화를 하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^b}{\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an^b(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n})}{(\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n})(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an^b(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n})}{3n}$$

위에서 극한값이 수렴하기 위해서는, 분자의 최고차항의 차수가 1차이어야 한다.

따라서, $b=-1$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n})}{3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a(\sqrt{1+\frac{4}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}})}{3}$$

이므로 $a=9$이다.

따라서, $a+b=8$이다.

15 2026학년도 수능 25번 정답률 81%

25. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sqrt{9n^2-5}+2n<a_n<5n+1$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+2)^2}{na_n+5n^2-2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

정 답 ④

해 설

근사를 이용하여 문항을 풀 수 있다.

$\sqrt{9n^2-5}+2n<a_n<5n+1$에서 n이 ∞으로 갈 때, 좌변의 $\sqrt{9n^2-5}$는 $3n$으로 근사할 수 있다.

따라서, $\frac{a_n}{n}=5$로 근사된다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+2)^2}{na_n+5n^2-2}$에서 분모와 분자를 n^2으로 나누자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+2)^2}{na_n+5n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{a_n+2}{n})^2}{\frac{a_n}{n}+5-\frac{2}{n^2}}=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$$ 이다.

(TIP: $a_n=5n$으로 두고 대입하여 n^2항의 계수만 비교하여도 같은 결과가 나온다.)

유형 02 수열의 극한 활용

01 2025학년도 6월 30번 정답률 6%

30. 함수 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{10}$의 그래프와 함수 $y=\tan x$의 그래프가 만나는 모든 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$$\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty} a_n^3\tan^2(a_{n+1}-a_n)$$

의 값을 구하시오. [4점]

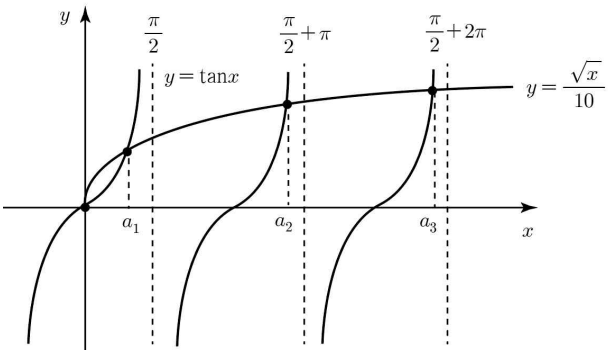
정 답 25

해 설

다음 문제는 250630이다. 30번임에도 특이하게 수열의 극한이 나온 문제이다. 킬러문항 배제정책 이후 미적분에서 새롭게 보여주는 유형이니 완벽히 끝내는 것이 좋다. 수열의 극한은 어느정도의 근사로 완벽하게 해결되니 잘 따라오면 매우 얻어갈 것이 많은 문제이다.

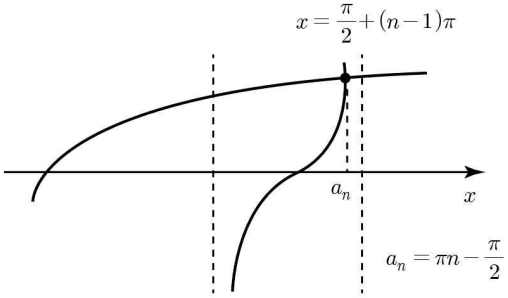
우선 문제를 보면 아는 함수 둘과 복잡한 극한식이 보인다.

항상 아는 것부터 시작하자! 우선 상황이해를 위해 그림을 그려보자



우선 무리함수와 삼각함수의 교점이다.

항상 하위권들이 하는 가장 큰 실수는 구하지 못하는 것을 정확히 구하려는 것이다. 우선 우리는 무리함수와 삼각함수의 일반해를 구하는 법을 배운적이 없다. 그런 생각을 했다면 빠르게 포기하고 생각을 해야 한다. 이제 한 번 그래프를 관찰해보면 n값이 커질수록 a_n의 값이 점근선에 가까워지는 것을 발견할 수 있다.



즉, $a_n=\pi n-\dfrac{\pi}{2}$으로 근사 가능하다.(무한대에선 $n\pi$로 근사)

이제 극한식을 보도록 하자

n이 무한대로 가면

$a_{n+1}-a_n$은 π에 수렴할 것이다.

(점점 점근선에 가까워지고 점근선 간의 간격이 π이므로)

하지만 $\tan\pi$는 0이므로 극한식에서 쓸모가 없다는 걸 알 수 있다. 따라서 생각을 해보아야한다.

무언가를 변형해야할 것인데 무얼 변경해야하지?

아! 삼각함수 덧셈정리구나

아마 하위권들은 이런 생각을 어떻게 하느냐 물을 수 있다.

하지만 상위권도 바로 생각나는게 아니다.

30번 문제는 이런 사고과정에 시간을 투자하는 것이다.

(계산이 아니라)

이제 식을 변형해보자.

$\tan^2(a_{n+1}-a_n)=\left(\dfrac{\tan a_{n+1}-\tan a_n}{1+\tan a_{n+1}\tan a_n}\right)^2$ 이고

이때 $\tan a_n=\dfrac{\sqrt{a_n}}{10}$이다. (교점이므로)

즉, 위의 식은 다음과 같다.

$$\frac{\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{10}}{1+\dfrac{\sqrt{a_{n+1}a_n}}{100}}=\frac{\dfrac{(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})}{10}}{(1+\dfrac{\sqrt{a_{n+1}a_n}}{100})(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})}$$

$$=\frac{\dfrac{a_{n+1}-a_n}{10}}{(1+\dfrac{\sqrt{a_{n+1}a_n}}{100})(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})}$$

복잡해보이지만 그냥 대입하고 합차공식 쓴거니

제발 쫄지말길(허수특징이다)...

이제 그냥 대입을 해주도록하자

$a_n=\pi n-\dfrac{\pi}{2}$.이고

(최고차항만 볼 것이니 $n\pi$라고 생각해도 좋다)

$a_{n+1}-a_n=\pi$ 이다.

이제 차수를 생각해주도록 하자

조건식에서 a_n^3이 보이므로 분모에 3차가 필요하다.

잘 생각을 해보면 3차를 제외한 나머지 2차 1차 등등은

날아가므로 복잡한 식이라도 확인할 것은 최고차항의 인수이다.

즉 위의 식을 간소화하면

$$\frac{\pi}{(10\times\dfrac{\sqrt{\pi^2n^2}}{100})(2\sqrt{\pi n})}=\frac{\pi}{\dfrac{1}{5}(\pi n)^{\frac{3}{2}}}$$ 까지 간소화가 가능하다.

이제 제곱을 해주면

$25\times\dfrac{1}{\pi n^3}$이고 조건 극한식은 결국

$$\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty}a_n^3\tan^2(a_{n+1}-a_n)=\frac{(n\pi)^3}{\pi^2}\times25\times\frac{1}{\pi n^3}=25$$

유형 03 삼각함수의 극한

01 2025학년도 9월 23번 정답률 96%

23. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ⑤

해 설

풀이1 표준 공식 이용

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}\cdot 5=5$

TIP 삼각함수의 극한은 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}=1$을 만족한다.

풀이2 매클로린 급수로 확인하기

$\sin(5x)$를 $x=0$ 주변에서 매클로린 급수로 정리하면,

$\sin(5x)=5x-\frac{(5x)^3}{3!}+\cdots=5x-\frac{125x^3}{6}+\cdots$

여기서 x로 나누면

$\frac{\sin(5x)}{x}=5-\frac{125x^2}{6}+\cdots$

$x\to 0$이면 나머지 항은 모두 0으로 가므로 극한은 5이다.

TIP 매클로린 급수는 다음과 같다.

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$

풀이3 로피탈 정리를 이용한 풀이

$x=0$을 직접 대입하면 $\frac{0}{0}$형태이므로 로피탈 정리를 적용하면

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos(5x)}{1}=5\cos(0)=5$이다.

02 2025학년도 수능 23번 정답률 96%

23. $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\sin^2 x}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ③

해 설

$x=0$을 직접 대입하면 $\frac{0}{0}$형태이므로 로피탈 정리를 적용하면

$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}3\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}=3$이다.

유형 04 수열의 합

01 2024학년도 6월 27번 정답률 75%

27. 첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

정 답 ③

해 설

STEP1 일반항 찾기

- 먼저 일반항 $T_n=\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}$의 $n\to\infty$ 극한이 0여야 급수가 수렴합니다.
- 등차수열 $a_n=4+(n-1)d$에서 $\frac{a_n}{n}=\frac{4+(n-1)d}{n}\to d$

  반면, $\frac{3n+7}{n+2}\to 3$이므로 따라서 $d=3$가 되어야 합니다.
- $d=3$이면 $a_n=3n+1$이므로, $\frac{a_n}{n}=3+\frac{1}{n}$이므로

  급수의 일반항은 $T_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$입니다.

STEP2 답 구하기

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}\right)=\frac{3}{2}$$

02 2025학년도 6월 30번 정답률 11%

30. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases}-1 & (a_n\le -1)\\ a_n & (a_n>-1)\end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$은 수렴하고 그 합은 -3이다.

(나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$은 수렴하고 그 합은 8이다.

$b_3=-1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$의 값을 구하시오. [4점]

정 답 24

해 설

30번 문항에 급수가 등장한 특이한 문항이다.
하지만 항상 기억하자
급수 문제는 r(공비) 분류 외엔 어려워질 수가 없다.
급수 문제가 어렵다면 그건 급수가 어려운 것이 아닌
case분류와 같은 수학적 사고가 어려운 것이다,
이제 문제에 들어가자,
우선 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을 $a_n=a_1r^{n-1}$이라 하자.
이때 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $a_1\neq 0$이다.

(i) $r>1$인 경우
a_n의 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(ii) $r=1$인 경우
a_n의 값이 일정한 값을 가지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(iii) $r=-1$인 경우
a_n의 값이 $a_1,\ -a_1,\ a_1,\ -a_1,\ a,\ \cdots$이 반복되므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(iv) $r<-1$인 경우
a_n의 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(v) $r=0$인 경우
a_n의 값이 첫째항을 제외하고 모두 0이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다. 따라서 $-1<r<0$ 또는 $0<r<1$이다.
그런데 $b_3=-1$이므로 $a_3\le -1$이다.
즉 $a_1r^2\le -1$ 이다.
그런데 $0<r^2<1$이므로 $a_1\le -1$이고, 따라서 $b_1=-1$이다.
또한 $a_1\le -1$이므로 $0<r<1$이면 a_n의 모든 항은 음수이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.
따라서 $-1<r<0$이다.

① $a_2=a_1r\le -1$일 때
$r\ge -\frac{1}{a_1}>0$이므로 모순이다.
따라서 $a_2=a_1r>-1$이므로 $b_2=a_2=a_1r$이다.

② $b_3=-1$이므로 $a_3=a_1r^2\le -1$이다.

③ $a_4=a_1r^3\le -1$일 때
$a_4=a_1r^3=a_1r^2\times r\ge -r>0$이므로 모순이다

④ $a_5=a_1r^4\le -1$일 때 $b_5=-1$인데 $b_1+b_3+b_5=-3$이므로 조건 (가)에 의하여 모순이다.
$b_5=a_5=a_1r^4$

⑤ $a_6=a_4r^2$이고 $a_4>-1$이므로 $a_6>-r^2>-1$
따라서 $b_6=a_6=a_1r^5$
같은 방법으로 생각하면 $b_7=a_7,\ b_8=a_8,\ b_9=a_9,\cdots$
이므로 $b_n=\begin{cases}-1 & (n=1,\ n=3)\\ a_1r^{n-1} & (n=2,\ n\ge 4)\end{cases}$이다.

조건 (가)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}=-1+(-1)+a_1r^4+a_1r^6+a_1r^8+\cdots$$

$$=-2+\frac{a_1r^4}{1-r^2}=3,\ \frac{a_1r^4}{1-r^2}=-1,\ a_1r^4=r^2-1\ \cdots\ ㉠$$

조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}=a_1r+a_1r^3+a_1r^5+\cdots=\frac{a_1r}{1-r^2}=8$$

$$a_1r=8-8r^2=8(1-r^2)\ \cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에서 $a_1r=-8a_1r^4$이므로 $r^3=-\frac{1}{8}$, 즉 $r=-\frac{1}{2}$이므로

㉡에 대입하면 $-\frac{1}{2}a_1=6,\ a_1=-12$이다.

따라서 $a_n=-12\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|-12\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}12\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{12}{1-\frac{1}{2}}=24$$

이렇듯 등비급수 고난도는 공비 분류 후 찾아가는 것을 잘하며 쭉 따라가다보면 풀린다.
가장 중요한 점은 조급하지 않는 것이다.

03 2025학년도 9월 26번 정답률 73%

26. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 $a_1=b_1=1$, $a_2b_2=1$이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_na_{n+1}}+b_n\right)=2$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

정 답 ⑤

해 설

STEP1 등차수열 $\{a_n\}$ 분석

· 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d>0)$이라 하면

$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$이다.

· $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$

$=\frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$

$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$ … ㉠

· 공차가 양수인 등차수열의 극한값은 ∞이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}$이다.

STEP2 전체 식 분석

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_na_{n+1}}+b_n\right)=2$에서 $\frac{1}{a_na_{n+1}}+b_n=c_n$이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=2$이다.

$b_n=c_n-\frac{1}{a_na_{n+1}}$이므로 급수의 성질에 의하여

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n-\frac{1}{a_na_{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=2-\frac{1}{d}$ … ㉡

따라서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를

r라 하면 $-1<r<1$이고, $a_2b_2=(1+d)r=1$에서 $r=\frac{1}{1+d}$이다.

이때 $d>0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{b_1}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{1+d}}=\frac{1+d}{d}$ … ㉢

이므로 ㉡, ㉢에서 $2-\frac{1}{d}=\frac{1+d}{d}$, $\frac{2d-1}{d}=\frac{1+d}{d}$에서 $d=2$이고

㉡ 또는 ㉢에서 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{3}{2}$이다.

04 2025학년도 9월 29번 정답률 49%

29. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 합을 S_m이라 하자. 모든 자연수 m에 대하여

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m+1}{n(n+m+1)}$$

일 때, $a_1 + a_{10} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정 답 57

해 설

25학년도 9월 29번이다.
요즘 트렌드에서 명심할 점은 번호가 난이도를 대변하지 않는다는 것이다.
수열, 급수 문제는 잘따라가면 풀린다는 것을 믿고
조급하지 말고 풀어나가는 게 중요하다.
들어가도록 하자.
일반항을 부분분수로 변환하면

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m+1}{n(n+m+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m+1} \right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+m+1} \right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{m+2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+3}\right) + \cdots \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n+1}\right) \right\}$$

따라서

$$S_1 = \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \right\}$$
$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{이므로 } a_1 = S_1 = \frac{3}{2}$$

뭔가 사라진다면 원하는 값을 구할 수 있지 않을까? 라는 생각을
가지며 구하고자하는 값에 집중하자

$$S_9 = \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{13}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+10}\right) \right\}$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10}$$
$$S_{10} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{14}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+11}\right) \right\}$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} = S_9 + \frac{1}{11}$$

이므로 $a_{10} = S_{10} - S_9 = \left(S_9 + \frac{1}{11}\right) - S_9 = \frac{1}{11}$이다.

따라서 $a_1 + a_{10} = \frac{3}{2} + \frac{1}{11} = \frac{35}{22}$이므로 $p+q = 57$이다.

05 2026학년도 6월 25번 정답률 87%

25. 양수 a에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a-3n}{n} + \frac{an+6}{n+a} \right)$이 실수 S에 수렴할 때, $a+S$의 값은? [3점]

① 7 ② $\frac{15}{2}$ ③ 8 ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ 9

정 답 ④

해 설

급수가 수렴하기 위해서는 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이어야 한다.

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a-3n}{n} + \frac{an+6}{n+a} \right) = 0$이므로 $a = 3$이다.

$a=3$을 대입하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-3n}{n} + \frac{3n+6}{n+3} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n} - \frac{3}{n+3} \right)$

이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n} - \frac{3}{n+3} \right) = \frac{3}{1} + \frac{3}{2} + \frac{3}{3}$이므로, $S = \frac{11}{2}$이다.

$\left(\because \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n} = \frac{3}{1} + \frac{3}{2} + \frac{3}{3} + \frac{3}{4} + \cdots, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n+1} = \frac{3}{4} + \cdots \right)$

따라서, $a+S = \frac{17}{2}$이다.

유형 05 등비수열의 합

01 2025학년도 수능 29번 정답률 16%

29. 첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right),$$

$$3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$$

이 성립한다. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n} = S$일 때, $120S$의 값을 구하시오. [4점]

정 답 162

해 설

등비급수는 뭐다? **공비의 분류!**
이외엔 어려워질 수가 없다. 쫄지 말고 우직하게 따라가자.

$a_n = ar^{n-1}$, $b_n = bs^{n-1}$이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하므로
$-1 < r < 1$, $-1 < s < 1$이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{ab}{1-rs}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-r}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b}{1-s}$$이므로

$$\frac{ab}{1-rs} = \frac{a}{1-r} \times \frac{b}{1-s}$$

$1-rs = (1-r)(1-s)$에서 $r+s = 2rs$ … ㉠

(i) $r > 0$인 경우
$a_1 > 0$이면 $a_2 > 0$, $a_3 > 0$이므로

$$3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 3 \times \frac{a_2}{1-r^2}$$

$$7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}| = 7 \times \frac{a_3}{1-r^3}$$

$$\frac{3a_2}{1-r^2} = \frac{7a_3}{1-r^3}, \quad \frac{3}{1-r^2} = \frac{7r}{1-r^3}, \quad 4r^3 - 7r + 3 = 0$$

$$(r-1)(2r-1)(2r+3) = 0$$

따라서 $r = \frac{1}{2}$인데 ㉠을 만족시키는 s의 값이 존재하지 않으므로 모순이다.
같은 방법으로 $a_1 < 0$인 경우도 존재하지 않는다.

(ii) $r < 0$인 경우
$a_1 > 0$이면 $a_2 < 0$, $a_3 > 0$이고 수열 $\{|a_{2n}|\}$의 공비는 r^2,
수열 $\{|a_{3n}|\}$의 공비는 $-r^3$이므로

$$3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 3 \times \frac{-a_2}{1-r^2}$$

$$7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}| = 7 \times \frac{a_3}{1+r^3}$$

$$\frac{-3a_2}{1-r^2} = \frac{7a_3}{1+r^3}, \quad \frac{-3}{1-r^2} = \frac{7r}{1+r^3}$$

$4r^3 - 7r - 3 = (r+1)(2r-3)(2r+1) = 0$에서 $r = -\frac{1}{2}$이므로

㉠에 대입하면 $s = \frac{1}{4}$이다.

$a_1 < 0$인 경우도 같은 방법으로 생각하면 같은 결론을 얻을 수 있다.

$b_n = b\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n}$이다.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1} + b\left(\frac{1}{64}\right)^{n}}{b\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{4}{3} + \frac{1}{60} = \frac{27}{20}$$

따라서 $S = \frac{27}{20}$이므로 $120S = 162$이다.

풀이는 길으나 결국 공비 분류하고 모순 찾아 케이스 분류하는게 핵심이다.

02 2025학년도 수능 29번 정답률 21%

29. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\frac{40}{3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\frac{20}{3}$$

을 만족시킨다. 부등식

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)>\frac{1}{700}$$

을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

정 답 25

해 설

똑같다. 공비 분류하며 시작하자

우선 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자.
$a>0,\ r>0$인 경우 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n|-a_n=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
$a<0,\ r>0$인 경우 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n|+a_n=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 $a>0,\ r<0$이거나 $a<0,\ r<0$이다.

(i) $a>0,\ r<0$인 경우

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}2a_{2n-1}=\frac{2a}{1-r^2}=\frac{40}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(-2a_{2n})=\frac{-2ar}{1-r^2}=\frac{20}{3}$$

$$\frac{2a}{1-r^2}\times(-r)=\frac{20}{3},\quad \frac{40}{3}\times(-r)=\frac{20}{3}$$

$r=-\frac{1}{2},\ a=5$이다.

(ii) $a<0,\ r<0$인 경우

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}2a_{2n}=\frac{2ar}{1-r^2}=\frac{40}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(-2a_{2n-1})=-\frac{2a}{1-r^2}=\frac{20}{3}$$

$$\frac{2a}{1-r^2}\times r=\frac{40}{3},\ -\frac{20}{3}r=\frac{40}{3}$$에서 $r=-2$이다.

이때 $r<-1$이므로 $r^2>1$이 되어

$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)$와 $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)$ 모두 수렴하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=5,\ r=-\frac{1}{2}$이므로

$$a_n=5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

부등식

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)>\frac{1}{700}$$에서

$$\lim_{n\to\infty}\left\{5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\right\}>\frac{1}{700}$$

이때

$$\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\right)=\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right)$$에서

$k=4l-3$이면 $(-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}=1$

$k=4l-2$이면 $(-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}=-1$

$k=4l-1$이면 $(-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}=-1$

$k=4l$이면 $(-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}=1$

(단, l은 자연수)이므로

$2n=4p-2$ (p는 자연수)이면

$$\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}-\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}-\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}+\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{16}\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}$$

$2n=4p$ (p는 자연수)이면

$$\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}-\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}-\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}+\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{16}\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}$$

$n\to\infty$ 이면 $p\to\infty$이고

$2n=4p-2,\ 2n=4p$의 두 경우 모두 각 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left\{5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\right)\right\}$$

$$=5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)\times\frac{1}{1-\frac{1}{16}}\right\}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}>\frac{1}{700}$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 m의 값은 1, 3, 5, 7, 9이고, 그 합은 $1+3+5+7+9=25$이다.

이 문제도 부등식 해결이 관건이지 등비급수가 어려운 것이 아니다. "난 왜 이렇게 등비급수를 못할까"라는 생각보단 우직하게 가다보면 풀린다라는 확신을 가지는 것이 중요하다.

03 2026학년도 6월 29번 정답률 27%

29. 두 정수 α, $\beta\,(\alpha>\beta)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_n=\alpha\times\sin\frac{n}{2}\pi+\beta\times\cos\frac{n}{2}\pi$$
> 이고, $a_1\times a_2\times a_3\times a_4=4$이다.

수열 $\{a_n\}$과 $b_1>0$인 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-2}\,b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-3}\,b_{2n})=6$$

일 때, $b_1\times b_3=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정 답 109

해 설

전형적인 등비급수 문항으로, 난이도가 크게 높지 않아 문제의 조건을 충실히 따라가면 아이디어가 어려운 문항은 아니다.

STEP1 박스 내부 조건을 분석하여 α, β에 대한 조건 찾기

먼저, 박스 내부의 조건부터 분석하자.

$n=1,2,3,4$를 대입하면, $a_1=\alpha$, $a_2=-\beta$, $a_3=-\alpha$, $a_4=\beta$이다.

$a_1\times a_2\times a_3\times a_4=\alpha^2\beta^2=4$이므로 $\alpha\beta=\pm2$이다.

STEP2 급수 조건을 활용하여 b_n에 대한 정보 구하기

급수 조건으로 넘어가보면, n과 상관없이 $a_{4n-2}=-\beta$, $a_{4n-3}=\alpha$이므로, 다음과 같이 정리할 수 있다.

$-\beta\sum_{n=1}^{\infty}b_n=-\alpha\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=6$이다.

$\{b_n\}$의 공비를 r이라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b_1\frac{1}{1-r}$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=b_1r\frac{1}{1-r^2}$이므로,

$b_1\frac{\beta}{1-r}=-6$, $b_1r\frac{\alpha}{1-r^2}=-6$이다.

두 식이 같으므로 $\frac{r}{1+r}=\frac{\beta}{\alpha}$이다.

$b_1\frac{\beta}{1-r}=-6$에서 $b_1>0$이므로 $\beta<0$이고, $\beta=-1,-2$중 하나이다.

$\alpha>\beta$이므로 가능한 $(\alpha,\beta)=(2,-1),(1,-2),(-1,-2)$이다.

따라서, $\frac{r}{1+r}=2,-2,-\frac{1}{2}$중 하나이다.

이 중에서 가능한 경우는 $\frac{r}{1+r}=-2$, $r=-\frac{2}{3}$뿐이다.

따라서, $b_1=5$, $b_3=\frac{20}{9}$이고, 정답은 $\frac{100}{9}$이다.

04 2026학년도 9월 29번 정답률 34%

29. 첫째항이 양수이고 공비가 유리수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고, 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1+a_2<10$
> (나) 수열 $\{a_n\}$의 정수인 항의 개수는 3이고, 이 세 항의 곱은 216이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정 답 91

해 설

수열에 대한 분석을 통해 급수를 해결하는 전형적인 문항으로, 사실상 등비수열 문제라고 볼 수 있다.
수1에서 공부한 내용을 바탕으로 핵심적인 조건을 잡고 시작하면 어렵지 않게 풀 수 있다.

STEP1 등비수열 분석을 통해 항의 조건 찾기

(가)의 조건은 특수한 제한조건이므로 핵심 조건인 (나)를 먼저 분석하자.

수열 $\{a_n\}$의 공비를 $\frac{y}{x}$이라 하자. (x, y는 정수)

정수인 세 항을 a_k, a_l, a_m이라 하자. ($k<l<m$)

$a_l=a_k(\frac{y}{x})^{l-k}$이다.

$(\frac{y}{x})^{l-k}$가 정수이므로 a_k는 x를 인수로 가진다.

a_k, a_l 사이에 정수인 항이 존재하지 않아야 하므로, $a_l=a_{k+1}$이다.
마찬가지로, $a_m=a_{l+1}$이다.
따라서 a_k, a_l, a_m은 연속된 항이고, 곱이 216이므로 $a_l=6$이다.

STEP2 (가) 조건을 활용하여 정답이 되는 공비 찾기

$\{a_n\}$의 급수가 수렴하므로 공비는 $|\frac{y}{x}|<1$이다.

따라서, $a_m=\pm5, \pm4, \pm3, \pm2, \pm1$ 중 하나이다.

각각의 경우 $a_k=\pm\frac{36}{5}, \pm9, \pm12, \pm18, \pm36$이다.

이 중에서 $a_m=\pm5$이면 a_k가 정수가 아니어서 불가능하다.
$a_m=\pm3, \pm2, \pm1$인 경우 $a_k=a_1$이어야만 정수인 항이 3개가 될 수 있다.
위의 경우 $a_1+a_2<10$의 조건을 만족시킬 수 없다.
따라서, $a_m=\pm4$이다.
$a_k=\pm9$인데, $a_k=a_1$이면 $a_1+a_2<10$의 조건을 만족시킬 수 없으므로 $a_{k-1}=\frac{27}{2}$가 a_1이 되는 경우가 가능하다.
이 때 $a_1+a_2<10$이려면 $a_2=-9$이다.
따라서, $a_1=\frac{27}{2}$, 공비는 $-\frac{2}{3}$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{27}{2}\frac{1}{1+\frac{2}{3}}=\frac{81}{10}$이다.

05 2026학년도 수능 29번 정답률 31%

29. 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> 어떤 자연수 k에 대하여
> $$b_{k+i}=\frac{1}{a_i}-1 \ (i=1,\ 2,\ 3)$$
> 이다.

부등식

$$0<\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n-\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right)<30$$

이 성립할 때, $a_2\times\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $a_1\neq 0$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정 답 97

해 설

수열에 대한 조건을 먼저 이용하여 정보를 찾은 후 급수를 활용하자.

STEP1 박스 안의 조건 이용하기

$\{a_n\}$의 공차를 d라 하면, 공차와 첫째항이 같으므로 $a_n=nd$이다.

어떤 자연수 k에 대하여 $b_{k+1}=\frac{1}{d}-1$, $b_{k+2}=\frac{1}{2d}-1$,

$b_{k+3}=\frac{1}{3d}-1$이다.

등비수열이므로 ${b_{k+2}}^2=b_{k+1}b_{k+3}$이다.

$(\frac{1}{2d}-1)^2=(\frac{1}{d}-1)(\frac{1}{3d}-1)$이고, 식을 정리하면 $d=\frac{1}{4}$이다.

대입하면, $b_{k+1}=3$, $b_{k+2}=1$이다.

$\{b_n\}$의 공비는 $\frac{1}{3}$이고, $b_{k+1}=b_1(\frac{1}{3})^k=3$이므로 $b_1=3^{k+1}$이다.

STEP2 부등식에 대입하여 조건 찾기

$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-\frac{1}{a_n a_{n+1}})=\sum_{n=1}^{\infty}b_n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b_1\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3^{k+2}}{2}$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{d}(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})=\frac{1}{d^2}=16$이다.

따라서, $16<\frac{3^{k+2}}{2}<46$이고, 자연수 $k=2$만 가능하다.

$a_2=2d=\frac{1}{2}$이고, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b_2\frac{1}{1-(\frac{1}{3})^2}=\frac{81}{8}$이다.

따라서, 정답은 $\frac{81}{16}$이다.

유형 06 등비수열의 극한

01 2023학년도 수능 25번 정답률 66%

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3,\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2=6$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ②

해 설

• 등비수열 $\{a_n\}$은 $a_n=ar^{n-1}$이다.

• $a_{2n-1}-a_{2n}$
$=ar^{2n-2}-ar^{2n-1}=ar^{2n-2}(1-r)=a(1-r)(r^2)^{n-1}$
이므로 수열 $\{a_{2n-1}-a_{2n}\}$은 첫째항이 $a(1-r)$이고 공비가 r^2인 등비수열이다.

• 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3$에서 $-1<r<1$이고
$\frac{a(1-r)}{1-r^2}=3$이고 $r\neq 1$이므로 $\frac{a}{1+r}=3$ … ㉠

• $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}a^2r^{2n-2}=6$이므로
$\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{a}{1-r}\times\frac{a}{1+r}=6$

• ㉠에서 $\frac{a}{1-r}\times 3=6$이므로 $\frac{a}{1-r}=2$이다.
따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}=2$이다.

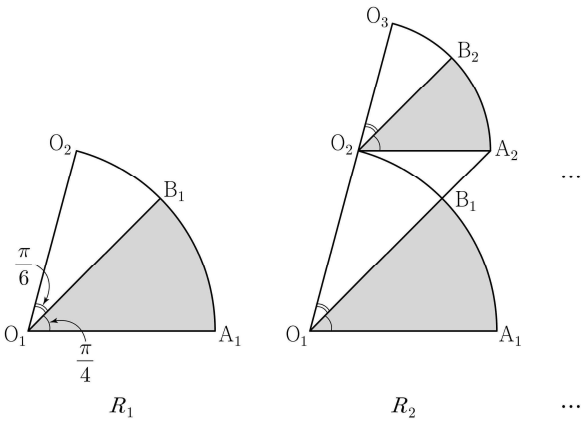
유형 07 등비급수와 수열의 도형 활용

01 2023학년도 6월 26번 정답률 80%

26. 그림과 같이 중심이 O_1, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_1A_1O_2$가 있다. 호 A_1O_2 위에 점 B_1을 $\angle A_1O_1B_1=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_1A_1B_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 O_2를 지나고 선분 O_1A_1에 평행한 직선이 직선 O_1B_1과 만나는 점을 A_2라 하자. 중심이 O_2이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_2A_2O_3$을 부채꼴 $O_1A_1B_1$과 겹치지 않도록 그린다. 호 A_2O_3 위에 점 B_2를 $\angle A_2O_2B_2=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_2A_2B_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{3\pi}{16}$ ② $\frac{7\pi}{32}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{9\pi}{32}$ ⑤ $\frac{5\pi}{16}$

정 답 ③

해 설

등비급수의 도형 황용은 뭐다? **초항과 공비!**
초항과 공비만 찾으면 문제가 끝난다.
어떻게든 찾아내라.

$S_1=\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$

$\angle O_1A_2O_2=\frac{\pi}{4}$이므로 삼각형 $O_1A_2O_2$에서

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{O_2A_2}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\overline{O_1O_2}}{\sin\frac{\pi}{4}}$, $\frac{\overline{O_2A_2}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$에서

$\overline{O_2A_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$이다. 따라서 닮음비는 $1:\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로

넓이의 비는 $1:\frac{1}{2}$이다.

즉, 구하는 극한값은 첫째항이 $\frac{\pi}{8}$이고, 공비가 $\frac{1}{2}$인

등비급수의 합이므로 $\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{4}$이다.

02 2023학년도 9월 27번 정답률 54%

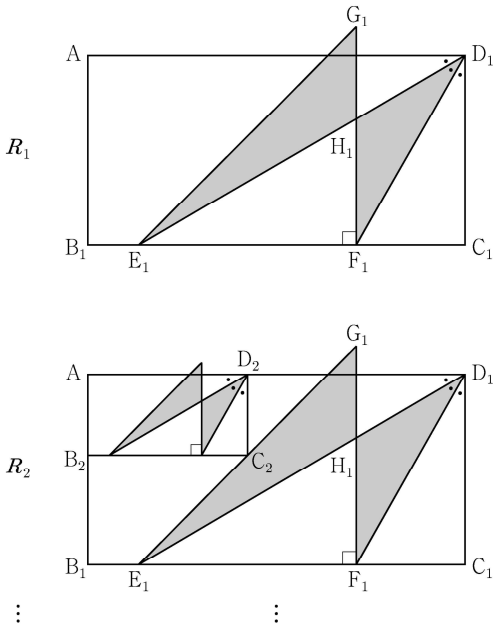
27. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. $\angle AD_1C_1$을 삼등분하는 두 직선이 선분 B_1C_1과 만나는 점 중 점 B_1에 가까운 점을 E_1, 점 C_1에 가까운 점을 F_1이라 하자.

$\overline{E_1F_1}=\overline{F_1G_1}$, $\angle E_1F_1G_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 AD_1과 선분 F_1G_1이 만나도록 점 G_1을 잡아 삼각형 $E_1F_1G_1$을 그린다.

선분 E_1D_1과 선분 F_1G_1이 만나는 점을 H_1이라 할 때, 두 삼각형 $G_1E_1H_1$, $H_1F_1D_1$로 만들어진 ⫽ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 E_1G_1 위의 점 C_2, 선분 AD_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 ⫽ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



⋮ ⋮

① $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{18}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{7\sqrt{3}}{18}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

정 답 ③

해 설

초항과 공비 둘 중 하나는 구하기 쉽다.
항상 도형은 문제지에서 체크를 하는 습관을 들이자.

직각삼각형 $C_1D_1F_1$에서 $\angle C_1D_1F_1=\frac{\pi}{6}$, $\overline{C_1D_1}=1$이므로

$\overline{C_1F_1}=\overline{C_1D_1}\times\tan\frac{\pi}{6}=1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

직각삼각형 $C_1D_1E_1$에서 $\angle C_1D_1E_1=\frac{\pi}{3}$이므로

$\overline{C_1E_1}=\overline{C_1D_1}\times\tan\frac{\pi}{3}=1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$

이때, $\overline{E_1F_1}=\overline{C_1E_1}-\overline{C_1F_1}=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

직각삼각형 $E_1F_1H_1$에서 $\angle H_1E_1F_1=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{F_1H_1}=\overline{E_1F_1}\times\tan\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}$

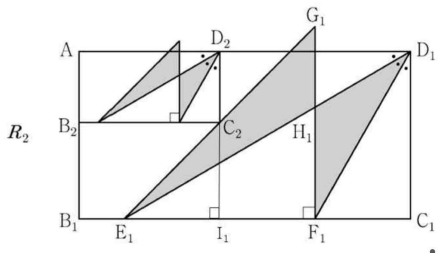
$S_1=\triangle E_1F_1G_1+\triangle E_1F_1D_1-2\times\triangle E_1F_1H_1$

$=\frac{1}{2}\overline{E_1F_1}\times\overline{F_1G_1}+\frac{1}{2}\overline{E_1F_1}\times\overline{C_1D_1}-2\times\left(\frac{1}{2}\overline{E_1F_1}\times\overline{F_1H_1}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times1-2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2}{3}\right)$

$=\frac{6-\sqrt{3}}{9}$

한편, $\overline{AB_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$이므로 $\overline{AB_2}=k$, $\overline{B_2C_2}=2k$ $(k>0)$이라 하자.



점 C_2에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 I_1이라 하면

$\overline{E_1I_1}=\overline{C_2I_1}=1-k$, $\overline{I_1C_1}=2-2k$이므로

$(1-k)+(2-2k)=\sqrt{3}$에서 $k=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$이다.

그림 R_1에 색칠되어 있는 도형과 그림 R_2에 새로 색칠되어 있는 도형의 닮음비가 $1:\frac{3-\sqrt{3}}{3}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$이다.

따라서 구하는 극한값은 첫째항이 $\frac{6-\sqrt{3}}{9}$이고, 공비가 $\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$인 등비급수의 합이므로

$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{6-\sqrt{3}}{9}}{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

03 2024학년도 6월 26번 정답률 71%

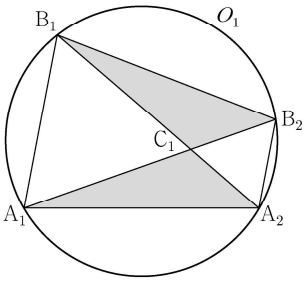
26. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1A_2}=3$이고 $\angle A_1B_1A_2=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 $A_1A_2B_1$과 이 삼각형의 외접원 O_1이 있다.

점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1에 평행한 직선이 원 O_1과 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 B_2라 하자. 두 선분 A_1B_2, B_1A_2가 만나는 점을 C_1이라 할 때, 두 삼각형 $A_1A_2C_1$, $B_1C_1B_2$로 만들어진 ⋛ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

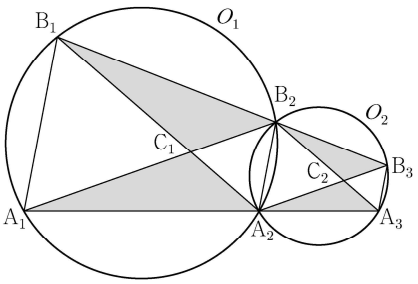
그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1A_2에 평행한 직선이 직선 A_1A_2와 만나는 점을 A_3이라 할 때, 삼각형 $A_2A_3B_2$의 외접원을 O_2라 하자. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 B_3, C_2를 잡아 원 O_2에 ⋛ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{11\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{13\sqrt{3}}{9}$

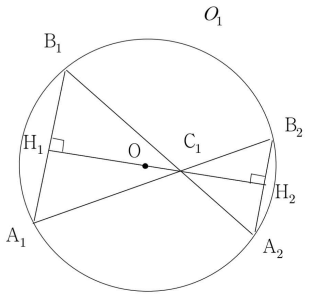
④ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

정 답 ②

해 설

원 O_1의 중심을 O라 하고 점 O에서 두 선분 A_1B_1, A_2B_2에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 점 H_1은 선분 A_1B_1의 중점이고 점 H_2는 선분 A_2B_2의 중점이다.

또, $\overline{A_1B_1}//\overline{A_2B_2}$이므로 세 점 H_1, O, H_2는 한 직선 위에 있다.



이때 $\angle A_1B_1A_2=\frac{\pi}{3}$이므로

$$\overline{B_1C_1}=\overline{B_1H_1}\times\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}=1\times\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

그러므로 삼각형 $A_1C_1B_1$은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다. 또,

$$\angle A_1B_2A_2=\angle A_1B_1A_2=\frac{\pi}{3}$$

$$\angle A_2C_1B_2=\angle A_1C_1B_1=\frac{\pi}{3}$$

이므로 삼각형 $C_1A_2B_2$는 정삼각형이다.

이때, $\overline{C_1A_2}=\overline{B_1A_2}-\overline{B_1C_1}=3-2=1$이므로

삼각형 $C_1A_2B_2$는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.

그러므로

$$S_1=2\times(\triangle A_1A_2B_1-\triangle A_1C_1B_1)$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$$

또, 두 삼각형 $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$에서

$\overline{A_1A_2}//\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_1B_1}//\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_2B_1}//\overline{A_3B_2}$이고

$\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{A_2B_2}=1$이므로

두 삼각형 $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$의 닮음비는 2 : 1이다.

따라서 넓이의 비는 4 : 1이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{4}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

04 2024학년도 9월 27번 정답률 61%

27. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=1$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 두 대각선의 교점을 E_1이라 하자.

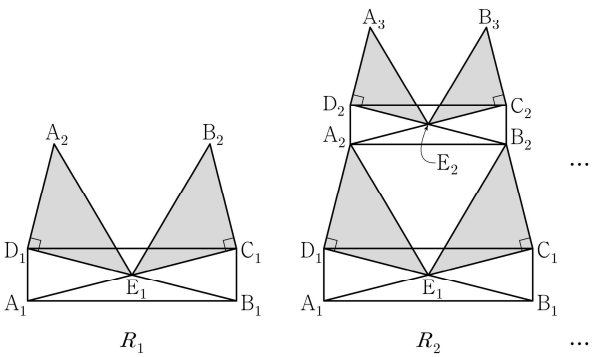
$\overline{A_2D_1}=\overline{D_1E_1}$, $\angle A_2D_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 A_2E_1이 만나도록 점 A_2를 잡고, $\overline{B_2C_1}=\overline{C_1E_1}$, $\angle B_2C_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 B_2E_1이 만나도록 점 B_2를 잡는다.

두 삼각형 $A_2D_1E_1$, $B_2C_1E_1$을 그린 후 △ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=4:1$이고 선분 D_2C_2가 두 선분 A_2E_1, B_2E_1과 만나지 않도록 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다.

그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 점 E_2, A_3, B_3을 잡고 두 삼각형 $A_3D_2E_2$, $B_3C_2E_2$를 그린 후 △ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{68}{5}$ ② $\frac{34}{3}$ ③ $\frac{68}{7}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{68}{9}$

정 답 ③

해 설

직각삼각형 $A_1B_1D_1$에서

$\overline{B_1D_1}=\sqrt{\overline{A_1B_1}^2+\overline{A_1D_1}^2}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$이므로

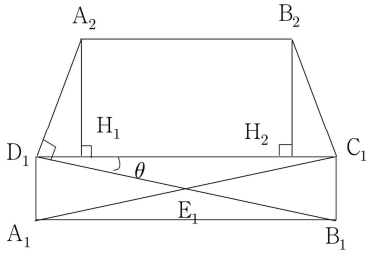
$\overline{D_1E_1}=\frac{1}{2}\times\overline{B_1D_1}=\frac{\sqrt{17}}{2}$

그러므로

$S_1=2\times(\triangle A_2D_1E_1)=2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{17}}{2}\times\frac{\sqrt{17}}{2}\right)=\frac{17}{4}$

한편, 직각삼각형 $D_1B_1C_1$에서 $\angle C_1D_1B_1=\theta$라 하면

$\sin\theta=\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{D_1B_1}}=\frac{1}{\sqrt{17}}$



또 A_2에서 선분 D_1C_1에 내린 수선의 발을 H_1라 하면

$\angle A_2D_1H_1=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$\overline{D_1H_1}=\overline{A_2D_1}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\overline{A_2D_1}\sin\theta=\frac{\sqrt{17}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{1}{2}$

또 점 B_2에서 선분 D_1C_1에 내린 수선의 발을 H_2라 하면

$\overline{A_2B_2}=\overline{H_1H_2}=4-2\times\overline{D_1H_1}=4-2\times\frac{1}{2}=3$

이때, $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_2B_2}=3$에서 길이의 비가 $\frac{3}{4}$이므로

넓이의 비는 $\frac{9}{16}$이다.

따라서, $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{17}{4}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{17\times4}{16-9}=\frac{68}{7}$이다.

05 2024학년도 수능 27번 정답률 68%

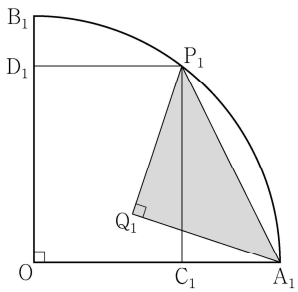
27. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_1B_1이 있다. 호 A_1B_1 위에 점 P_1, 선분 OA_1 위에 점 C_1, 선분 OB_1 위에 점 D_1을 사각형 $OC_1P_1D_1$이 $\overline{OC_1}:\overline{OD_1}=3:4$인 직사각형이 되도록 잡는다.

부채꼴 OA_1B_1의 내부에 점 Q_1을 $\overline{P_1Q_1}=\overline{A_1Q_1}$, $\angle P_1Q_1A_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 이등변삼각형 $P_1Q_1A_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

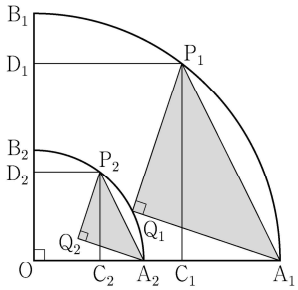
그림 R_1에서 선분 OA_1 위의 점 A_2와 선분 OB_1 위의 점 B_2를 $\overline{OQ_1}=\overline{OA_2}=\overline{OB_2}$가 되도록 잡고, 중심이 O, 반지름의 길이가 $\overline{OQ_1}$, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 점 P_2, C_2, D_2, Q_2를 잡고, 이등변삼각형 $P_2Q_2A_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{9}{40}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{11}{40}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{13}{40}$

정 답 ②

해 설

$\overline{OC_1}=3t$, $\overline{OD_1}=4t$ $(t>0)$라 하면 $\overline{OP_1}=5t$이므로

$5t=1$에서 $t=\frac{1}{5}$이다.

따라서, $\overline{OC_1}=\frac{3}{5}$에서 $\overline{A_1C_1}=\frac{2}{5}$이고

$\overline{C_1P_1}=\overline{OD_1}=\frac{4}{5}$이므로

$\overline{A_1P_1}=\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

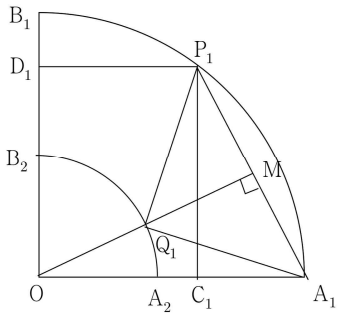
이때 삼각형 $P_1Q_1A_1$은 직각이등변삼각형이므로

$\overline{A_1Q_1}=\overline{P_1Q_1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$이다.

따라서 $S_1=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{1}{5}$

또한, 선분 A_1P_1의 중점을 M이라 하면

$\overline{A_1P_1}\perp\overline{Q_1M}$, $\overline{A_1P_1}\perp\overline{OM}$이므로 세 점 O, Q_1, M은 한 직선 위에 있다.



이때, $\overline{OM}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\overline{Q_1M}=\frac{1}{\sqrt{5}}$이므로

$\overline{OQ_1}=\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

따라서 두 도형(부채꼴) OA_1B_1, OA_2B_2의 닮음비는

$1:\frac{1}{\sqrt{5}}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{1}{5}$이다.

$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$이다.

PART 2
미분

개념 유형

(1) 여러 가지 함수의 미분
(2) 여러 가지 미분법
(3) 도함수의 활용
(4) 삼각함수의 도형의 극한과 근사 (심화)
(5) 차수추리법 (심화)
(6) N축 함수 (심화)

기출 유형

(1) 지수로그 함수의 극한
(2) 지수로그 함수의 극한의 활용
(3) 삼각함수의 덧셈정리
(4) 삼각함수 도형의 극한
(5) 삼각함수 도형의 활용
(6) 합성함수의 미분법
(7) 삼각함수의 미분법
(8) 매개변수의 미분법
(9) 음함수의 미분법
(10) 역함수의 미분법
(11) 접선의 방정식
(12) 함수의 극대와 극소
(13) 방정식의 실근의 개수

THEME

1 여러 가지 함수의 미분

정리1 지수함수와 로그함수의 극한

개념1 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 극한

① $a>1$일 때, $\lim_{x\to\infty} a^x=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x=0$

② $0<a<1$일 때, $\lim_{x\to\infty} a^x=0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x=\infty$

개념2 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 극한

① $a>1$일 때, $\lim_{x\to\infty} \log_a x=\infty$, $\lim_{x\to 0+} \log_a x=-\infty$

② $0<a<1$일 때, $\lim_{x\to\infty} \log_a x=-\infty$, $\lim_{x\to 0+} \log_a x=\infty$

TIP 지수함수와 로그함수의 극한은 함수의 그래프의 개형과 함께 이해하면 편리합니다.

① 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$은 구간 $(-\infty,\infty)$에서 연속이므로 실수 k에 대하여 $\lim_{x\to k} a^x=a^k$이다.

② 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$은 구간 $(0,\infty)$에서 연속이므로 양수 k에 대하여 $\lim_{x\to k} \log_a x=\log_a k$이다.

정리2 무리수 e와 자연로그

개념1 무리수 e의 뜻

x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $(1+x)^{\frac{1}{x}}$의 값은 일정한 값에 수렴한다는 것이 알려져 있는데 그 극한값을 e로 나타냅니다. 즉, $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$입니다.

이때 수 e는 무리수이며 그 값은 $e=2.71828\cdots$임이 알려져 있습니다.

개념2 자연로그의 뜻

무리수 e를 밑으로 하는 로그 $\log_e x$를 자연로그라 하고, 기호로 $\ln x$와 같이 나타냅니다.

개념3 여러 가지 지수함수와 로그함수의 극한

① $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

② $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

③ $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$ (단, $a>0$, $a\neq 1$)

④ $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ (단, $a>0$, $a\neq 1$)

TIP 지수·로그 극한의 복잡한 계산 문제는 우선 꼴을 먼저 만들고 복원한다.

1st. 식을 보자마자

① $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

② $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

③ $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$ (단, $a>0$, $a\neq 1$)

④ $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ (단, $a>0$, $a\neq 1$)

위 4개 중 어디에 해당되는지를 파악합니다.

2nd. 해당되는 식으로 변형한다. 이때, 원래 식과 동일한지의 유무는 신경쓰지 않습니다.

3rd. 원래 식과 동일하도록 조작 과정을 거쳐 식을 변형하고 최종 값을 구합니다.

예제1 지수함수와 로그함수의 극한

$a>1$인 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to 0}\frac{a^{3x}-1}{\log_a(1+4x)}=12(\ln 3)^2$일 때, a의 값을 구하시오.

해설

1st.

식을 보자마자 4개의 꼴 중 어디에 해당되는지를 파악한다.

$\lim_{x\to 0}\frac{a^{3x}-1}{\log_a(1+4x)}$ 에서,

분자는 ④ $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ (단, $a>0$, $a\neq 1$) 꼴에

해당되고, 분모는 ③ $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$

(단, $a>0$, $a\neq 1$) 꼴에 해당됨을 예측할 수 있다.

2nd.

해당되는 식으로 변형한다. 이때, 원래 식과 동일한지의 유무는 신경쓰지 않는다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{3x}-1}{\log_a(1+4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a^{3x}-1}{3x}}{\frac{\log_a(1+4x)}{4x}}$$

3rd.

원래 식과 동일하도록 조작 과정을 거쳐 식을 변형하고 최종 값을 구한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a^{3x}-1}{3x}}{\frac{\log_a(1+4x)}{4x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a^{3x}-1}{3x}\times 3x}{\frac{\log_a(1+4x)}{4x}\times 4x}=\frac{\ln a}{\frac{1}{\ln a}}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}(\ln a)^2$$ 이므로

$\frac{3}{4}(\ln a)^2=12(\ln 3)^2$에서 $a=81$이다.

정리3 지수함수와 로그함수의 미분

개념1 지수함수의 미분

① $y=e^x$이면 $y'=e^x$이다.

② $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$이면 $y'=a^x\ln a$이다.

개념2 로그함수의 미분

① $y=\ln x$이면 $y'=\dfrac{1}{x}$이다.

② $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$이면 $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$이다.

예제2 지수함수와 로그함수의 미분

함수 $f(x)=9^x+30\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$에 대하여 $f'(a)=8\ln 3$을 만족시키는 상수 a의 값은?

해설

$f(x)=9^x+30\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$에서

$f'(x)=(3^x)^2\times 2\ln 3-\dfrac{1}{3^x}\times 30\ln 3$이다.

$f'(a)=8\ln 3$에서 $2(3^a)^2-\dfrac{30}{3^a}=8$이다.

이때 $3^a=t$ $(t>0)$으로 놓으면 $2t-\dfrac{30}{t}=8$이다.

$2t^3-8t-30=0,\ t^3-4t-15=(t-3)(t^2+3t+5)=0$

따라서 $t=3$이고, $3^a=3$에서 $a=1$이다.

정리4 삼각함수의 극한

개념1 삼각함수의 덧셈정리 # '무지성 암기'

① $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

② $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

③ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

개념2 삼각함수의 극한 # '무지성 암기'

① $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (참고로 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{ax}=1$이다.)

② $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

TIP $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$의 의미

극한값 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$는 함수 $f(x)=\sin x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선의 기울기를 나타낸다.

즉, $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$이다.

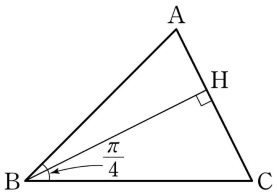
개념3 삼각함수의 미분 # '무지성 암기'

① $y=\sin x$이면 $y'=\cos x$이다.

② $y=\cos x$이면 $y'=-\sin x$이다.

예제3 삼각함수의 덧셈정리

그림과 같이 $\overline{AB}=\sqrt{10}$, $\angle ABC=\dfrac{\pi}{4}$인 예각삼각형 ABC의 꼭짓점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{AH}=1$일 때, 선분 CH의 길이는?



해설

직각삼각형 ABH에서

$\overline{BH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{10-1}=3$이므로

$\angle ABH=\alpha$라 하면 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$이다.

이때 $\angle CBH=\dfrac{\pi}{4}-\alpha$이고,

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+1\times\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

따라서 직각삼각형 BCH에서

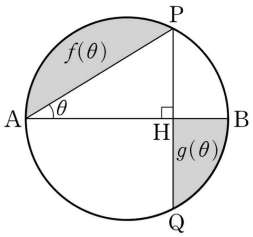
$\overline{CH}=\overline{BH}\times\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{3}{2}$이다.

예제4 삼각함수의 극한

그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원위에 점 P가 있다. 점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H, 점 P를 직선 AB에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하자. $\angle PAB=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$일 때, 선분 AP와 호 AP로 둘러싸인 도형의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 BH, QH와 호 BQ로 둘러싸인 도형의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{2\pi-f(\theta)-g(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오.

(단, 호 AP의 길이와 호 BQ의 길이는 모두 2π보다 작다.)



해설

원의 반지름의 길이가 2이므로 반원의 넓이는 2π이다.

두 선분 PH, BH와 호 PB로 둘러싸인 도형의 넓이도 $g(\theta)$이므로 $2\pi-f(\theta)-g(\theta)$는 삼각형 PAH의 넓이와 같다.

선분 AB의 중점을 O라 하면 중심각과 원주각의 성질에 의하여 $\angle POB=2\angle PAB=2\theta$

이때 $\overline{AH}=\overline{AO}+\overline{OH}=2+2\cos\theta$, $\overline{PH}=2\sin2\theta$이므로

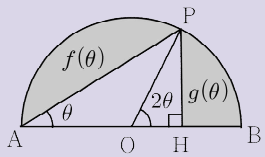
삼각형 PAH의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{PH}=\dfrac{1}{2}\times(2+2\cos2\theta)\times2\sin2\theta$

$=2(1+\cos2\theta)\sin2\theta$

따라서 $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{2\pi-f(\theta)-g(\theta)}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{2(1+\cos2\theta)\sin2\theta}{\theta}$

$=2\lim\limits_{\theta\to0+}(1+2\cos\theta)\times\lim\limits_{\theta\to0+}\left(\dfrac{\sin2\theta}{2\theta}\times2\right)=8$이다.



예제5 삼각함수의 미분

$0<k<\dfrac{\pi}{2}$인 상수 k와 함수 $f(x)=\sin x+3\cos x$가

$f(k)+f'\left(\dfrac{\pi}{2}-k\right)=\dfrac{8}{5}$을 만족시킬 때, $f(-k)+f'(-k)$의 값은?

해설

$f(x)=\sin x+3\cos x$에서 $f'(x)=\cos x-3\sin x$이므로

$f(k)+f'\left(\dfrac{\pi}{2}-k\right)=\sin k+3\cos k+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-k\right)-3\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-k\right)$

$=\sin k+3\cos k+\sin k-3\cos k=2\sin k$

$2\sin k=\dfrac{8}{5}$에서 $\sin k=\dfrac{4}{5}$이다.

이때 $0<k<\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\cos k=\sqrt{1-\sin^2k}=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$이다.

따라서 $f(-k)+f'(-k)$

$=\sin(-k)+3\cos(-k)+\cos(-k)-3\sin(-k)$

$=-2\sin(-k)+4\cos(-k)=2\sin k+4\cos k=4$이다.

THEME

2 여러 가지 미분법

정리1 함수의 몫의 미분법

개념1 함수의 몫의 미분법 # '무지성 암기'

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ $(f(x)\neq 0)$이 미분가능할 때

① $\left\{\dfrac{1}{f(x)}\right\}'=-\dfrac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

② $\left\{\dfrac{g(x)}{f(x)}\right\}'=\dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

★주의) 곱의 미분법과 헷갈리지 않아야 합니다. 곱미분, 몫미분 둘 다 '미그 ± 그미'이다.

'미분X그냥 ± 그냥X미분'에서, 곱미분은 +, 몫미분은 −를 선택하면 된다.

개념2 함수 $y=x^{\alpha}$ (α는 실수, $x>0$)의 도함수

α이 정수일 때, $y=x^{\alpha}$ $(x>0)$이면 $y'=\alpha x^{\alpha-1}$이다.

개념3 로그함수의 도함수

① $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$

② $(\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ (단, $a>0$, $a\neq 1$)

③ 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)\neq 0$일 때, $(\ln|f(x)|)'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

개념4 삼각함수의 도함수

몫의 미분법을 이용하여 여러 가지 삼각함수의 도함수를 구할 수 있다.

① $y=\tan x$이면 $y'=\sec^2 x$이다.

② $y=\cot x$이면 $y'=-\csc^2 x$이다.

③ $y=\sec x$이면 $y'=\sec x\tan x$이다.

④ $y=\csc x$이면 $y'=-\csc x\cot x$이다.

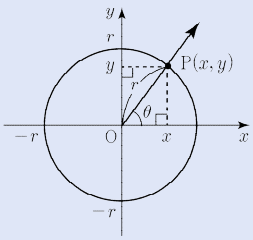
TIP 특수 삼각함수

① $\csc\theta=\dfrac{r}{y}$ $(y\neq 0)$, $\sec\theta=\dfrac{r}{x}$ $(x\neq 0)$, $\cot\theta=\dfrac{x}{y}$ $(y\neq 0)$

이 함수를 차례로 θ에 대한 코시컨트함수, 시컨트함수, 코탄젠트함수라고 한다.

② $\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$

③ $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$, $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$, $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$



예제1 함수의 몫의 미분법

함수 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+4}$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

해설

$f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+4}$에서 몫의 미분법에 의하여

$f'(x)=\dfrac{2(x^2+4)-(2x-1)2x}{(x^2+4)^2}=\dfrac{-2x^2+2x+8}{(x^2+4)^2}$

따라서 $f'(1)=\dfrac{8}{25}$이다.

정리2 여러 가지 미분법

개념1 합성함수의 미분법

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$도 미분가능하며 그 도함수는

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$ 또는 $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$이다.

개념2 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

① 두 변수 x, y 사이의 관계를 변수 t를 매개로 하여
$x=f(t)$, $y=g(t)$로 나타낼 때 변수 t를 매개변수라 하고, 이 함수를 매개변수로 나타낸 함수라 한다.

② 매개변수 t로 나타낸 함수
$x=f(t)$, $y=g(t)$에서 두 함수 $f(t)$, $g(t)$가 미분가능하고 $f'(t)\neq0$일 때,

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$이다.

개념3 음함수의 미분법

① 음함수
방정식 $f(x,y)=0$에서 x와 y가 정의되는 구간을 적당히 정하면 y는 x의 함수가 된다.
이와 같은 의미에서 x의 함수 y가 방정식 $f(x,y)=0$의 꼴로 주어졌을 때,
x의 함수 y가 음함수 꼴로 주어졌다고 한다.

② 음함수의 미분법
x의 함수 y가 음함수 $f(x,y)=0$의 꼴로 주어질 때, y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하여
$\frac{dy}{dx}$를 구하는 것을 음함수의 미분법이라고 한다.

③ 음함수 미분 초보자를 위한 팁
음함수 미분은 편미분이 모든 변수에 대해 미분하므로 다음과 같은 과정을 걸치면 헷갈리지 않는다.

ex) $3x^2+2y=5xy$ 를 미분하면 $6x\,dx+2\,dy=5y\,dx+5x\,dy$
이후 양변을 dx로 나누면 우리가 원하는 미분을 헷갈리지 않게 할 수 있다.

개념4 역함수의 미분법 # '유도 必 암기' - $f(g(x))=x$를 기억합니다. 여기에서 합성함수 미분을 하면 역함수 미분법이 됩니다.

미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $y=g(x)$가 존재하고 이 역함수가 미분가능할 때

① $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$ (단, $f'(g(x))\neq0$) 또는 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ (단, $\frac{dx}{dy}\neq0$)

② $f(a)=b$이면 $g'(b)=\frac{1}{f'(g(b))}=\frac{1}{f'(a)}$ (단, $f'(a)\neq0$)

개념5 이계도함수

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능할 때,

함수 $f'(x)$의 도함수 $\lim_{\triangle x\to0}\frac{f'(x+\triangle x)-f'(x)}{\triangle x}$를 함수 $y=f(x)$의 이계도함수라 하고,

기호로 y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$와 같이 나타낸다.

예제2 합성함수의 미분법

열린구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 두 함수 $f(x)=\sin x+\cos x$, $g(x)=\ln(\tan x)$에 대하여 $f'(a)=\frac{1}{3}$일 때, $g'(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

해설

$f(x)=\sin x+\cos x$에서
$f'(x)=\cos x-\sin x$이므로
$f'(a)=\frac{1}{3}$에서 $\cos a-\sin a=\frac{1}{3}$ … ㉠
$g(x)=\ln(\tan x)$에서
$g'(x)=\frac{\sec^2 x}{\tan x}=\frac{1}{\cos^2 x}\times\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\cos x\sin x}$이므로
$g'(a)=\frac{1}{\cos a\sin a}$
㉠의 양변을 제곱하면
$\cos^2 a-2\cos a\sin a+\sin^2 a=\frac{1}{9}$
$1-2\cos a\sin a=\frac{1}{9}$, $\cos a\sin a=\frac{4}{9}$
따라서 $g'(a)=\frac{1}{\cos a\sin a}=\frac{9}{4}$이다.

예제3 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

매개변수 t로 나타낸 곡선 $x=e^{at}$, $y=t^2-4$가 x축과 만나는 서로 다른 두 점을 P, Q라 하자. 곡선 위의 점 P에서의 접선과 곡선 위의 점 Q에서의 접선이 서로 수직일 때, 양수 a의 값은?

해설

두 점 P, Q의 y좌표가 0이므로 $y=t^2-4=0$에서
$t=-2$ 또는 $t=2$이다.
$t=-2$에 대응하는 점을 P, $t=2$에 대응하는 점을 Q라 하자.
$x=e^{at}$에서 $\frac{dx}{dt}=ae^{at}$, $y=t^2-4$에서 $\frac{dy}{dt}=2t$이므로
$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{2t}{ae^{at}}$
따라서 점 P에서의 접선의 기울기는 $\frac{-4}{ae^{-2a}}$이고,
점 Q에서의 접선의 기울기는 $\frac{4}{ae^{2a}}$이다.
두 점 P, Q에서의 접선이 서로 수직이므로
$\frac{-4}{ae^{-2a}}\times\frac{4}{ae^{2a}}=-1$, $a^2=16$이다.
$a>0$이므로 $a=4$이다.

예제4 음함수의 미분법

곡선 $ax^2-xy+y\ln x=2$ 위의 점 $(1,1)$에서의 접선의 기울기가 m일 때, $a+m$의 값은? (단, a는 상수이다.)

해설

점 $(1,1)$이 곡선 $ax^2-xy+y\ln x=2$ 위의 점이므로

$a-1+0=2,\ a=3$

$3x^2-xy+y\ln x=2$에서 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(3x^2)-\frac{d}{dx}(xy)+\frac{d}{dx}(y\ln x)=\frac{d}{dx}(2)\ \cdots\ ㉠$$

$$\frac{d}{dx}(xy)=\frac{d}{dx}(x)\times y+x\times\frac{d}{dx}(y)=y+x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y\ln x)=\frac{d}{dx}(y)\times\ln x+y\frac{d}{dx}(\ln x)=\ln x\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}$$

이므로 ㉠에서

$$6x-\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)+\left(\ln x\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}\right)=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6x-y+\frac{y}{x}}{x-\ln x}\ (\text{단, } x-\ln x\neq 0)$$

그러므로 점 $(1,1)$에서의 접선의 기울기는

$$m=\frac{6-1+1}{1-0}=6$$

따라서 $a+m=3+6=9$이다.

예제5 역함수의 미분법

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=(x^2+a)e^{-x}$에 대하여 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재할 때, $g'(f(3))$의 최솟값은? (단, a는 실수이다.)

해설

$f(x)=(x^2+a)e^{-x}$에서

$f'(x)=(x^2+a)'\times e^{-x}+(x^2+a)\times(e^{-x})'$

$=2xe^{-x}-(x^2+a)e^{-x}=-(x^2-2x+a)e^{-x}\ \cdots\ ㉠$

모든 실수 x에 대하여 $e^{-x}>0$이다.

이때 이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-a\leq 0$에서 $a\geq 1$이다.

(1) $a>1$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2x+a>0$이고 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소함수이다.

(2) $a=1$일 때, $f'(1)=0$이지만 $x\neq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소함수이다.

(1), (2)에서 $a\geq 1$일 때 $f(x)$는 역함수를 갖는다.

한편, 역함수의 미분법에 의하여 $g'(f(3))=\frac{1}{f'(3)}$

($g(f(x))$에서 합성함수 미분법을 적용한 것과 같습니다.)

㉠에서 $f'(3)=-(3+a)e^{-3}$이므로

$$g'(f(3))=\frac{1}{f'(3)}=-\frac{e^3}{3+a}$$

$a\geq 1$에서 $g'(f(3))=-\frac{e^3}{3+a}\geq-\frac{e^3}{4}$

따라서 $g'(f(3))$의 최솟값은 $-\frac{e^3}{4}$이다.

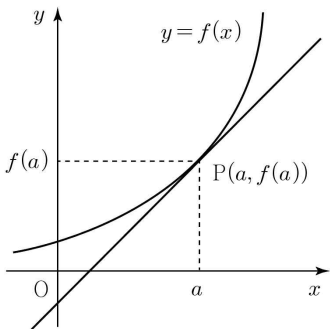
THEME

3 도함수의 활용

정리1 접선의 방정식

개념1 접선의 방정식

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이다.



개념2 접선의 방정식을 구하는 방법

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(1) 접점의 좌표를 $(t, f(t))$로 놓는다.
(2) $f'(t)=m$을 만족시키는 t의 값을 구한다.
(3) 접선의 방정식 $y-f(t)=m(x-t)$를 구한다.

TIP 곡선 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$에 접하고 기울기가 $-\frac{1}{9}$인 접선의 방정식을 구해 보자.

$f(x)=\frac{1}{x}$이라 하고 접점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{t}\right)$ $(t>0)$이라 하자.

$f'(x)=-\frac{1}{x^3}$이므로 $f'(t)=-\frac{1}{t^2}=-\frac{1}{9}$에서 $t^2=9$이다.

$t>0$이므로 $t=3$이다.

따라서 접점의 좌표는 $\left(3, \frac{1}{3}\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은 $y-\frac{1}{3}=-\frac{1}{9}(x-3)$, 즉 $y=-\frac{1}{9}x+\frac{2}{3}$이다.

개념3 외부에 점에서 접선의 방정식

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위에 있지 않은 점 (x_1, y_1)에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(1) 접점의 좌표를 $(t, f(t))$로 놓고, 이 점에서의 접선의 방정식 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$를 구한다.
(2) 점 (x_1, y_1)은 이 접선 위의 점이므로 (1)의 방정식에 $x=x_1$, $y=y_1$을 대입한다.
(3) (2)에서 실수 t의 값을 구한 후 (1)에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

TIP 원점에서 곡선 $y=\ln x$에 그은 접선의 방정식을 구해 보자.

$f(x)=\ln x$라 하고 접점의 좌표를 $(t, \ln t)$ $(t>0)$이라 하자.

$f'(x)=\frac{1}{x}$이므로 곡선 위의 점 $(t, \ln t)$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{1}{t}$이고 접선의 방정식은 $y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$이다.

이 직선이 원점을 지나므로 $0-\ln t=\frac{1}{t}(0-t)$, $-\ln t=-1$, $t=e$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-\ln e=\frac{1}{e}(x-e)$, 즉 $y=\frac{1}{e}x$이다.

예제1 접선의 방정식

곡선 $y=2x+\tan x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$에 접하고 기울기가 4인 직선의 y절편은?

해설

기울기가 4인 직선이 곡선 $y=2x+\tan x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$와 접하는 점을 (a, b)라고 하자.

$y=2x+\tan x$에서 $y'=2+\sec^2 x$이므로 곡선 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기는 $2+\sec^2 a$이다.

$2+\sec^2 a=4$에서 $\sec^2 a=2$이다.

$0<a<\frac{\pi}{2}$에서 $\sec a>0$이므로 $\sec a=\sqrt{2}$, $a=\frac{\pi}{4}$

점 $\left(\frac{\pi}{4}, b\right)$가 곡선 $y=2x+\tan x$ 위에 있으므로

$b=\frac{\pi}{2}+\tan\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+1$이다.

따라서 곡선 $y=2x+\tan x$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}+1\right)$에서의 접선의 방정식은 $y-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)=4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$,

즉 $y=4x+1-\frac{\pi}{2}$이므로 이 직선의 y절편은 $1-\frac{\pi}{2}$이다.

정리2 함수의 극대와 극소의 판정

개념1 도함수를 이용한 극대와 극소의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

① 양에서 음으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.
② 음에서 양으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

개념2 이계도함수를 이용한 극대와 극소의 판정

이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고

① $f''(a)<0$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.
② $f''(a)>0$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

정리3 곡선의 오목과 볼록

개념1 곡선의 오목과 볼록

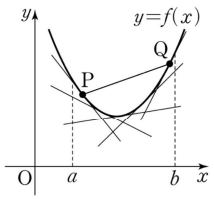
닫힌 구간 $[a, b]$에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여
두 점 P, Q를 잇는 곡선 부분이

① 선분 PQ보다 항상 아래쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록 또는 위로 오목하다고 한다.
② 선분 PQ보다 항상 위쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록 또는 위로 오목하다고 한다.

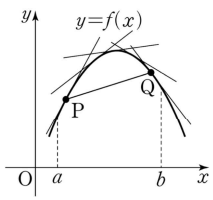
개념2 이계도함수를 이용한 곡선의 오목과 볼록의 판정

이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$가 어떤 구간의 모든 x에 대하여

① $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.
② $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.



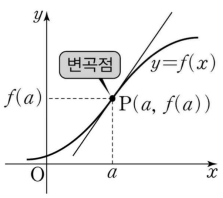
아래로 볼록

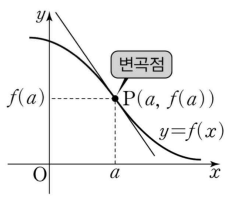


위로 볼록

개념3 곡선의 변곡점

① 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에 대하여 $x=a$의 좌우에서
곡선의 모양이 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 변하거나
위로 볼록에서 아래로 볼록으로 변할 때, 점 P를 곡선 $y=f(x)$의
변곡점이라고 한다.
② 이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f''(a)=0$이고,
$x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a, f(a))$는
곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.





예제2 극대와 극소

함수 $f(x)=x-\frac{4}{x}+a\ln x$가 $x=1$에서 극댓값을 가질 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은? (단, a는 상수이다.)

해설

$f(x)=x-\frac{4}{x}+a\ln x$에서 $f'(x)=1+\frac{4}{x^2}+\frac{a}{x}$이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로 $f'(1)=0$이다.

$f'(1)=1+4+a=0$에서 $a=-5$이다.

즉, $f(x)=x-\frac{4}{x}-5\ln x$,

$f'(x)=1+\frac{4}{x^2}-\frac{5}{x}=\frac{x^2-5x+4}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$,

$x=1$ 또는 $x=4$이다.

$x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖고, $x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은

$f(4)=4-1-5\ln 4=3-10\ln 2$이다.

정리4 함수의 최댓값과 최솟값

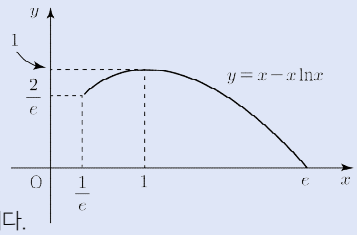
개념1 최대 · 최소 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

개념2 함수의 최대값과 최솟값 구하기 # '무지성 암기'

닫힌구간 $[a, b]$에에서 연속인 함수 $f(x)$가 열린구간 (a,b)에서 극값을 가질 때, 극값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 함수 $f(x)$의 최댓값, 가장 작은 값이 함수 $f(x)$의 최솟값이다.

TIP 닫힌구간 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$에서 함수 $f(x)=x-x\ln x$의 최댓값과 최솟값을 구해 보자.



$f'(x)=1-\ln x-x\times\frac{1}{x}=-\ln x$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$이고,

$x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $f(1)=1$을 갖는다.

또 $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e}$, $f(e)=0$이므로 닫힌구간 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 1, 최솟값은 0이다.

예제3 함수의 그래프

함수 $f(x)=\frac{k\ln x^2}{x}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 양수 k의 값은?
(단, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$)

해설

함수 $f(x)$의 정의역은 $\{x|x\neq 0$인 모든 실수$\}$이고 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=\frac{k\ln(-x)^2}{-x}=-\frac{\ln x^2}{x}=-f(x)$이므로

곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

먼저 $x>0$일 때, $f(x)=\frac{k\ln x^2}{x}=\frac{2k\ln x}{x}$에서

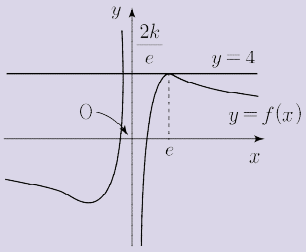
$f'(x)=\frac{\frac{2k}{x}\times x-2k\ln x\times 1}{x^2}=\frac{2k(1-\ln x)}{x^2}$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=e$이다.

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극댓값 $\frac{2k}{e}$를 갖는다.

한편, $\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이고 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$는 그림과 같다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4$가 서로 다른 두 점에서만 만나려면 $\frac{2k}{e}=4$이어야 하므로 $k=2e$이다.



정리5 방정식에의 활용

개념1 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수

방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표와 같다.
따라서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수와 같다.

개념2 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수

① 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표와 같다.
따라서 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수와 같다.

② 방정식 $f(x)=g(x)$에서 $f(x)-g(x)=0$이므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수와 같다.

예제4 방정식에의 활용

두 곡선 $y=x^2+3ax$, $y=2a^2\ln x$가 교점을 갖기 위한 양수 a의 최솟값은?

해설

$x^2+3ax=2a^2\ln x$에서 $x^2+3ax-2a^2\ln x=0$

$f(x)=x^2+3ax-2a^2\ln x$라 하면 두 곡선

$y=x^2+3ax$, $y=2a^2\ln x$의 교점의 x좌표는 방정식

$f(x)=0$의 실근과 같다.

즉, 두 곡선 $y=x^2+3ax$, $y=2a^2\ln x$가 교점을 가지려면

곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나야 한다.

$$f'(x)=2x+3a-\frac{2a^2}{x}=\frac{2x^2+3ax-2a^2}{x}=\frac{(x+2a)(2x-a)}{x}$$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-2a$ 또는 $x=\frac{a}{2}$이다.

이때 함수 $f(x)$는 $x=\frac{a}{2}$에서 극소인 동시에 최소이므로

함수 $f(x)$의 최솟값은

$$f\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{a}{2}\right)^2+3a\times\frac{a}{2}-2a^2\ln\frac{a}{2}=\frac{7}{4}a^2-2a^2\ln\frac{a}{2}$$

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\infty$이므로 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나려면

$\frac{7}{4}a^2-2a^2\ln\frac{a}{2}\leqq 0$이 성립해야 한다.

$a^2>0$이므로 $\frac{7}{4}-2\ln\frac{a}{2}\leqq 0$, $\ln\frac{a}{2}\geqq\frac{7}{8}$, $a\geqq 2e^{\frac{7}{8}}$다.

정리6 속도와 가속도

일반적으로 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)는
t를 매개변수로 하는 두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$로 나타낼 수 있다.
이때 점 P의 시각 t에서의 속도와 속력, 가속도와 가속도의 크기는 다음과 같다.

개념1 점 P의 시각 t에서의 속도와 속력

① 속도: $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ 또는 $(f'(t), g'(t))$

② 속력: $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$

개념2 점 P의 시각 t에서의 가속도와 가속도의 크기

② 가속도: $\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$ 또는 $(f''(t), g''(t))$

② 가속도의 크기: $\sqrt{(\frac{d^2x}{dt^2})^2+(\frac{d^2y}{dt^2})^2}=\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$

예제5 속도와 가속도

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 (x, y)가
두 양의 상수 a, b에 대하여 $x=e^{a(t-2)}$, $y=be^{t-2}$이다.
시각 $t=3$에서의 점 P의 속력과 점 P의 가속도의 크기가 모두 $4e$일 때,
ab의 값을 구하시오.

해설

$x=e^{a(t-2)}$, $y=be^{t-2}$에서

$\frac{dx}{dt}=ae^{a(t-2)}$, $\frac{dy}{dt}=be^{t-2}$이므로

점 P의 시각 $t=3$에서의 속도는 (ae^a, be)이고

속력은 $\sqrt{a^2e^{2a}+b^2e^2}$이다.

$\sqrt{a^2e^{2a}+b^2e^2}=4e$에서 $a^2e^{2a}+b^2e^2=16e^2$ … ㉠

$\frac{d^2x}{dt^2}=a^2e^{a(t-2)}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=be^{t-2}$이므로

점 P의 시각 $t=3$에서의 가속도는 (a^2e^a, be)이고

가속도의 크기는 $\sqrt{a^4e^{2a}+b^2e^2}$이다.

$\sqrt{a^4e^{2a}+b^2e^2}=4e$에서 $a^4e^{2a}+b^2e^2=16e^2=0$

$a>0$이므로 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $e^2+b^2e^2=16e^2$, $b^2=15$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{15}$

따라서 $ab=1\times\sqrt{15}=\sqrt{15}$이다.

THEME

4 — 삼각함수 도형의 극한과 근사

정리1 근사(Approx)

근사(approximation)란 무엇일까? 아마 평소에 근사라는 말을 많이 들어보았을 것이다.
하지만 정확하게 근사가 무엇인지, 왜 써도 되는지 모르는 사람이 많다.
우선 근사라는 개념은 테일러급수와 밀접한 연관이 있다.
고교과정에서 정확히 알 필요는 없지만 알면 근사에 대한 궁금증이 풀릴테니 읽는걸 추천한다.

테일러급수란 간단하게 초월함수를 다항함수로 바꾸는 것을 말한다고 생각하면 편하다.
이 과정에서 해석학적 설명이 들어가지만 넘기도록 하겠다.

즉 초월함수를 다항함수로 바꾸는 것, 그것이 테일러급수의 핵심이다.

개념1 다양한 초월함수의 테일러 전개

① $e^x = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^n}{n!}$

② $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

③ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

④ $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$

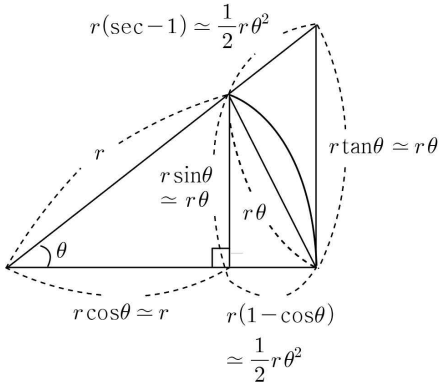
즉 다음과 같이 초월함수들을 다항함수로 나타낼 수 있다.
그런데 이게 무슨 의미가 있을까?
이는 바로 **지배항**과 관련이 있다.
일반적인 삼각함수 문제에서 $\theta \to 0$ 꼴이 등장한다.
즉 **최저차항**만을 따진다는 것이다.

이제 이를 이용하여 도형에서 어떻게 근사하는지를 알아보자.

개념2 기본적인 근사(BA, Basic Approx)

반지름이 r인 원 위에서, 중심에서 두 반지름이 이루는 각이 θ (라디안)라 할 때 다음 네 길이가 등장한다.

① 호 길이 (실선 호) : $s = r\theta$
② 사잇길이(현) (실선) : $r\sin\theta$
③ 높이(수직선) : $r(1-\cos\theta)$
④ 접선 길이(점선) : $r\tan\theta$



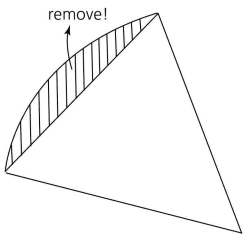
θ가 매우 작으면
- 호 길이와 현 길이가 거의 같아져 $r\sin\theta \approx r\theta$이다.
- 호 길이와 접선 길이도 거의 같아져 $r\tan\theta \approx r\theta$이다.
- 높이 $r(1-\cos\theta)$와 호 길이의 차이도 아주 작아져 $1-\cos\theta \approx \frac{\theta^2}{2}$, 따라서 $r(1-\cos\theta) \approx \frac{1}{2}r\theta^2$이다.

TIP 정리된 근사식

① $\sin\theta \approx \theta$ ② $\tan\theta \approx \theta$ ③ $1-\cos\theta \approx \frac{\theta^2}{2}$ ④ $\sec\theta - 1 \approx \frac{\theta^2}{2}$

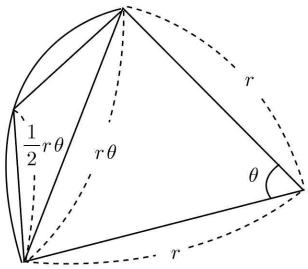
정리2 활꼴 제거(BSA, Bow Shape Approx)

반지름이 r, 중심각이 θ인 원호가 있다고 하자.
원호의 양 끝을 직선(현)으로 잇으면, 그 사이에 부풀어 오른 활꼴 영역(그림 채워진 부분)이 생긴다.
이 활꼴 영역의 면적을 구하는 일이 때로는 복잡하므로, 삼각형들의 합으로 근사하는 기법을 사용한다



다음 활꼴을 보자.

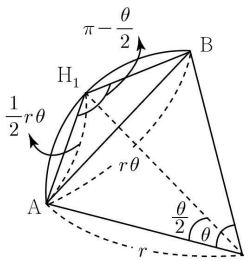
1. 원호의 두 끝점 A, B와, 이 두 점을 잇는 현의 중점 H_1을 생각한다.
2. 세 점 A, H_1, B가 만드는 삼각형 $\triangle AH_1B$는 활꼴의 중앙을 대략 덮는다.
3. 이 삼각형의 면적 S_1을 구해보자.

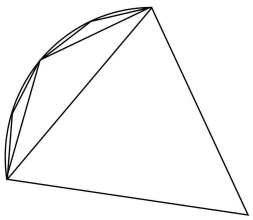


- 현의 길이는 $2r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, 중점에서 양 끝까지 각 변 길이는 $r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$이다.
- 하지만 각도를 전체 중심각 θ가 아니라,
  - 꼭짓점 각은 $\pi-\frac{\theta}{2}$,
  - 두 변의 길이는 현의 절반 $\frac{1}{2}\left(2r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$이다.
- 삼각형 면적 공식 $\frac{1}{2}bc\sin A$에서 $S_1=\frac{1}{2}\left(r\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(r\sin\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}r^2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

  θ가 작을 때 $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\approx\frac{\theta}{2}$이다.

  따라서 $S_1\approx\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{16}r^2\theta^3$





이제 이 한 조각만으로는 활꼴 전체를 덮지 못하죠. 모자란 부분을 다시 삼각형으로 채워 넣습니다.

첫 삼각형 $\triangle AH_1B$ 바깥에 남은 부위도, 똑같은 모양의 "작은 활꼴"이 됩니다.

각 작은 활꼴마다 똑같은 과정을 반복하면, 각 단계마다 "변 길이"가 $\frac{1}{2}$배로 줄어들고,

삼각형 면적은 길이 제곱에 비례하므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$배로 줄어듭니다.

그런데 한 단계에 생기는 삼각형 개수는 두 배가 되므로, 면적 총량은 단계마다

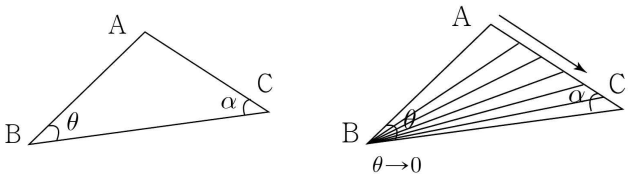
그런데 한 단계에 생기는 삼각형 개수는 두 배가 되므로, (개수)×(크기)$=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$만큼 줄어드는 기하급수 형태가 됩니다.

즉, $S_1+S_2+S_3+\cdots$에서 $\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{1}{2}$. 그리하여 급수합은 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{S_1}{1-\frac{1}{2}}=2S_1\simeq 2\times\frac{1}{16}r^2\theta^3=\frac{1}{8}r^2\theta^3$이다.

정리3 고정각 근사(FAA, Fixed Angle Approx)

(1) 문제 상황 설정
세 점 A, B, C가 있다고 하자. 각 B에서 보는 각 $\angle ABC$를 θ라 하고, 각 C에서 보는 각 $\angle ACB$를 α라 하자.
원래는 θ와 α가 모두 어떤 고정된 값(또는 함수에 의해 결정된 값)을 갖습니다.
여기서 우리는 "θ는 점점 작아져 0이 되는데, α는 그대로 유지" 하고자 합니다.
즉, B쪽의 시야각이 점점 좁아지는데도, C쪽의 시야각은 변하지 않도록 A의 위치를 조정하는 방법을 찾는 거죠.

(2) "점점 $\theta \to 0$으로" 이해하기
처음에 θ가 어느 정도 있으니 A는 위쪽 어딘가에 있습니다.
θ를 점점 줄여 나간다는 것은, A를 점점 BC 직선 쪽으로 당겨 내려온다는 뜻입니다.
θ가 아주 작아져서 거의 0이 되면, 결국 A는 거의 "B와 C를 같은 선상에 두는" 위치까지 내려와야 합니다.



- 왼쪽: 원래 θ 있을 때 A의 위치
- 오른쪽 : θ 작아질 때 a가 이동하는 궤적

(3) "α를 그대로 유지" 조건
- 우리가 유지하고 싶은 각 $\alpha = \angle ACB$는,
- A가 이동해도 언제나 C에서 보는 두 선분 CA, CB 사이의 각이 일정해야 함을 의미한다.

(4) 현 길이 일정
두 조건을 모두 만족시키려면, 결국 AB = BC이어야 한다.
1. $\theta \to 0$으로 보내려면 A가 선분 BC에 가까워져야 하고,
2. α가 일정하려면 CA와 CB 사이의 거리가 고정된 비(비율)를 유지해야 하며,
3. 이 두 가지가 가능한 유일한 방법은

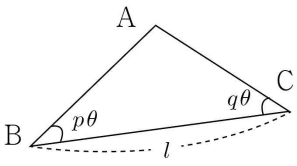
$$AB = BC$$

즉, A와 C를 연결하는 거리를 B와 C를 연결하는 거리와 같게 고정하는 것이다.
이 상태에서 θ를 0으로 한없이 보낼 때,
- $\angle ABC$는 0이 되고
- $\angle ACB$는 원래의 α값 그대로 유지된다.

(5) FAA(고정각 근사)의 활용
이 기법은 "작은 시야각(작은 θ하에서, 다른 시야각(α)을 유지"해야 할 때 유용합니다.

정리4 비 각 근사(RAA, Ratio Angle Approx)

(1) 문제 상황



- 세 점 A, B, C가 있고,
- 점 B에서 보는 두 선분 BA, BC 사이의 각이 $p\theta$
- 또 점 C에서 보는 두 선분 CA, CB 사이의 각이 $q\theta$라고 합시다.
- 그리고 BC의 길이를 l이라고 합니다.

여기서 우리는 $\theta\to0$으로 만들면서도, $\dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{q}{p}$

라는 "두 변의 길이 비"를 유지하는 A의 위치를 찾고,
또 그때 실제로 BA와 AC의 길이가 어떻게 되는지를 보고자 합니다.

(2) 왜 $\mathrm{BA}:\mathrm{AC}=q:p$인가?

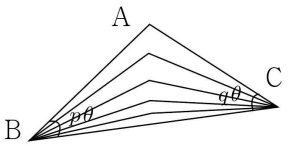
사인법칙에 따르면, $\dfrac{\mathrm{BA}}{\sin(q\theta)}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin(p\theta)}=\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin(\angle\mathrm{A})}$

하지만 $\theta\to0$이면 $\sin(p\theta)\approx p\theta$, $\sin(q\theta)\approx q\theta$이므로 $\dfrac{\mathrm{BA}}{q\theta}\approx\dfrac{\mathrm{AC}}{p\theta}\ \Rightarrow\ \dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AC}}\approx\dfrac{q}{p}$

따라서 "θ가 아주 작을 때" $\mathrm{BA}:\mathrm{AC}=q:p$이라는 비(비율)가 성립합니다.

(3) 실제 길이 계산

비율만 알면, 전체 길이 $\mathrm{BC}=l$를 BA와 AC로 분할할 수 있습니다.



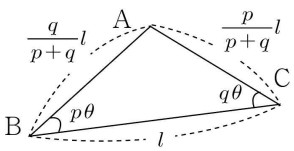
비율이 $\mathrm{BA}:\mathrm{AC}=q:p$이므로, $\begin{cases}BA=\dfrac{q}{p+q}l\\ AC=\dfrac{p}{p+q}l\end{cases}$

즉, BC를 $q:p$의 비로 나누어 준만큼 BA와 AC가 결정됩니다.

(4) "$\theta\to0$" 시나리오

1. θ가 점점 작아지면,
   - 원래 BA와 BC 사이에 있던 각 $q\theta$도 함께 작아집니다.
2. A는 "$\theta\to0$"가 되어도 $q\theta$ 비율로 $\mathrm{BA}:\mathrm{AC}$가 $q:p$의 위치를 유지해야 하므로,
3. 최종적으로 A는 BC 위의 한 점으로 "밀려 내려오는" 셈이 됩니다.
4. 그때 BA와 AC는 앞서 구한 길이만큼 고정되는 것이죠.

(5) 정리



- RAA란
  "두 작은 각을 각각 $p\theta$, $q\theta$로 유지하면서 $\theta\to0$으로 보낼 때,
  대응 변의 길이가 각의 계수 $q:p$로 비례한다."는 근사 기법입니다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{q}{p+q}l$, $\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{p}{p+q}l$

TIP RAA와 FAA

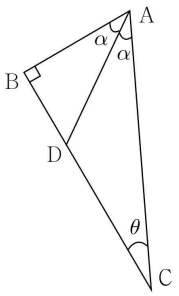
RAA는 사실 FAA에서 각의 비가 $\theta:\alpha$ 이므로 $\theta\to0$으로 갈 때 θ의 대변길이가 0이되고

α의 대변길이가 $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\alpha}{\alpha+\theta}l=\dfrac{\alpha}{\alpha+0}l=l$ 인 경우이다.

정리5 미지각 근사(UAA, Unknown Angle Approx)

(1) 문제 상황

1. 세 점 A, B, C로 이루어진 삼각형 $\triangle ABC$가 있고,
2. C에서 보는 작은 각 $\angle ACB$는 θ라 하자.
3. 그리고 우측 그림처럼, AB 위에 한 점 D를 잡아 $BD \perp AB$를 세우고,
4. AD와 AC 사이의 각이 우리가 구하려는 미지의 각 α입니다.



(2) 첫 번째 관찰 : 삼각형 ABC에서의 관계

- $\triangle ABC$에서 내각의 합은 π이므로,
  $\angle ABC + \angle BCA(\theta) + \angle CAB = \pi$
- 그런데 그림에서 $\angle ABC$는 BD를 세웠으니 $90^\circ = \frac{\pi}{2}$로 고정이고,
- $\angle CAB$를 두 배로 늘려서 쓰면 2α가 되므로
  $\frac{\pi}{2} + \theta + 2\alpha = \pi$에서 $2\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \theta$
- 따라서 $\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$이다.

(3) "$\theta \to 0$"근사

- 우리가 관심 있는 건 아주 작은 θ일 때,
- 위 식에서 θ를 0으로 보내면 $\alpha \to \frac{\pi}{4}$이다.
- 즉, 미지각 α는 θ와 무관하게 "$\frac{\pi}{4}$"에 가까워진다는 결론이 나옵니다.

(4) 두 번째 관찰: 직각이등변삼각형 이용

그런데 문제에선 $BD \perp AB$를 세웠으니, $\triangle DAB$가

- $\angle ADB = 90^\circ$ 이면서,
- 또 $\alpha = \angle DAC$라고 하면
- $\triangle DAB$ 내부에서 $\angle DAB + \angle ADB + \angle BDA = \pi$이지만 이미 $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$이고, $\angle BDA$와 $\angle DAC$가 같으므로
  $\angle DAB + \frac{\pi}{2} + \alpha = \pi$에서 $\angle DAB = \frac{\pi}{2} - \alpha$이다.

그리고 위에서 구한 $\alpha \approx \frac{\pi}{4}$를 대입하면 $\angle DAB \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$이다.

즉, $\triangle DAB$가 "90°"와 "45°"를 가지는 직각이등변삼각형이 된다는 사실을 정확하게 알 수 있습니다.

마치며 근사의 태도 정리

사실 24학년도부터 킬러문항배제 정책에 직격탄을 맞은 단원입니다.
지금까지 보여준 것과 같이 사실 근사를 알고 모르고의 차이가 매우 심합니다.
하지만 언제든 출제될 수 있는 문항이며 내신에서는 가리지 않고 출제하는 유형입니다.
교재에서 배운 스킬들은 사용하면 매우 파괴적이라고 자부합니다.

근사 태도 정리

① BA로 상황정리하기(원주각, 길이 등등)
② 이후 사용가능한 근사 스킬들 복기하기
③ 빼기 연산 조심하기

1단원에서 다루었듯 빼기 연산은 차수를 바꿉니다.
빼기 연산에선 정신을 꽉 잡고 문제를 보도록 합시다

마지막으로 하고 싶은 말은 **기본적인 근사(BA)**가 제일 중요하다는 것입니다.
이제 문제편에서 활용 방법을 배워보도록 합시다.

.

THEME

5 — 차수추론

정리1 최고차항과 최저차항

개념1 최고차항과 최저차항

① 최고차항: $x\to\infty$에서 지배적인 항

함수 $f(x)$가 무한대로 커질 때 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^n}=\alpha\ (\alpha\neq 0)$이면 "$f(x)$의 최고차항은 αx^n이다."라고 씁니다.

예 $f(x)=3x^5-x^2+7$이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^5}=3$이므로 최고차항은 3이다.

② 최저차항: $x\to 0$

$x\to 0$ 근처에서 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x^n}=\alpha\ (\alpha\neq 0)$이면 "$f(x)-f(0)$의 최저차항은 αx^n"이라 합니다.

③ 최저차항: $x\to a$

일반 $x\to a$ 근처에서는 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n}=\alpha\ (\alpha\neq 0)$ $\Rightarrow$ "$f(x)-f(a)$의 최저차항은 αx^n"이다.

여기서 중요한 점은 ③에서 $f(x)$의 최저차항이 아닌 $f(x)-f(a)$의 최저차항이 αx^n이라는 점이다.
이제부터 최저차수는 n차: α 라고 쓸 것이다.

개념2 미분가능성의 조건

함수가 $x=a$에서 미분가능하려면, $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 유한한 값으로 존재해야 합니다.

- 분모가 $(x-a)^1$ 차수이므로, 분자가 최소 1차 이상 커져야 (즉 $f(x)-f(a)=O(x-a)$) 분수의 극한이 무한대로 발산하지 않습니다.
- 만약 분자의 최저차항 차수가 $m>1$이라면 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=O((x-a)^{m-1})\to 0$ $\to$ 미분계수 $f'(a)=0$
- 반대로 분자의 최저차항 차수가 $m<1$ (예: $O\sqrt{x-a}$)라면 분모보다 "작게"커져 분수는 $\to\infty$ 나 $\to-\infty$ $\to$ 미분불가능

정리2 합성함수의 차수를 추론하는 방법

(1) 구체적 예시로 시작하기

함수 3개 g, h, f가 있고, 이들을 차례로 합성하여 $F(x)=f(g(h(x)))$를 만들었다고 하자.

- 먼저, h를 $x\to a$ 근처에서 $h(x)-h(a)=O((x-a)^p)$
  즉, 차수 p를 갖는다고 가정합니다.
- 그다음, g를 $u\to h(a)$ 근처에서 $g(u)-g(h(a))=O((u-h(a))^q)$ 차수 q.
- 마지막으로, f를 $v\to g(h(a))$ 근처에서 $f(v)-f(g(h(a)))=O((v-g(h(a)))^r)$ 차수 r.

(2) 합성 후의 총 차수는 곱

이제 $F(x)-F(a)$를 전개하면,

$$\begin{aligned} F(x)-F(a)&=f(g(h(x)))-f(g(h(a)))=O((g(h(x))-g(h(a)))^r) \text{ (차수 } r \text{ 사용)}\\ &=O((h(x)-h(a))^{qr}) \text{ (차수 } q \text{ 사용)}\\ &=O((x-a)^{pqr}) \text{ (차수 } p \text{ 사용)}\end{aligned}$$

따라서, 합성함수 F의 최종 차수는 $n=p\times q\times r$이다.

(3) "왜 이렇게 생각하나?"

1. 차수 p란 $h(x)-h(a)\sim C(x-a)^p$이라는 뜻.
2. 이 결과를 입력으로 삼아 $g(h(x))-g(h(a))$를 보면, "입력 변화량 $\triangle U=h(x)-h(a)$"에 대해 차수 q이므로
   $=O(\triangle u^q)=O((x-a)^{pq})$
3. 다시 이를 f의 입력으로 삼으면, 차수 r이므로 $=O(((x-a)^{pq})^r)=O((x-a)^{pqr})$

(4) 실제로 활용해 보기

$h(x)=x^2$, $g(u)=\sin u$, $f(v)=1-\cos v$ 그리고 $a=0$이라 하자.

1. $h(x)-h(0)=x^2=O(x^2)$에서 $p=2$이다.
2. $g(u)-g(0)=\sin u-0=O(u)$에서 $q=1$이다.
3. $f(v)-f(0)=1-\cos v=O(v^2)$에서 $r=2$이다.

합성 $F(x)=1-\cos(\sin(x^2))$에 대해서는 $F(x)-F(0)=O(x^{2\cdot 1\cdot 2})=O(x^4)$
즉, 차수 $=4$임을 곧바로 알 수 있습니다.

정리3 역함수의 차수를 추론하는 방법

개념1 역함수의 차수를 추론하는 방법

어떤 함수 f가 g의 역함수일 때, f와 g가 각각 "얼마나 빠르게 0에 가까워지는지"(차수)를 알면, 역함수인 g의 차수를 곧바로 알아낼 수 있다.

개념2 차수란 무엇인가?

함수 f가 $x \to a$ 근처에서 $f(x)-f(a)=O((x-a)^n)$이면, 우리는 "$f(x)-f(a)$의 차수가 n"이라고 말합니다.

예를 들어 $\cos x-1=-\frac{1}{2}x^2+O(x^4)$이면 차수 $n=2$이다.

개념3 역함수와 차수 관계

가정:

1. f와 g는 서로 역함수이다. 즉 $f(g(x))=x$, $g(f(x))=x$이다.
2. f는 $x \to a$ 근처에서 차수 n: $f(x)-f(a)=O((x-a)^n)$, $f(a)=b$

   물어볼 것 : 역함수 g는 $x \to b$ 근처에서 어떤 차수 m를 가질까?

개념4 추리 과정

1. $y=f(x)$ 근처에서 $y-b=f(x)-f(a)=O((x-a)^n)$

   여기서 "입력 변화량"이 $(x-a)$일 때, "출력 변화량"이 $(x-a)^n$ 일어남을 뜻합니다.
2. 역함수 g를 사용해 보면, $x=g(y)$, $a=g(b)$ 이므로 $x-a=g(y)-g(b)$이다.

   그런데 우리가 아는 건 원래 $y-b=O((x-a)^n)$

   이를 다시 "g의 입력·출력" 관계로 바꾸면 $x-a=g(y)-g(b)=O((y-b)^m)$

   여기서 우리는 m을 찾고 싶습니다.
3. 두식을 연결

   $y-b=O((x-a)^n) \Rightarrow (y-b)^{\frac{1}{n}}=O(x-a)$이다.

   그런데 또 $x-a=O((y-b)^m)$이다.

   이 두 식이 모두 맞으려면, $O(x-a) \sim O((y-b)^{\frac{1}{n}})$ 이면서 $O(x-a) \sim O((y-b)^m)$

   즉 $m=\frac{1}{n}$이어야 일치합니다.

개념5 결론

만약 f가 $x \to a$에서 차수 n이고, g가 그 역함수($g(b)=a$)라면, $g(y)-g(0)=O((y-b)^{\frac{1}{n}})$

즉, 역함수의 차수는 원함수 차수의 역수가 됩니다.

예를 들어 원함수 $f(x)=x^3$에 대해 차수는 $n=3$이다. 역함수 $g(y)=\sqrt[3]{y}$의 차수는 $\frac{1}{3}$이다.

이렇게, 복잡하게 도함수나 급수를 계산하지 않고도 "역함수의 차수"를 간단히 알아낼 수 있습니다.

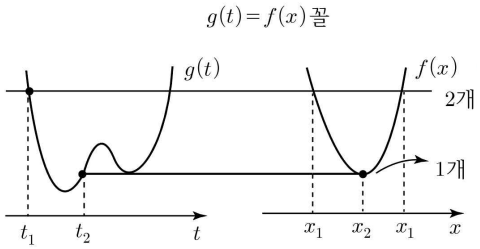
THEME

6 — N축 함수

정리1 이중변수방정식

개념1 이중변수방정식의 해법

우리가 풀고 싶은 방정식은 $g(t)=f(x)$입니다.
여기서 $f(x)$는 x를 넣으면 y가 나오는 함수이고,
$g(t)$는 t를 넣으면 또 다른 y가 나오는 함수예요.



두 식이 같다는 말은,
"$g(t)$가 내놓은 숫자"와 "$f(x)$가 내놓은 숫자"가 같을 때,
그때의 x의 개수를 세라는 의미죠.

개념2 그래프를 이용한 직관적 풀이법

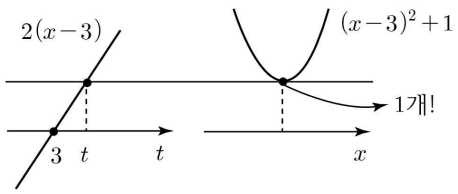
① $y=f(x)$ 그래프를 그려놓고
② $g(t)$가 어떤 숫자를 내는지 생각해봅시다.
  · $g(t)$는 t에 따라 "출력값"이 달라지니까,
  · 출력을 y축 위의 높이(=수평선)라고 상상해봅시다.
③ 곡선 $y=f(x)$ 위에, 그 높이의 수평선을 그어보세요.
④ 수평선과 곡선이 만나는 x 좌표 개수가 바로 "해의 개수"입니다.

예를 들어, 수평선이 포물선 $y=f(x)$과 두 군데 만난다면 해가 2개, 한 군데만 만난다면 해가 1개, 혹은 만나지 않으면 해가 0개인 거죠.

예시 두 함수 $f(x)=x^2-6x+10$, $g(x)=f'(x)$일 때, $g(t)=f(x)$의 실근 개수가 1개가 되는 t의 값을 구하시오.

먼저 $f(x)=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$이므로 포물선의 꼭짓점은 $(3,1)$이고, 아래로 볼록한 모양이다.
또한 $g(t)$는 f를 t에 대하여 미분한 것이므로 $g(t)=f'(t)=2t-6$이다.

포물선 $y=f(x)=(x-3)^2+1$을 그리고 직선 $y=g(t)=2t-6$을 생각해보자.
하지만 방정식은 $g(t)=f(x)$이므로 $y=2t-6$을 "수평선 $y=$어떤 수:로 봐야한다.
즉 $2t-6$이 수평선의 높이이므로, $y=2t-6$라는 수평선을 그리는 것이다.



포물선의 최솟값(꼭짓점)은 $y=1$이다.

따라서
· $2t-6>1$이면, 수평선이 포물선을 두 번 만난다 (해 2개).
· $2t-6=1$이면, 수평선이 포물선의 꼭짓점과 한 번 만난다 (해 1개).
· $2t-6<1$이면, 수평선이 포물선과 아예 만나지 않는다. (해 0개).

해가 1개가 되려면 반드시 $2t-6=1$이고 이를 풀면 $t=\frac{7}{2}$이다.

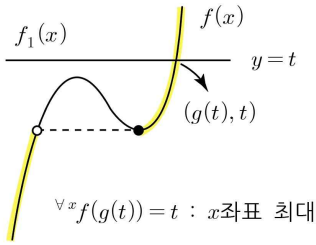
정리2 N축 함수 기본($f(g(x))=x$)

개념1 대수적 해석

$f_1(x)$의 정의역은 $g(x)$의 치역과 같아야한다.

즉 다음과 같은 함수 $f(x)$가 존재하면 $f_1(x)$로 정의역이 제한된다.

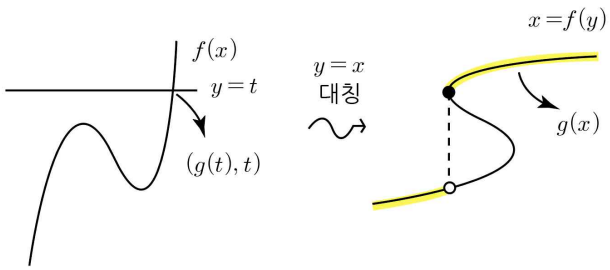
따라서 다음식이 성립한다. $f_1^{-1}(x)=g(x)$



$\forall x f(g(t))=t$: x좌표 최대 : $g(x)$

개념2 기하적 해석

$y=f(x)$를 $y=x$ 대칭한 곡선의 일부 → $g(x)$



예제1 기하적 해석

모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x), g(x)$에 대하여 다음 조건이 성립할 때 $g(x)$의 개형을 그리시오.

<조 건>

$|f(g(x))|=x$ 이다.

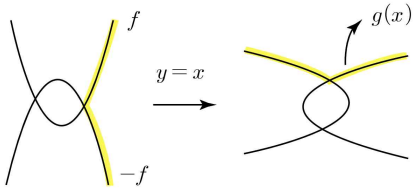
해설

$f(g(x))=\pm x$ 이므로

$y=\pm f(x)$를 $y=x$에 대해 대칭한 곡선의 일부이므로

$g(x)$의 개형은 다음과 같다.

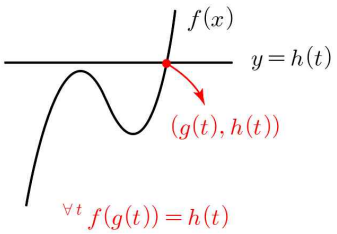
$y=\pm f(x)$를 $y=x$ 대칭한 곡선의 일부

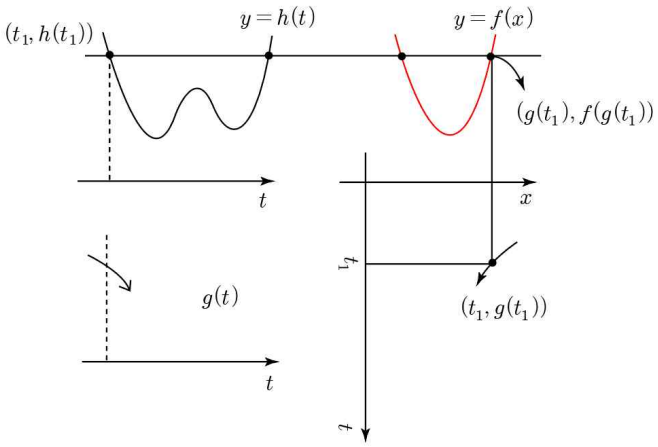


정리3 N축 함수 심화

개념1 N축함수의 심화($f(g(t))=h(t)$)

$f(g(t))=h(t)$가 존재할 때
x에 대한 방정식 $h(t)=f(x)$의 실근: $g(t)$



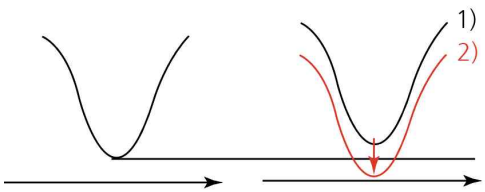


개념2 N축 함수 사용법

① t과 x축을 동일 선상에 위치시키고 왼쪽에는 $h(t)$를 오른쪽에는 $f(x)$를 위치시킨다.
② t값을 점점 키워가며 $f(x)$쪽으로 선을 긋는다. 교점의 좌표는 N축함수의 정의에 의해 $g(t)$이다.
③ t값을 늘려가며 선을 그으면서 $g(t)$의 개형을 추론한다.

이때 이중변수방정식에 의해 만나는 교점만큼의 $g(x)$의 개형의 경우의 수가 생기며 이는 240628 에서 자세히 다룬다.

개념3 치역판정법



$h(t)$에서 $f(x)$로의 N축함수에서 만나는 점이 없다면 $g(x)$가 정의되지 않는다.
$\therefore \min(f(x)) \geq \min(h(t))$

즉 **1)** 의 경우에는 정의가 되지 않으므로 항상 2) 와 같아야한다.

정리4 초월함수 단축 암기식

개념1 지수함수X다항함수의 도함수 근

$pe^x(x-a)^n$의 도함수 근$(n\neq 1)$

$\Rightarrow a, a-n \ (n\neq 1)$

$\Rightarrow a-1\,(n=1)$

*일반화

$pe^{\frac{1}{b}x}(x-a)^n$의 도함수 근

$\Rightarrow a, a-bn$

이를 통해 $f'(x)$를 계산하지 않고 도함수 근을 이용하여 추론할 수 있다, 미분하면 계수가 $p\times\frac{1}{b}$가 된다는 점만 주의하자.

예시

(1) $(x-3)e^{x-4}$의 도함수 근: $3-1=2$

(2) $(x-a-2)^2e^x$의 도함수 근: $a+2, a$ (250628 中)

(3) $-(x-k)e^{-x}$의 도함수 근: $k+1$ (250930 中)

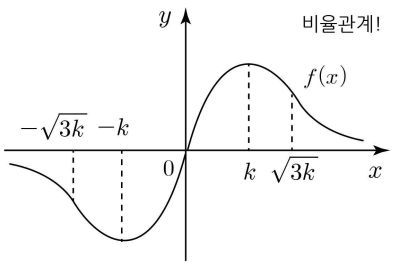
(4) $(x-3)^3e^{4x+9}$의 도함수 근: $3, 3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$

개념2 $\frac{px}{x^2+k}$의 도함수 근

$f(x)=\frac{px}{x^2+k}$일 때

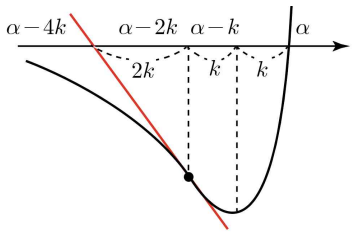
$f'(x)=0$을 만족시키는 $x=k, -k$

$f''(x)=0$을 만족시키는 $x=\sqrt{3k}, -\sqrt{3k}$



개념3 (지수함수)X(일차함수) 비율관계

$f(x)=a(x-\alpha)e^{\frac{1}{k}x}$일 때 다음 비율관계가 성립한다.



예제2 (지수함수)X(일차함수) 비율관계+도함수근

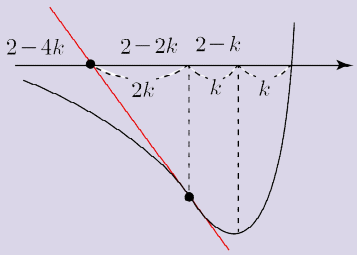
$f(x)=p(x-2)e^{\frac{1}{k}x}$에서, 변곡점에서의 접선의 기울기를 $g(k)$

$f(x)=p(x-2)e^{\frac{1}{k}x}$에서, 변곡점에서의 접선의 기울기를 $g(k)$라 하자.
$g(t)$가 $t=s$에서 불연속일 때, $f(s)=-4$이다.
이때, $g(s+2)$의 값은?

① $-\frac{3}{e}$ ② $-\frac{2}{e}$ ③ $-\frac{1}{e}$ ④ 0 ⑤ $\frac{1}{e}$

해설

$f(x)$를 그래프로 그려보면 다음과 같다.



우선 $g(k)$를 위해 변곡접선의 기울기를 구하도록 하자.
이때 초월함수 단축 암기식에 의해 도함수근은 $2-k$이므로

$f'(x)=\frac{p}{k}(x-2+k)e^{\frac{1}{k}x}$ 따라서 변곡접선의 기울기는

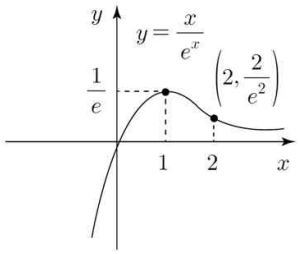
$f'(2-2k)=-pe^{\frac{2-2k}{k}}$, $g(t)=-pe^{(\frac{2}{t}-2)}$
$g(t)$가 불연속이기 위해선 $t=0$이다.
$\therefore s=0$이고 $f(s)=f(0)=-2p=-4$, $p=2$
$\therefore g(s+2)=g(2)=-\frac{2}{e}$

정리5 Best 6 Graph

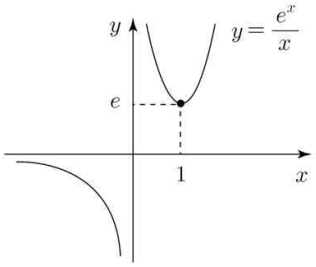
개념1 빈출함수정리(for 내신)

내신 대비용 암기 그래프이다,
내신 문제에서 이계도함수를 구할 여유는 없다.

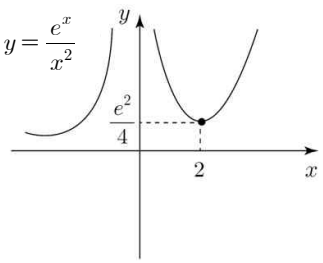
1.



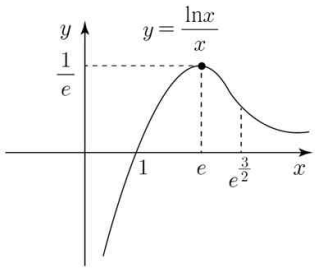
2.



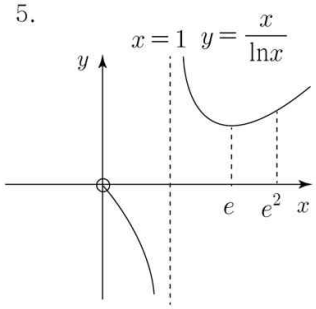
3.



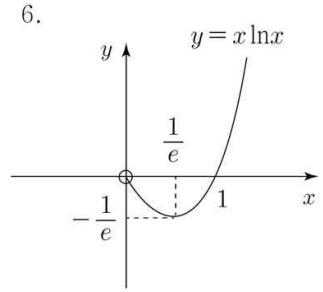
4.



5.



6.



유형 01 지수로그 함수의 극한

01 2023학년도 9월 23번 정답률 87%

23. $\lim_{x\to 0}\frac{4^x-2^x}{x}$의 값은? [2점]

① $\ln 2$ ② 1 ③ $2\ln 2$ ④ 2 ⑤ $3\ln 2$

02 2023학년도 수능 23번 정답률 89%

23. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

03 2024학년도 6월 25번 정답률 79%

25. $\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$일 때, $a+b$의 값은?
(단, a와 b는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

04 2024학년도 9월 23번 정답률 96%

23. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{e^{2x}-1}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

05 2024학년도 수능 23번 정답률 95%

23. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

06 2026학년도 9월 23번 정답률 96%

23. $\lim_{x\to 1}\frac{e^{x}-e}{x-1}$의 값은? [2점]

① e ② $2e$ ③ $3e$ ④ $4e$ ⑤ $5e$

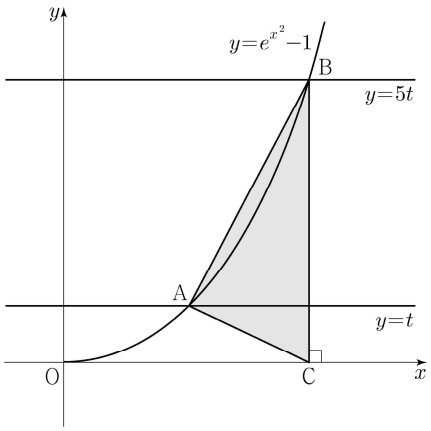
유형 02 지수로그 함수의 극한의 활용

01 2025학년도 6월 26번 정답률 76%

26. 양수 t에 대하여 곡선 $y=e^{x^2}-1\ (x\geq 0)$이 두 직선 $y=t$, $y=5t$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{S(t)}{t\sqrt{t}}$의 값은? [3점]

① $\dfrac{5}{4}(\sqrt{5}-1)$ ② $\dfrac{5}{2}(\sqrt{5}-1)$ ③ $5(\sqrt{5}-1)$

④ $\dfrac{5}{4}(\sqrt{5}+1)$ ⑤ $\dfrac{5}{2}(\sqrt{5}+1)$



유형 03 삼각함수의 극한과 덧셈정리

01 2022학년도 6월 25번 정답률 79%

25. 원점에서 곡선 $y=e^{|x|}$에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{e}{e^2+1}$ ② $\frac{e}{e^2-1}$ ③ $\frac{2e}{e^2+1}$
④ $\frac{2e}{e^2-1}$ ⑤ 1

02 2026학년도 수능 26번 정답률 91%

23. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 6x}{2x}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

03 2022학년도 9월 24번 정답률 91%

24. $2\cos\alpha = 3\sin\alpha$이고 $\tan(\alpha+\beta)=1$일 때, $\tan\beta$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

04 2024학년도 6월 27번 정답률 68%

27. 실수 $t\,(0<t<\pi)$에 대하여 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, \sin t)$에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\lim\limits_{t\to\pi-}\dfrac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$의 값은? [3점]

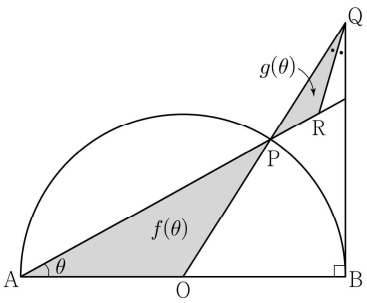
① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

유형 04 삼각함수 도형의 극한

01 2022학년도 6월 28번 정답률 53%

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, $\angle OQB$의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자. $\angle OAP=\theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

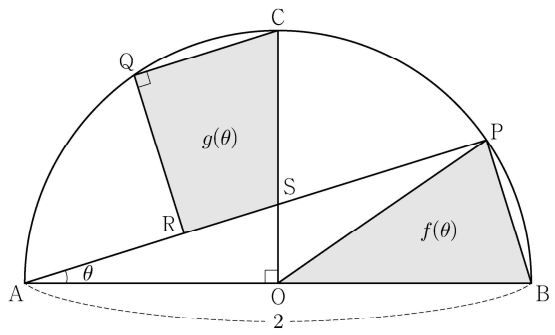
$\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$) [4점]



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

02 2023학년도 수능 28번 정답률 44%

28. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 $\angle AOC=\frac{\pi}{2}$인 점 C가 있다. 호 BC 위에 점 P와 호 CA 위에 점 Q를 $\overline{PB}=\overline{QC}$가 되도록 잡고, 선분 AP 위에 점 R를 $\angle CQR=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡는다. 선분 AP와 선분 CO의 교점을 S라 하자. $\angle PAB=\theta$일 때, 삼각형 POB의 넓이를 $f(\theta)$, 사각형 CQRS의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to 0+}\frac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

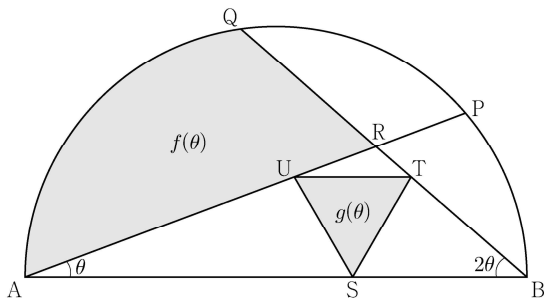
유형 05 삼각함수 도형의 활용

01 2022학년도 수능 29번 정답률 15%

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle PAB=\theta$, $\angle QBA=2\theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AP, BQ의 교점을 R라 하자.
선분 AB 위의 점 S, 선분 BR 위의 점 T, 선분 AR 위의 점 U를 신분 UT가 신분 AB에 평행하고 삼각형 STU가 정삼각형이 되도록 잡는다. 두 선분 AR, QR와 호 AQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 STU의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

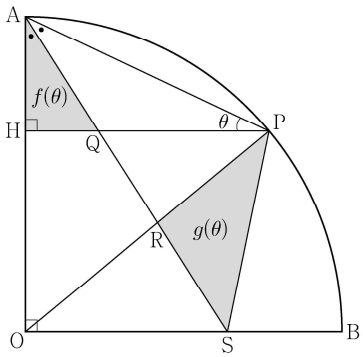


02 2023학년도 6월 29번 정답률 19%

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle OAP$를 이등분하는 직선과 세 선분 HP, OP, OB의 교점을 각각 Q, R, S라 하자. $\angle APH=\theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PSR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

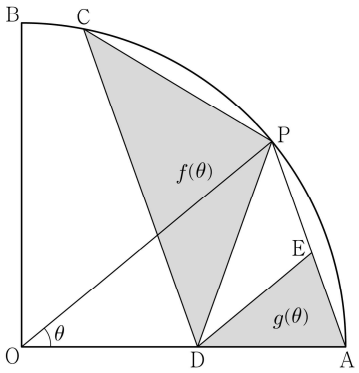
$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta^3\times g(\theta)}{f(\theta)}=k$일 때, $100k$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)

[4점]



03 2023학년도 9월 28번 정답률 61%

28. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{PA}=\overline{PC}=\overline{PD}$가 되도록 호 PB 위에 점 C와 선분 OA 위에 점 D를 잡는다. 점 D를 지나고 선분 OP와 평행한 직선이 선분 PA와 만나는 점을 E라 하자. $\angle POA=\theta$일 때, 삼각형 CDP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 EDA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

유형 06 합성함수의 미분법

01 2022학년도 수능 24번 정답률 76%

24. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x^3+x)=e^x$$

을 만족시킬 때, $f'(2)$의 값은? [3점]

① e ② $\frac{e}{2}$ ③ $\frac{e}{3}$ ④ $\frac{e}{4}$ ⑤ $\frac{e}{5}$

유형 07 삼각함수의 미분법

01 2025학년도 9월 27번 정답률 79%

27. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

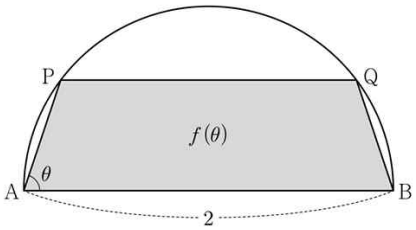
$$f(x)+f\left(\frac{1}{2}\sin x\right)=\sin x$$

를 만족시킬 때, $f'(\pi)$의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

02 2026학년도 6월 27번 정답률 70%

27. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle BAP=\theta\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하고, 점 P를 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 ABQP의 넓이를 $f(\theta)$라 하고, $\overline{AP}:\overline{BP}=1:3$이 되도록 하는 θ의 값을 a라 할 때, $f'(a)$의 값은? [3점]



① $-\frac{64}{25}$ ② $-\frac{59}{25}$ ③ $-\frac{54}{25}$

④ $-\frac{49}{25}$ ⑤ $-\frac{44}{25}$

유형 08 매개변수의 미분법

01 2022학년도 6월 24번 정답률 92%

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^t+\cos t,\quad y=\sin t$$

에서 $t=0$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

02 2022학년도 9월 25번 정답률 92%

25. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^t-4e^{-t},\quad y=t+1$$

에서 $t=\ln 2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

03 2023학년도 6월 24번 정답률 87%

24. 곡선 $x^2-y\ln x+x=e$ 위의 점 (e, e^2)에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $e+1$ ② $e+2$ ③ $e+3$ ④ $2e+1$ ⑤ $2e+2$

04 2024학년도 6월 24번 정답률 85%

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=\frac{5t}{t^2+1},\quad y=3\ln(t^2+1)$$

에서 $t=2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

05 2024학년도 9월 24번 정답률 85%

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=t+\cos 2t,\quad y=\sin^2 t$$

에서 $t=\frac{\pi}{4}$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

06 2024학년도 수능 24번 정답률 86%

24. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x=\ln(t^3+1),\quad y=\sin \pi t$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}\pi$ ② $-\frac{2}{3}\pi$ ③ $-\pi$ ④ $-\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $-\frac{5}{3}\pi$

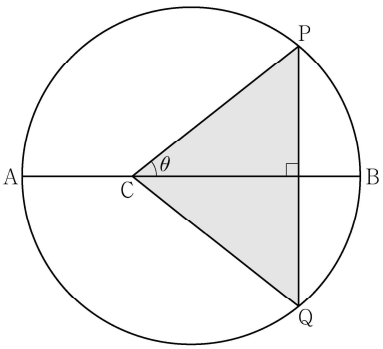
유형 09 음함수의 미분법

01 2022학년도 6월 30번 정답률 12%

30. $t > \frac{1}{2}\ln 2$인 실수 t에 대하여 곡선 $y = \ln(1 + e^{2x} - e^{-2t})$과 직선 $y = x + t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2) = \frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

02 2024학년도 9월 30번 정답률 16%

30. 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 원과 선분 AB 위에 $\overline{AC}=4$인 점 C가 있다. 이 원 위의 점 P를 $\angle PCB=\theta$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 삼각형 PCQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $-7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



03 2025학년도 6월 24번 정답률 87%

24. 곡선 $x\sin 2y+3x=3$ 위의 점 $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

04 2026학년도 6월 24번 정답률 89%

24. 곡선 $3x+y+\cos(xy)=2$ 위의 점 $(0,1)$에서의 접선의 x절편은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

유형 10 역함수의 미분법

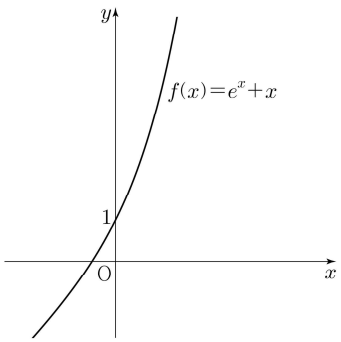
01 2023학년도 6월 25번 정답률 84%

25. 함수 $f(x)=x^3+2x+3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

02 2023학년도 9월 29번 정답률 22%

29. 함수 $f(x)=e^x+x$가 있다. 양수 t에 대하여 점 $(t, 0)$과 점 $(x, f(x))$ 사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 $f(s)$의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하시오. [4점]



03 2025학년도 수능 27번 정답률 48%

27. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(e^x)+e^x$$

이라 하자. 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0, g(0))$에서의 접선이 x축이고 함수 $g(x)$가 역함수 $h(x)$를 가질 때, $h'(8)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{36}$ ② $\frac{1}{18}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{5}{36}$

04 2026학년도 6월 26번 정답률 83%

26. 함수 $f(x)=e^{3x}-3e^{2x}+4e^x$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $g'(a)=\frac{1}{8}$이 되도록 하는 실수 a에 대하여 $a+f'(g(a))$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

05 2026학년도 9월 27번 정답률 79%

27. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.
함수 $f(x^3+x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,
$f(2)=1$, $f'(2)=8g'(1)-1$이다. $g(1)+g'(1)$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

유형 11 접선의 방정식

01 2024학년도 6월 29번 정답률 23%

29. 세 실수 a, b, k에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(a, a+k)$, $\mathrm{B}(b, b+k)$가 곡선 $C: x^2-2xy+2y^2=15$ 위에 있다. 곡선 C 위의 점 A에서의 접선과 곡선 C 위의 점 B에서의 접선이 서로 수직일 때, k^2의 값을 구하시오. (단, $a+2k\neq 0$, $b+2k\neq 0$) [4점]

02 2025학년도 수능 27번 정답률 39%

27. 실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=\dfrac{1}{e^x}+e^t$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(a)=-e\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 a에 대하여 $f'(a)$의 값은? [3점]

① $-\dfrac{1}{3}e\sqrt{e}$ ② $-\dfrac{1}{2}e\sqrt{e}$ ③ $-\dfrac{2}{3}e\sqrt{e}$

④ $-\dfrac{5}{6}e\sqrt{e}$ ⑤ $-e\sqrt{e}$

03 2025학년도 6월 27번 정답률 39%

27. 상수 $a\,(a>1)$과 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 곡선 $y=a^x$ 위의 점 $\mathrm{A}(t, a^t)$에서의 접선을 l이라 하자. 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B, y축과 만나는 점을 C라 하자. $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$의 값이 $t=1$에서 최대일 때, a의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{e}$ ③ 2 ④ $\sqrt{2e}$ ⑤ e

04 2025학년도 9월 24번 정답률 91%

24. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\big(t, f(t)\big)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{t}+4e^{2t}$이다. $f(1)=2e^2+1$일 때, $f(e)$의 값은? [3점]

① $2e^{2e}-1$ ② $2e^{2e}$ ③ $2e^{2e}+1$
④ $2e^{2e}+2$ ⑤ $2e^{2e}+3$

05 2025학년도 수능 28번 정답률 31%

28. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=-x+e^{1-x^2}$$

이다. 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(t)$라 하자. $g(1)+g'(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}e+\frac{5}{6}$
④ $\frac{2}{3}e+\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}e+\frac{2}{3}$

06 2026학년도 수능 27번 정답률 54%

27. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^{4t}(1+\sin^2\pi t),\quad y=e^{4t}(1-3\cos^2\pi t)$$

를 C라 하자. 곡선 C가 직선 $y=3x-5e$와 만나는 점을 P라 할 때, 곡선 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{3\pi-4}{\pi+4}$ ② $\frac{3\pi-2}{\pi+6}$ ③ $\frac{3\pi}{\pi+8}$

④ $\frac{3\pi+2}{\pi+10}$ ⑤ $\frac{3\pi+4}{\pi+12}$

유형 12 함수의 극대와 극소

01 2022학년도 수능 28번 정답률 26%

28. 함수 $f(x)=6\pi(x-1)^2$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$$

라 하자. $0<x<2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

유형 13 방정식의 실근의 개수

01 2022학년도 6월 27번 정답률 71%

27. 두 함수

$$f(x)=e^{x},\quad g(x)=k\sin x$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 때, 양수 k의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}}$ ② $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}}$ ③ $\sqrt{2}e^{2\pi}$
④ $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$ ⑤ $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{2}}$

02 2023학년도 6월 28번 정답률 47%

28. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}\ln|f(x)| & (f(x)\neq 0)\\ 1 & (f(x)=0)\end{cases}$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극솟값은? [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.

(나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고,
함수 $|g(x)|$는 $x=2$에서 극소이다.

(다) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① $\ln\frac{13}{27}$ ② $\ln\frac{16}{27}$ ③ $\ln\frac{19}{27}$ ④ $\ln\frac{22}{27}$ ⑤ $\ln\frac{25}{27}$

03 2023학년도 6월 30번 정답률 12%

30. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}$$

이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.

$g(5)+\lim_{t\to 5} g(t)=5$일 때, $\lim_{t\to k-} g(t)\neq \lim_{t\to k+} g(t)$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

유형 01 지수로그 함수의 극한

01 2023학년도 9월 23번 정답률 87%

23. $\lim_{x\to 0}\frac{4^x-2^x}{x}$의 값은? [2점]

① $\ln 2$ ② 1 ③ $2\ln 2$ ④ 2 ⑤ $3\ln 2$

정 답 ①

해 설

• 분자를 미분하면 $4^x\ln 4-2^x\ln 2$이다.

• $x=0$에서 각각 대입하면 $\ln 2$이다.

02 2023학년도 수능 23번 정답률 89%

23. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ④

해 설

분모를 유리화하면

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}(\sqrt{x+4}+2)=4$

03 2024학년도 6월 25번 정답률 79%

25. $\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$일 때, $a+b$의 값은?
(단, a와 b는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

정 답 ①

해 설

STEP1 $x=0$에서의 분모, 분자

분자에서 $2^b-8=0$을 만족해야 하므로 $b=3$이다.

STEP2 로피탈 적용

• 분자를 미분하면 $a\cdot\ln 2\cdot 2^{ax+3}$이다.

• 분모를 미분하면 $2^{3x}\cdot\ln 2\cdot 3$이다.

• $\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+3}-8}{2^{3x}-1}=\frac{8a\ln 2}{3\ln 2}=\frac{8a}{3}=16$이므로 $a=6$이다.

따라서 $a+b=9$이다.

04 2024학년도 9월 23번 정답률 96%

23. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{e^{2x}-1}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

정 답 ④

해 설

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{7e^{7x}}{2e^{2x}}=\frac{7}{2}$이다.

05 2024학년도 수능 23번 정답률 95%

23. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

정 답 ③

해 설

- 분자를 미분하면 $\frac{3}{1+3x}$이다.
- 분모를 미분하면 $\frac{5}{1+5x}$이다.
- $x=0$에서 각각 대입하면 3과 5이다.

따라서 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}=\frac{3}{5}$이다.

06 2026학년도 9월 23번 정답률 96%

23. $\lim_{x\to 1}\frac{e^{x}-e}{x-1}$의 값은? [2점]

① e ② $2e$ ③ $3e$ ④ $4e$ ⑤ $5e$

정 답 ①

해 설

분자를 미분하면 e^x이므로 $\lim_{x\to 1}\frac{e^{x}-e}{x-1}=e$이다.

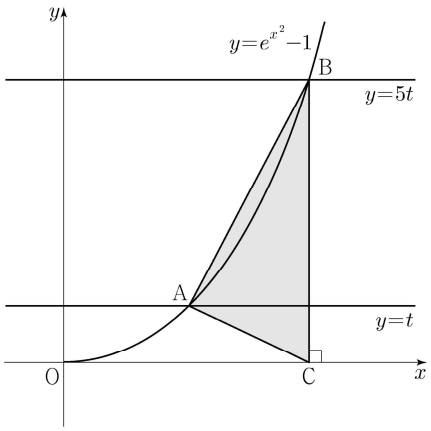
유형 02 지수로그 함수의 극한의 활용

01 2025학년도 6월 26번 정답률 76%

26. 양수 t에 대하여 곡선 $y=e^{x^2}-1\ (x\geq 0)$이 두 직선 $y=t$, $y=5t$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t\sqrt{t}}$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{4}(\sqrt{5}-1)$ ② $\frac{5}{2}(\sqrt{5}-1)$ ③ $5(\sqrt{5}-1)$

④ $\frac{5}{4}(\sqrt{5}+1)$ ⑤ $\frac{5}{2}(\sqrt{5}+1)$



정 답 ②

해 설

최종적으로 물어보는 극한 식을 먼저 보면, $S(t)$가 포함되어 있습니다. 삼각형 ABC의 넓이를 구하면, 극한값 계산을 통해 답을 구할 수 있습니다. 즉, 이 문제에서 $S(t)$만 구하면 문제는 다 푼 것입니다.

STEP1 점 A, B, C의 좌표를 구한다.

점 A의 좌표를 우선 구해보자.

$e^{x^2}-1=t$에서 $x=\sqrt{\ln(1+t)}$ $(\because x\geq 0)$

즉, A$(\sqrt{\ln(1+t)},\ t)$ 이다.

점 B와 C의 좌표를 구해보자.

$e^{x^2}-1=5t$에서 $x=\sqrt{\ln(1+5t)}$ $(\because x\geq 0)$

즉, B$(\sqrt{\ln(1+5t)},\ 5t)$, C$(\sqrt{\ln(1+5t)},\ 0)$ 이다.

STEP2 삼각형 ABC의 넓이를 구한다.

$\overline{BC}=5t$이고, $y=t$와 선분 BC가 만나는 점을 H라 하면

$\overline{AH}=\sqrt{\ln(1+5t)}-\sqrt{\ln(1+t)}$ 이다.

즉, 삼각형 ABC의 넓이는 $\overline{AH}=\sqrt{\ln(1+5t)}-\sqrt{\ln(1+t)}$

따라서 $S(t)=\frac{1}{2}\times 5t\times\{\sqrt{\ln(1+5t)}-\sqrt{\ln(1+t)}\}$ 이다.

STEP3 최종 극한값을 구한다.

$$\lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t\sqrt{t}}=\lim_{t\to 0+}\frac{5}{2}\times\left\{\sqrt{\frac{\ln(1+5t)}{t}}-\sqrt{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right\}$$
$$=\frac{5}{2}(\sqrt{5}-1)$$

유형 03 삼각함수의 덧셈정리

01 2022학년도 6월 25번 정답률 79%

25. 원점에서 곡선 $y=e^{|x|}$에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

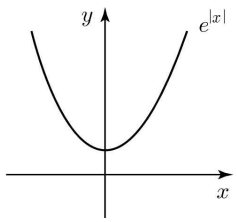
① $\frac{e}{e^2+1}$ ② $\frac{e}{e^2-1}$ ③ $\frac{2e}{e^2+1}$

④ $\frac{2e}{e^2-1}$ ⑤ 1

정 답 ④

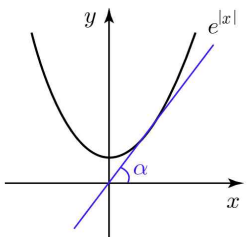
해 설

우선, $y=e^{|x|}$는 y축 대칭 함수입니다.



따라서, 원점에서 그은 두 접선도 y축에 대해 대칭입니다.
기울기가 양수인 접선의 기울기만 구하면, 각을 2배만 하면 되기에, 문제는 다 푼 것입니다.

접점의 x좌표를 t라 하면, 접선의 방정식은
$y=e^t(x-t)+e^t$입니다. 이때, 접선이 원점을 지나므로
$0=e^t(1-t)$이므로 $t=1$ 입니다.
즉, 접선의 기울기는 e입니다.



접선과 x축이 이루는 각의 크기를 α라 하면,
$\tan\alpha = e$입니다.

두 접선이 이루는 예각의 크기 $\theta=2\times\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\pi-2\alpha$

입니다. 따라서

$\tan\theta = \tan(\pi-2\alpha) = -\tan2\alpha = -\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2e}{e^2-1}$이다.

02 2022학년도 9월 24번 정답률 91%

24. $2\cos\alpha=3\sin\alpha$이고 $\tan(\alpha+\beta)=1$일 때, $\tan\beta$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

정 답 ②

해 설

$2\cos\alpha=3\sin\alpha$에서 양변을 $\cos\alpha$로 나누면
($\cos\alpha=0$이라면, $\sin\alpha=\pm1$ 이라서, 위 등식을 만족시키지 않는다. 즉, $\cos\alpha\neq0$)

$\tan\alpha=\frac{2}{3}$이다.

덧셈정리에 의해,

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{2}{3}+\tan\beta}{1-\frac{2}{3}\tan\beta}=1 \text{ 이다.}$$

즉, $\frac{2}{3}+\tan\beta=1-\frac{2}{3}\tan\beta$이므로 $\tan\beta=\frac{1}{5}$이다.

03 2024학년도 6월 27번 정답률 68%

27. 실수 $t(0<t<\pi)$에 대하여 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\sin t)$에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

정 답 ③

해 설

점 P에서의 접선의 기울기는 $\cos t$입니다.
두 직선이 이루는 예각의 크기가 θ이므로

$\tan\theta=\left|\frac{\cos t-(-1)}{1+\cos t\times(-1)}\right|=\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right|$ 입니다.

$t\to\pi-$ 일 때 $\frac{1+\cos t}{1-\cos t}>0$ 이므로

$\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}=\lim_{t\to\pi-}\left\{\frac{1}{1-\cos t}\times\frac{1+\cos t}{(\pi-t)^2}\right\}$ 이고,

극한식 내부의 분모, 분자에 $1-\cos t$를 곱하면

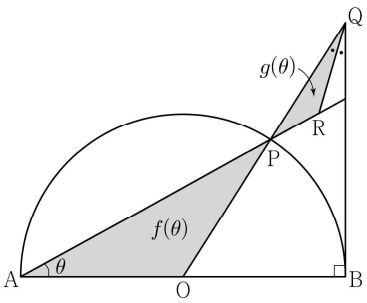
$$\lim_{t\to\pi-}\left\{\frac{1}{(1-\cos t)^2}\times\frac{\sin^2 t}{(\pi-t)^2}\right\}=\frac{1}{4}$$

유형 04 삼각함수 도형의 극한

01 2022학년도 6월 28번 정답률 53%

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, $\angle OQB$의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자. $\angle OAP=\theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

정 답 ①

해 설

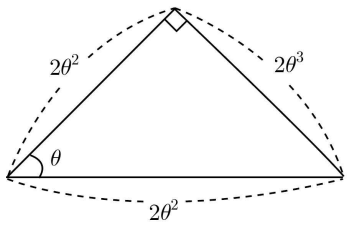
이제는 기억의 저편으로 가버린 삼도극 문제 파트입니다.
하지만 수능은 어떻게 될지 아무도 모르니 확실하게 학습을 해둡시다.
이 문제는 220628입니다, 우선 도형 문제이므로 주어진 조건을 그림에 표시하여 봅시다. 기본적인 근사로 인해
$\overline{AP}=2$가 될 것이고 원주각의 성질로 인해 $\angle POB=2\theta$이다.
기본근사로 $\overline{BP}=2\theta$라는 것까지 정리 할 수 있다.
이제 구할 수 있는 값부터 구해주도록 하면

$f(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\theta\cdot 2\cdot 1=\theta$이다.

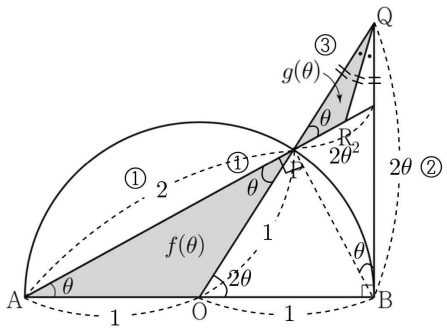
이제 각을 한 번 관찰하도록 하자
개념편에서 본대로 θ가 아닌 다른 각이 나오면 그 각을 θ로 나타내주어야 한다. $\angle PQR$이 필요하므로
$\angle PQR=\alpha$라하고 관계식을 구해보면

$\triangle OBQ$에서 $2\alpha+2\theta=\frac{\pi}{2}$이고,

$\alpha=\frac{\pi}{4}-\theta\simeq\frac{\pi}{4}$ $(\because\theta\to 0)$이다.
이때 $\triangle PQH$는 직각삼각형이 되므로



다음과 같은 삼각형이 됩니다. 우선 길이가 왜 이렇게 되는지 알아보면



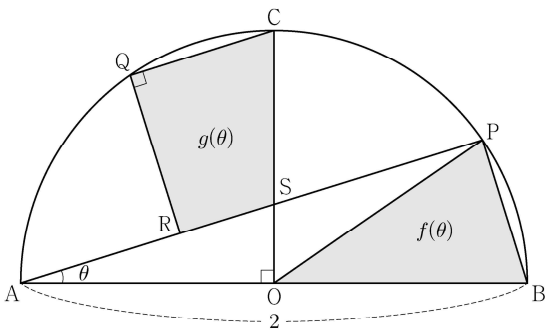
우선 $\overline{PB}$에 보조선을 긋고 기본 근사를 다시 사용하여
$\overline{PH}$의 길이를 구하면 $2\theta^2$이 되고 θ가 0으로 가면
$\overline{PQ}=\overline{PH}$이므로 다음과 같은 삼각형이 등장하게 됩니다,
이때 $\overline{QH}$의 길이가 $2\theta^3$이므로 $\triangle RQH$의 넓이는
차수가 높아 빼도 영향을 주지 않습니다.
따라서 $g(\theta)=\triangle PQH$의 넓이와 같습니다.

이제 $g(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\theta\cdot 2\theta^2\cdot 2\theta^2=2\theta^5$이고

구하는 극한값은 $\lim_{\theta\to 0}\frac{2\theta^5}{\theta^4\times\theta}=2$이다.

02 2023학년도 수능 28번 정답률 44%

28. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 $\angle AOC=\frac{\pi}{2}$인 점 C가 있다. 호 BC 위에 점 P와 호 CA 위에 점 Q를 $\overline{PB}=\overline{QC}$가 되도록 잡고, 선분 AP 위에 점 R를 $\angle CQR=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡는다. 선분 AP와 선분 CO의 교점을 S라 하자. $\angle PAB=\theta$일 때, 삼각형 POB의 넓이를 $f(\theta)$, 사각형 CQRS의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ②

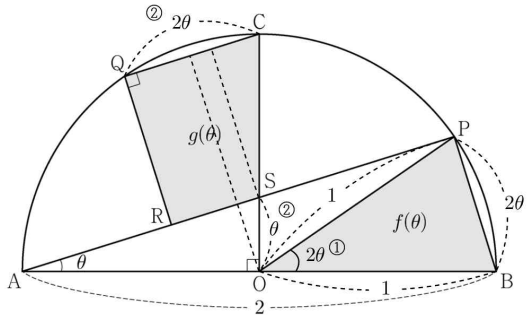
해 설

우선 복잡하지 않아보이니 기본근사로 문제상황을 정리해주도록 하자.

우선 원주각의 성질로 인해 $\angle POB=2\theta$이다.

따라서 $f(\theta)=\frac{1}{2}\times 2\theta\times 1\times 1=\theta$이다.

이제 $g(\theta)$를 구해야하는데 쉽지 않아보인다. 우선 차근차근 정보분석을 해보면 $\overline{PB}=\overline{QC}=2\theta$이다.(기본근사)



이제 $g(\theta)$를 봐보자

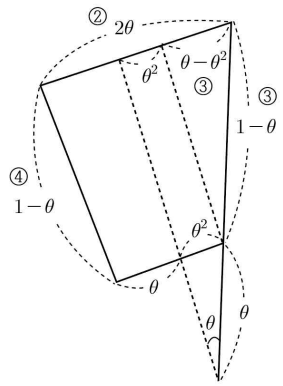
우선 점 O에서 $\overline{QC}$로 수선을 내리면 다음과 같은 그림이 생긴다.

$\triangle AOS$에서 기본근사를 사용하여 $\overline{OS}=\theta$라는 것을 알 수 있다.

이때 $\triangle OSH$에서 기본근사를 사용하면 $\overline{HS}=\theta^2$이다.

그리고 반지름에서 $\overline{OS}$를 빼서 $\overline{CS}=1-\theta$이다.

이를 종합하여 나타내면 다음 그림과 같다,



이때 $\overline{QR}$이 $1-\theta$가 되는 이유는 $\overline{CS}$에서 코사인 근사를 때리면 똑같이 $1-\theta$로 유지되기 때문이다.

이제 $g(\theta)$의 식을 써보면

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times(\theta^2+\theta+2\theta)(1-\theta)=\frac{1}{2}\theta^3-\theta^2+\frac{3}{2}\theta$$

이제 주어진 극한을 구하면

$$\lim_{\theta\to\infty}\frac{3\theta-2(\frac{3}{2}\theta-\theta^2+\frac{1}{2}\theta^3)}{\theta^2}=2$$

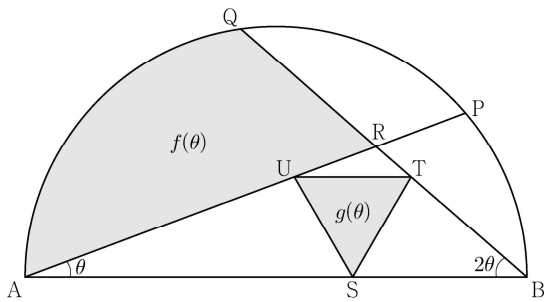
유형 05 삼각함수 도형의 활용

01 2022학년도 수능 29번 정답률 15%

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle PAB=\theta$, $\angle QBA=2\theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AP, BQ의 교점을 R라 하자.
선분 AB 위의 점 S, 선분 BR 위의 점 T, 선분 AR 위의 점 U를 신분 UT가 신분 AB에 평행하고 삼각형 STU가 정삼각형이 되도록 잡는다. 두 선분 AR, QR와 호 AQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 STU의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\frac{q}{p}\sqrt{3}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



정 답 11

해 설

이 문제는 221129이다. 최고난도문항으로 근사를 모른다면 사실 풀기가 매우 힘든 문제이니 근사로 빠르게 해결해보도록 하자.
우선 $f(\theta)$는 굉장히 복잡한 모양이다. 하지만 활꼴 제거 스킬인 BSA를 사용하면 $f(\theta)$는 $\triangle ARQ$의 넓이로 근사된다. (개념편 참조)

이때 $\triangle ABR$에서 θ비가 $1:2$ 라는 것을 확인할 수 있다.
따라서 RAA에 의해 변의 비는 $\overline{AR}:\overline{BR}=2:1$이며 변의 길이는

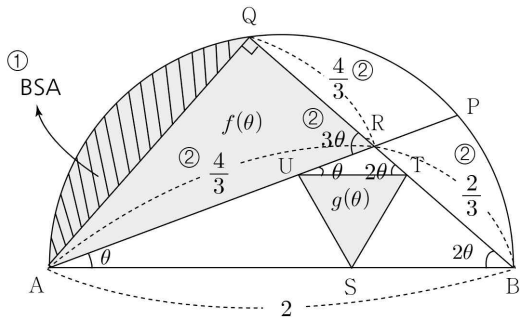
$\overline{AB}$의 길이비를 나누어가지므로 $\overline{AR}=\frac{4}{3}$, $\overline{BR}=\frac{2}{3}$이다.

$\overline{BQ}$는 기본근사에 의해 2이므로 $\overline{RQ}=\frac{4}{3}$이다.

또한 $\angle QRA=3\theta$이므로(내각의 성질)

따라서 $f(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 3\theta\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\theta$이다.

이제 메인인 $g(\theta)$를 구해보도록 하자
근사는 어떻게 될지를 사고하는 것도 중요하다.
θ가 0으로 가게 되면 점 U, T는 점 R로 모이게 될 것이다.
즉 정삼각형의 높이는 그냥 점 R에서 $\overline{AB}$로 내린 수선의 길이라는 것이다. 그럼 이러한 그림이 생길 것이다.



즉 이 그림에서 $a\to 0$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{2}k=b=\frac{4}{3}\theta$이다.

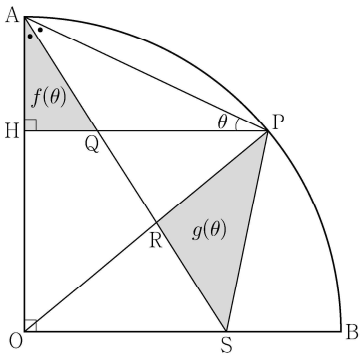
이제 $g(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{4}k^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\frac{8}{3\sqrt{3}})^2\theta=\frac{16}{27}\sqrt{3}\,\theta$이고,

답을 구해보면 $\lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{16}{27}\sqrt{3}\theta^2}{\theta\times\frac{8}{3}\theta}=\frac{9}{2}\sqrt{3}$에서 $p+q=11$이다.

02 2023학년도 6월 29번 정답률 19%

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle OAP$를 이등분하는 직선과 세 선분 HP, OP, OB의 교점을 각각 Q, R, S라 하자. $\angle APH=\theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PSR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta^3\times g(\theta)}{f(\theta)}=k$일 때, $100k$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



정 답 50

해 설

$g(\theta)$가 골치 아프게 있는 문제이다.

미지각이 나왔으니 **미지각 근사(UAA)**를 사용할 것이다.
우선 $\angle HAQ=\alpha$라 하면

$\triangle PAH$에서 $2\alpha+\theta=\frac{\pi}{2}$이므로 $\alpha\to\frac{\pi}{4}$이다.

$\triangle OAP$에서 $\angle AOP=\pi-4\alpha=2\theta$이다.

따라서 $\overline{AP}=2\theta$이다. 기본근사로 $\overline{AH}=2\theta^2$이고

α가 $\frac{\pi}{4}$로 가므로 $\triangle AHQ$는 직각이등변삼각형이다.

$\therefore f(\theta)=\frac{1}{2}\times 2\theta^2\times 2\theta^2=2\theta^4$이다.

한편 $\angle POB=\frac{\pi}{2}-2\theta$이다. $\angle SOR=\beta$라 하면

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$이므로 $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}$이다.

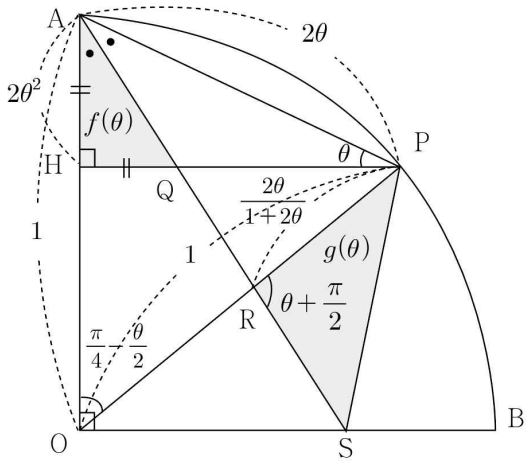
즉, $\beta\to\frac{\pi}{4}$이다.

즉, $\triangle OSA$는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{OS}=1$이다.
또한 각의 이등분선의 성질에 의해 $\overline{OR}:\overline{PR}=1:2\theta$이다.
즉, $\overline{RP}=\frac{2\theta}{1+2\theta}$이다.
이제 $\triangle OPS$에서 밑변 길이비가 넓이비이므로
$\triangle ORS:\triangle SRP$의 넓이비는 $1:2\theta$이다.

마지막으로
$g(\theta)=\frac{2\theta}{1+2\theta}\times\frac{1}{2}\times 1\times 1\simeq\theta$이다.

이제 극한값을 구하면 $\lim_{x\to 0}\frac{\theta^3\times\theta}{2\theta^4}=\frac{1}{2}$이다.

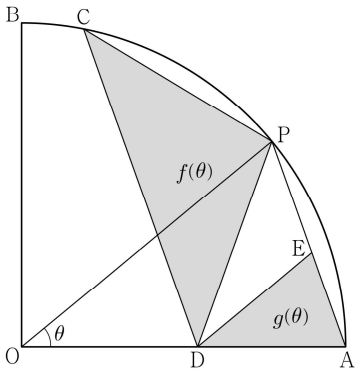
따라서 $100k=50$이다.



03 2023학년도 9월 28번 정답률 61%

28. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{PA}=\overline{PC}=\overline{PD}$가 되도록 호 PB 위에 점 C와 선분 OA 위에 점 D를 잡는다. 점 D를 지나고 선분 OP와 평행한 직선이 선분 PA와 만나는 점을 E라 하자. $\angle POA=\theta$일 때, 삼각형 CDP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 EDA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

정 답 ④

해 설

기본근사로 상황정리부터 시작하자

우선 $\overline{AP}=\theta$이다. $\angle OPA=\alpha$라 하면

$2\alpha+\theta=\frac{\pi}{2}$, $\alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$ (UAA)

$\overline{PA}=\overline{PD}$이므로 $\triangle PAD$는 이등변 삼각형이고

$\angle APD=\theta$이다. $\triangle PAD$에서 기본근사로 $\overline{AD}=\theta^2$

$\triangle AED$ 또한 이등변삼각형이므로 (UAA)

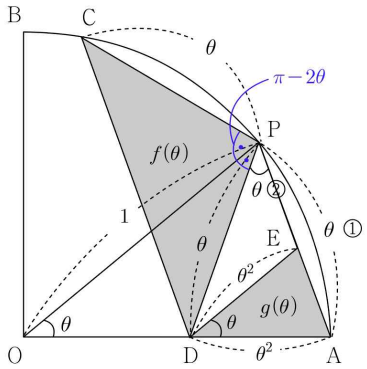
$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\theta\times\theta^2\times\theta^2=\frac{\theta^5}{2}$

이제 $\angle CPD$를 구하여주자

일단 $\angle OPC=\alpha$이다. $\angle OPD=\alpha-\theta$이므로

$\angle CPD=2\alpha-\theta=\pi-2\theta$

이를 나타내면



따라서

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times 2\theta\times\theta\times\theta=\theta^3$이므로 답을 구해주면

$\lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{\theta^5}{2}}{\theta^2\times\theta^3}=\frac{1}{2}$이다.

유형 06 합성함수의 미분법

01 2022학년도 수능 24번 정답률 76%

24. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x^3+x)=e^x$$

을 만족시킬 때, $f'(2)$의 값은? [3점]

① e ② $\frac{e}{2}$ ③ $\frac{e}{3}$ ④ $\frac{e}{4}$ ⑤ $\frac{e}{5}$

정 답 ④

해 설

주어진 등식의 양변을 x에 대해 미분하면

$(3x^2+1)\times f'(x^3+x)=e^x$ 입니다.

x에 1을 대입하면

$f'(2)=\frac{e}{4}$

유형 07 삼각함수의 미분법

01 2025학년도 9월 27번 정답률 79%

27. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)+f\left(\frac{1}{2}\sin x\right)=\sin x$$

를 만족시킬 때, $f'(\pi)$의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

정 답 ②

해 설

우리가 구하고자 하는 것은 $f'(\pi)$이므로, 우선 주어진 등식의 양변을 x에 대해 미분해야 합니다. 그래야만 $f'(x)$가 튀어나오기 때문입니다.

주어진 등식의 양변을 x에 대해 미분하면

$f'(x)+\left(\frac{1}{2}\cos x\right)\times f'\left(\frac{1}{2}\sin x\right)=\cos x$ 입니다.

위 등식에서 x에 π를 대입하면

$f'(\pi)=\frac{1}{2}f'(0)-1$ 입니다.

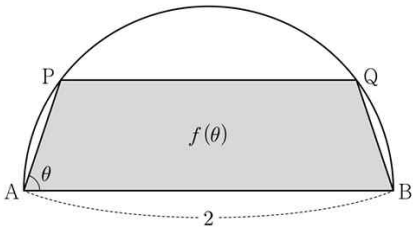
$f'(0)$의 값을 구하기 위해,
이번에는 x에 0을 대입하면

$f'(0)=\frac{2}{3}$입니다.

즉, $f'(\pi)=-\frac{2}{3}$

02 2026학년도 6월 27번 정답률 70%

27. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle BAP=\theta\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하고, 점 P를 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 ABQP의 넓이를 $f(\theta)$라 하고, $\overline{AP}:\overline{BP}=1:3$이 되도록 하는 θ의 값을 a라 할 때, $f'(a)$의 값은? [3점]



① $-\frac{64}{25}$ ② $-\frac{59}{25}$ ③ $-\frac{54}{25}$

④ $-\frac{49}{25}$ ⑤ $-\frac{44}{25}$

정 답 ③

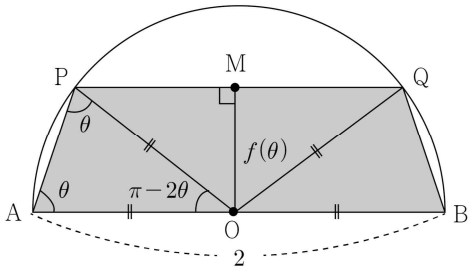
해 설

도형에서의 미분 문항에서는 문제에서 물어보는 함수를 도형에서 주어진 변수로 먼저 표현한 뒤, 미분은 나중에 하면 된다.

사각형 ABPQ는 사다리꼴이므로 밑변, 윗변과 높이를 구하자.

밑변의 길이는 2이다.

윗변의 길이를 구하기 위해, 반원의 중심을 O, 선분 PQ의 중점을 M이라 하자.



$\angle POM$는 $2\theta-\frac{\pi}{2}$이다. ($\because \angle POA=\angle QOB=\pi-2\theta$)

$\overline{PO}=1$이므로 $\overline{PM}=\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2\theta$이다.

따라서, $\overline{PQ}=-2\cos 2\theta$이다.

사다리꼴 ABPQ의 높이는 $\overline{OM}=\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2\theta$이다.

따라서, $f(\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta(2-2\cos 2\theta)$이다.

$\overline{AP}:\overline{BP}=1:3$이므로 $\cos a=\frac{1}{\sqrt{10}}$이다.

$f(\theta)$를 미분하면, $f'(\theta)=\cos 2\theta(2-2\cos 2\theta)+2\sin^2 2\theta$이다.

$f'(a)=\cos 2a(2-2\cos 2a)+2\sin^2 2a$이다.

$\sin 2a=2\sin a\cos a=\frac{3}{5}$, $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=-\frac{4}{5}$이다.

따라서, $f'(a)=-\frac{4}{5}\times\frac{18}{5}+2\left(\frac{3}{5}\right)^2=-\frac{54}{5}$이다.

유형 08 매개변수의 미분법

01 2022학년도 6월 24번 정답률 92%

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^t+\cos t,\quad y=\sin t$$

에서 $t=0$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

정 답 ②

해 설

매개변수 함수의 미분법에 의해, $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ 입니다.

즉, $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos t}{e^t-\sin t}$ 입니다.

따라서, $t=0$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은 1입니다.

02 2022학년도 9월 25번 정답률 92%

25. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^t-4e^{-t},\quad y=t+1$$

에서 $t=\ln 2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

정 답 ④

해 설

매개변수 함수의 미분법에 의해, $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ 입니다.

즉, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^t+4e^{-t}}$ 입니다.

따라서, $t=\ln 2$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은 $\frac{1}{4}$입니다.

03 2023학년도 6월 24번 정답률 87%

24. 곡선 $x^2-y\ln x+x=e$ 위의 점 (e, e^2)에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $e+1$ ② $e+2$ ③ $e+3$ ④ $2e+1$ ⑤ $2e+2$

정 답 ①

해 설

접선의 기울기를 알기 위해서는, $\frac{dy}{dx}$가 무엇인지를 알아내야 합니다. $\frac{dy}{dx}$가 나오도록 하기 위해, 주어진 등식의 양변을 x에 대해 미분하면 $2x-\frac{dy}{dx}\ln x-\frac{y}{x}+1=0$ 입니다.

즉, $\frac{dy}{dx}=\frac{2x^2+x-y}{x\ln x}$ 입니다.

따라서, 점 (e, e^2)에서의 접선의 기울기는 $e+1$입니다.

04 2024학년도 6월 24번 정답률 85%

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=\frac{5t}{t^2+1},\quad y=3\ln(t^2+1)$$

에서 $t=2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

정 답 ④

해 설

매개변수 함수의 미분법에 의해, $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ 입니다.

즉, $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{6t}{t^2+1}}{\frac{-5(t^2-1)}{(t^2+1)^2}}=\frac{6t(t^2+1)}{-5(t^2-1)}$

따라서, $t=2$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은 -4입니다.

05 2024학년도 9월 24번 정답률 85%

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=t+\cos 2t,\quad y=\sin^2 t$$

에서 $t=\frac{\pi}{4}$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

정 답 ①

해 설

매개변수 함수의 미분법에 의해, $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ 입니다.

즉, $\frac{dy}{dx}=\frac{2\sin t\cos t}{1-2\sin 2t}=\frac{2\sin 2t}{1-2\sin 2t}$입니다.

따라서, $t=\frac{\pi}{4}$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은 -2입니다.

06 2024학년도 수능 24번 정답률 86%

24. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x=\ln(t^3+1),\quad y=\sin \pi t$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}\pi$ ② $-\frac{2}{3}\pi$ ③ $-\pi$ ④ $-\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $-\frac{5}{3}\pi$

정 답 ②

해 설

매개변수 함수의 미분법에 의해, $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ 입니다.

즉, $\frac{dy}{dx}=\frac{\pi\cos \pi t}{\frac{3t^2}{t^3+1}}=\frac{\pi(t^3+1)\cos \pi t}{3t^2}$ 입니다.

따라서, $t=1$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은 $-\frac{2}{3}\pi$입니다.

유형 09 음함수의 미분법

01 2022학년도 6월 30번 정답률 12%

30. $t > \frac{1}{2}\ln 2$인 실수 t에 대하여 곡선 $y = \ln(1 + e^{2x} - e^{-2t})$과 직선 $y = x + t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2) = \frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정 답 11

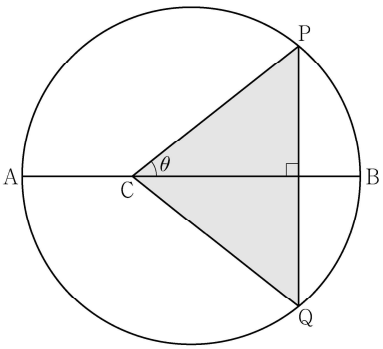
해 설

220630이다. 30번치고는 어렵지 않은 난이도에
전형적인 문제이니 쫄지 말고 해결하자
우선 α, β로 음함수 미분을 하는 풀이는 많이 보았을테니
생략하도록 하겠다.
그렇다면 어떻게 해결할 수 있을까?
우선 식을 그대로 따라가면
$\ln(1 + e^{2x} - e^{-2x}) = x + t$ 라는 식이 등장한다.
양 변에 로그를벗겨주면
$1 + e^{2x} - e^{-2x} = e^{x+t}$
이제 식 변형을 해줄 것이다.
$(e^z + e^{-t})(e^x - e^{-t}) - e^t(e^x - e^{-t}) = 0$
$\therefore (e^x + e^{-t})(e^x + e^{-t} - e^t) = 0$
따라서 $x = -t$ or $x = \ln(e^t - e^{-t})$
이제 $f(t)$의 정의에 따라
$f(t) = \sqrt{2}\ln(e^t - e^{-t}) + t$
$\therefore f'(t) = \sqrt{2}\left(\frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} + 1\right)$
$f'(2) = \frac{8}{3}\ln 2$
$\therefore p + q = 11$

간단하게 해결가능하다

02 2024학년도 9월 30번 정답률 16%

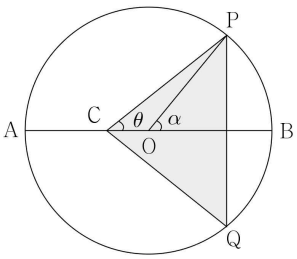
30. 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 원과 선분 AB 위에 $\overline{AC}=4$인 점 C가 있다. 이 원 위의 점 P를 $\angle PCB=\theta$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 삼각형 PCQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $-7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



정 답 32

해 설

다음 그림과 같이 보조선을 긋도록 하자



그럼 $S(\theta)=2\times\frac{1}{2}\times 5\sin\alpha(1+5\cos\alpha)$

이제 θ와 α의 관계식만 구하면 문제가 끝이난다.

$\tan\theta=\frac{5\sin\alpha}{1+5\sin\alpha}$이다.

두 식을 미분하면

$S'(\theta)=(25\cos^2\alpha-25\sin^2\alpha+5\cos\alpha)\times\frac{d\alpha}{d\theta}$

$\sec^2\theta=\frac{5\cos\alpha+25}{(1+5\cos\alpha)^2}\frac{d\alpha}{d\theta}$

$\theta=\frac{\pi}{4}$에서 $S'(\frac{\pi}{4})=-\frac{32}{7}$이므로 $\therefore -7S'(\frac{\pi}{4})=32$이다.

번호에 쫄지 말자.

03 2025학년도 6월 24번 정답률 87%

24. 곡선 $x\sin 2y+3x=3$ 위의 점 $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

정 답 ③

해 설

접선의 기울기를 알기 위해서는, $\frac{dy}{dx}$가 무엇인지를 알아내야 합니다. $\frac{dy}{dx}$가 나오도록 하기 위해, 주어진 등식의 양변을 x에 대해 미분하면 $\sin 2y+2x\frac{dy}{dx}\cos 2y+3=0$ 입니다.

즉, $\frac{dy}{dx}=-\frac{\sin 2y+3}{2x\cos 2y}$ 입니다.

따라서, 점 $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{3}{2}$입니다.

04 2026학년도 6월 24번 정답률 89%

24. 곡선 $3x+y+\cos(xy)=2$ 위의 점 $(0,1)$에서의 접선의 x 절편은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

정 답 ②

해 설

음함수의 미분법을 이용하여 곡선을 미분하자.

$3dx+dy-ysin(xy)dx-xsin(xy)dy=0$이다.

$x=0,\ y=1$을 대입하면 $3dx+dy=0,\ \frac{dy}{dx}=-3$이다.

따라서, 접선의 방정식은 $y=-3x+1$이다.

x절편은 $\frac{1}{3}$이다.

유형 10 역함수의 미분법

01 2023학년도 6월 25번 정답률 84%

25. 함수 $f(x)=x^3+2x+3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

정 답 ②

해 설

$f(g(x))=x$입니다. 따라서, 양변을 x에 대해 미분한 후에 정리하면, $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$ 입니다.

따라서, $g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}$ 입니다.

$g(3)=u$라 하면, $f(u)=3$ 이므로

$u^3+2u+3=3$, 즉 $u^3+2u=u(u^2+2)=0$

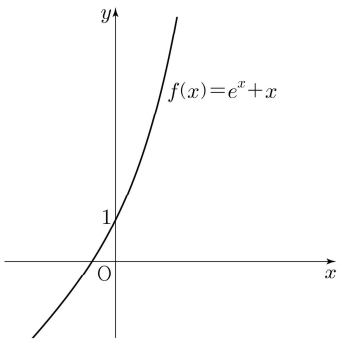
따라서, $u=0$입니다.

$g'(3)=\frac{1}{f'(0)}$이고, $f'(x)=3x^2+2$이므로

$g'(3)=\frac{1}{2}$입니다.

02 2023학년도 9월 29번 정답률 22%

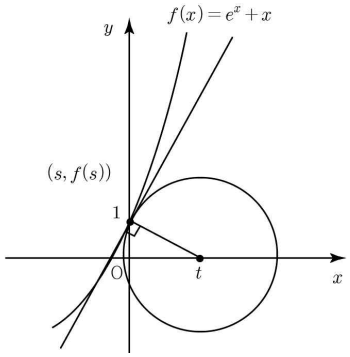
29. 함수 $f(x)=e^x+x$가 있다. 양수 t에 대하여 점 $(t, 0)$과 점 $(x, f(x))$ 사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 $f(s)$의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하시오. [4점]



정 답 3

해 설

거리가 최소이므로 다음 그림과 같이 그려보도록 하자



이때 수직인 직선에 대한 기울기 곱은 -1이므로

$f'(s)\times\frac{f(s)}{s-t}=-1$

$\therefore (e^s+s)(e^s+1)=t-s$

양 변을 t에 대해 미분하면

$2e^{2s}\frac{ds}{dt}+(s+2)e^s\frac{ds}{dt}+\frac{ds}{dt}=1-\frac{ds}{dt}$이고

$\therefore \frac{ds}{dt}=\frac{1}{2e^{2s}+(s+2)e^s+2}$

이때 $h'(1)=\frac{1}{g'(h(1))}=\frac{1}{f'(0)\frac{ds}{dt}}$이다.

$f'(0)=2$, $s=0$일 때 $\frac{ds}{dt}=\frac{1}{6}$

$h'(1)=3$

03 2025학년도 수능 27번 정답률 48%

27. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(e^x)+e^x$$

이라 하자. 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0, g(0))$에서의 접선이 x축이고 함수 $g(x)$가 역함수 $h(x)$를 가질 때, $h'(8)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{36}$ ② $\frac{1}{18}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{5}{36}$

정 답 ①

해 설

우선 식이 복잡하니 함수를 재정의하면
$P(x)=f(x)+x$이다.
$g'(x)=f'(e^x)e^x+e^x$
$g'(0)=f'(1)+1$이고 접선이 x축이므로
$f'(1)=-1, f(1)=-1$이다.

따라서 $P(1)=0, P'(1)=0$이므로
$P(x)=(x-1)^3$
$\therefore g(x)=(e^x-1)^3=8 \quad e^x=3, x=\ln 3$
$g'(x)=3e^x(e^x-1)^2, g'(\ln 3)=3\times 3\times 4=36$
$h'(8)=\frac{1}{g'(\ln 3)}=\frac{1}{36}$

04 2026학년도 6월 26번 정답률 83%

26. 함수 $f(x)=e^{3x}-3e^{2x}+4e^x$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $g'(a)=\frac{1}{8}$이 되도록 하는 실수 a에 대하여 $a+f'(g(a))$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

정 답 ②

해 설

$g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 $f(g(x))=x$이다.
양변을 미분하면, $f'(g(x))g'(x)=1$이다.
$x=a$를 대입하면, $f'(g(a))g'(a)=1$이므로 $f'(g(a))=8$이다.
$f'(x)=3e^{3x}-6e^{2x}+4e^x$이다.
$f'(x)=8$의 근은 $3e^{3x}-6e^{2x}+4e^x-8=0$이다.
인수분해하면, $(3e^{2x}+4)(e^x-2)=0$이다.
이를 만족하는 실근은 $x=\ln 2$뿐이고, $g(a)=\ln 2$이다.
따라서, $f(\ln 2)=a$이고, $a=4$이다.
$a+f'(g(a))=4+8=12$이다.

05 2026학년도 9월 27번 정답률 79%

27. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.
함수 $f(x^3+x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,
$f(2)=1$, $f'(2)=8g'(1)-1$이다. $g(1)+g'(1)$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

정 답 ①

해 설

$f(x^3+x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(f(x^3+x))=x$이다.
(이 식을 헷갈리지 않게 반드시 잘 기억해야 한다.)
$f(2)=1$이므로 $x=1$일 때 $g(f(2))=g(1)=1$이다.
$g(f(x^3+x))=x$에서 양변을 미분하면,
$g'(f(x^3+x))f'(x^3+x)(3x^2+1)=1$이다.
양변에 $x=1$을 대입하자.
$4g'(f(2))f'(2)=4g'(1)f'(2)=1$이다.
$f'(2)=8g'(1)-1$을 대입하면, $4g'(1)(8g'(1)-1)=1$이다.
따라서, $g'(1)=\frac{1}{4}$이다.
$g(1)+g'(1)=\frac{5}{4}$이다.

유형 11 접선의 방정식

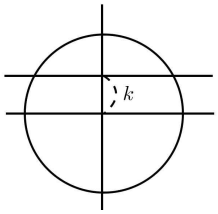
01 2024학년도 6월 29번 정답률 23%

29. 세 실수 a, b, k에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(a, a+k)$, $\mathrm{B}(b, b+k)$가 곡선 $C: x^2-2xy+2y^2=15$ 위에 있다. 곡선 C 위의 점 A에서의 접선과 곡선 C 위의 점 B에서의 접선이 서로 수직일 때, k^2의 값을 구하시오. (단, $a+2k\neq 0$, $b+2k\neq 0$) [4점]

정 답 5

해 설

우선 노가다 풀이는 많이 보았을 테니 기하적 풀이를 소개하겠다.
우선 곡선 C: $(x-y)^2+y^2=15$이고 $x-y=t$라 하면
$C: t^2+y^2=15$, $t=k$이다.
즉 구하는 값은 다음 원과 직선의 교점이고 나타내면



따라서 t축은 본래 $y=x$이므로 구하는 기울기를 m이라하면
$(1+m)(1-m)=-1$이므로
$m=\sqrt{2}$축의 변형을 생각하여 k를 구하면 $k=\sqrt{5}$이다.

천천히 읽어보면 좋을 것 같다.
시험장에서 쓰기는 어려울 수 있으나 참고하면 좋다.

02 2025학년도 수능 27번 정답률 39%

27. 실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=\frac{1}{e^x}+e^t$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(a)=-e\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 a에 대하여 $f'(a)$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$ ② $-\frac{1}{2}e\sqrt{e}$ ③ $-\frac{2}{3}e\sqrt{e}$
④ $-\frac{5}{6}e\sqrt{e}$ ⑤ $-e\sqrt{e}$

정 답 ①

해 설

$y=e^{-x}+e^t$이므로 $y'=-e^{-x}$이다.
접점의 좌표를 $(s, e^{-s}+e^t)$이라고 하면 접선의 방정식은
$y=-e^{-s}(x-s)+e^{-s}+e^t$
이 접선이 원점을 지나므로
$se^{-s}+e^{-s}+e^t=0$
$e^t=-(s+1)e^{-s}$ … ㉠
양변을 s에 대하여 미분하면
$e^t\frac{dt}{ds}=-e^{-s}+(s+1)e^{-s}=se^{-s}$ … ㉡
또한 $f(t)=-e^{-s}$이므로 양변을 s에 대하여 미분하면
$f'(t)\frac{dt}{ds}=e^{-s}$ … ㉢
㉡, ㉢에서
$\frac{e^t}{f'(t)}=s$, 즉, $f'(t)=\frac{e^t}{s}$
또한 $f(a)=-e^{-s}=-e\sqrt{e}=-e^{\frac{3}{2}}$에서 $s=-\frac{3}{2}$이고
㉠에서 $e^a=\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}$이므로 $f'(t)=\frac{e^t}{s}$에서

$$f'(a)=\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$$

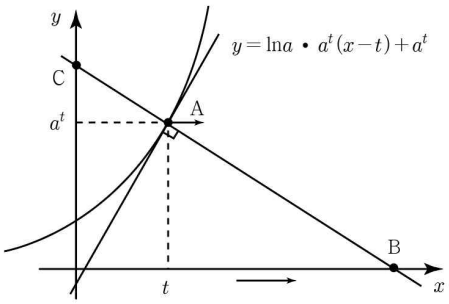
03 2025학년도 6월 27번 정답률 39%

27. 상수 $a\,(a>1)$과 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 곡선 $y=a^x$ 위의 점 $\mathrm{A}(t,\,a^t)$에서의 접선을 l이라 하자. 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B, y축과 만나는 점을 C라 하자. $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$의 값이 $t=1$에서 최대일 때, a의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{e}$ ③ 2 ④ $\sqrt{2e}$ ⑤ e

정 답 ②

해 설 조건에 맞게 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 주어진 접선에 수직인 직선의 식을 구하면

$y=-\dfrac{1}{\ln a \cdot a^t}(x-t)+a^t$이다.

따라서 $\mathrm{B}(a^{2t}\ln a+t,\,0)$, $\mathrm{C}\,(0,a^t+\dfrac{t}{a^t\ln a})$이다.

여기서 $(t,0)$를 A′이라고 하자

$\triangle \mathrm{OBC}$, $\triangle \mathrm{BAA'}$은 닮음이므로 $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{A'O}}}{\overline{\mathrm{A'B}}}=\dfrac{t}{a^{2t}\ln a}$

$f(t)=\dfrac{t}{a^{2t}\ln a}$

$f'(t)$에서 부호에 관여하는 항은 분자이므로

$a^{2t}-t\times 2\ln a a^{2t}=0$인 t에서 부호가 바뀐다.

극대인 t값은 $\dfrac{1}{2\ln a}$이 값이 1이므로 $a=e^{\frac{1}{2}}$이다.

04 2025학년도 9월 24번 정답률 91%

24. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{t}+4e^{2t}$이다. $f(1)=2e^2+1$일 때, $f(e)$의 값은? [3점]

① $2e^{2e}-1$ ② $2e^{2e}$ ③ $2e^{2e}+1$
④ $2e^{2e}+2$ ⑤ $2e^{2e}+3$

정 답 ④

해 설

$f'(t)=\frac{1}{t}+4e^{2t}$ 입니다.
양변을 t에 대해 적분하면,
$f(t)=\ln t+2e^{2t}+C$ (단, C는 적분상수)입니다.

$f(1)=2e^2+C=2e^2+1$ 이므로 $C=1$ 입니다.

따라서, $f(e)=2e^{2e}+2$ 입니다.

05 2025학년도 수능 28번 정답률 31%

28. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=-x+e^{1-x^2}$$

이다. 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(t)$라 하자. $g(1)+g'(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}e+\frac{5}{6}$
④ $\frac{2}{3}e+\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}e+\frac{2}{3}$

정 답 ②

해 설

$x>0$에서 $f''(x)=-1-2xe^{1-x^2}<0$이므로
따라서 곡선 $y=f(x)$는 $x>0$에서 위로 볼록이다.
따라서 양수 t에 대하여 점 $(t, f(t))$에서의 접선과
곡선 $y=f(x)$ $(x>0)$의 교점은 점 $(t, f(t))$ 하나이고,
접선은 곡선의 위쪽에 위치한다.
점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$에 대하여 $g(t)=\int_0^t\{f'(t)(x-t)+f(t)-f(x)\}dx$

이때 $f'(x)=-x+e^{1-x^2}$에서 양변에 x를 곱하면

$xf'(x)=-x^2+xe^{1-x^2}$

$\int xf'(x)dx=\int\left(-x^2+xe^{1-x^2}\right)dx$

$xf(x)-\int f(x)dx=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}e^{1-x^2}$

$\int f(x)dx=xf(x)+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}e^{1-x^2}$

$g(t)=\left[\frac{f'(t)}{2}x^2-tf'(t)x+f(t)x\right]_0^t-\int_0^t f(x)dx$

$=\frac{1}{2}t^2f'(t)-t^2f'(t)-\left(tf(t)+\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}e^{1-t^2}-\frac{1}{2}e\right)$

$=-\frac{1}{2}t^2(-t+e^{1-t^2})-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}e^{1-t^2}+\frac{1}{2}e$

$=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}(t^2+1)e^{1-t^2}+\frac{1}{2}e$

$g'(t)=\frac{1}{2}t^2+t^3e^{1-t^2}$

따라서

$g(1)+g'(1)=\left(-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}e\right)+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}$

06 2026학년도 수능 27번 정답률 54%

27. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^{4t}(1+\sin^2\pi t),\quad y=e^{4t}(1-3\cos^2\pi t)$$

를 C라 하자. 곡선 C가 직선 $y=3x-5e$와 만나는 점을 P라 할 때, 곡선 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{3\pi-4}{\pi+4}$ ② $\frac{3\pi-2}{\pi+6}$ ③ $\frac{3\pi}{\pi+8}$

④ $\frac{3\pi+2}{\pi+10}$ ⑤ $\frac{3\pi+4}{\pi+12}$

정 답 ②

해 설

곡선 C가 직선 $y=3x-5e$와 만나는 점의 좌표를 구하자.

$e^{4t}(1-3\cos^2\pi t)=3e^{4t}(1+\sin^2\pi t)-5e$이다.

$5e=e^{4t}(2+3\cos^2\pi t+3\sin^2\pi t)=5e^{4t}$, $t=\frac{1}{4}$이다.

접선의 기울기는

$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^{4t}(6\pi\sin\pi t\cos\pi t)+4e^{4t}(1-3\cos^2\pi t)}{e^{4t}(2\pi\sin\pi t\cos\pi t)+4e^{4t}(1+\sin^2\pi t)}$ 이다.

$t=\frac{1}{4}$를 대입하면, $\frac{3\pi-2}{\pi+6}$이다.

유형 12 함수의 극대와 극소

01 2022학년도 수능 28번 정답률 26%

28. 함수 $f(x)=6\pi(x-1)^2$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$$

라 하자. $0<x<2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

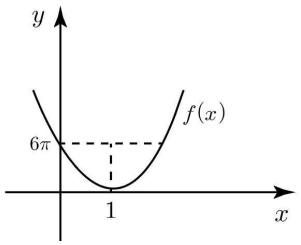
정 답 ②

해 설

우선 극대, 극소 문제이므로 $g(x)$를 미분하여 도함수근을 찾으면 다음과 같다.

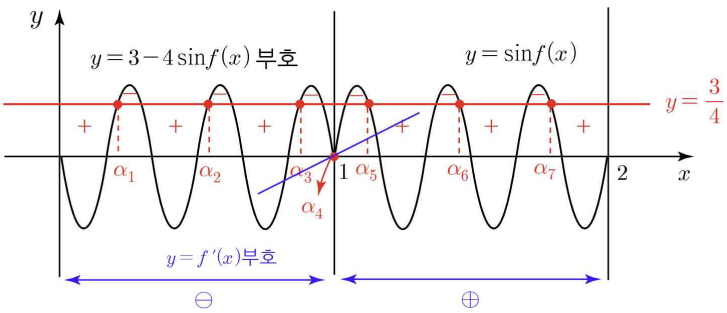
$g'(x)=3f'(x)-4f'(x)\sin f(x)=f'(x)\{3-4\sin f(x)\}=0$

$f'(x)=0$ 또는 $\sin f(x)=\frac{3}{4}$이다.



다음과 같으므로 우선 $x=1$에서 $g(x)$는 극값을 갖는다.

이제 N축을 사용하여 $g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 근의 개수는 7개이다.

유형 13 방정식의 실근의 개수

01 2022학년도 6월 27번 정답률 71%

27. 두 함수

$$f(x)=e^x,\quad g(x)=k\sin x$$

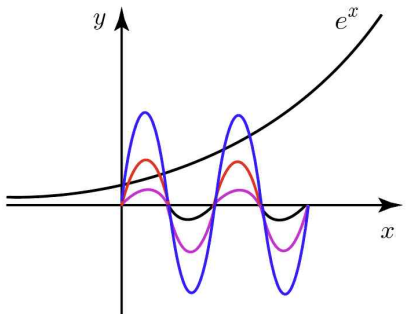
에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 때, 양수 k의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}}$ ② $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}}$ ③ $\sqrt{2}e^{2\pi}$
④ $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$ ⑤ $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{2}}$

정 답 ④

해 설

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 서로 다른 교점이 3개라고 해석할 수 있습니다.
지수함수와 삼각함수가 함께 있는 방정식은 일반적으로 풀 수 없기 때문에, 그래프 풀이 관점으로 바라봐야 합니다.



아직 k값이 정해지지 않았으므로
sin함수 그래프를 하나 그려놓고 k값을 크게, 작게 해보며 그래프가 어떻게 변하는지를 살펴봅니다.

지금, 파란색 그래프의 경우에 교점이 3개 생기는 것을 알 수 있습니다. 어떤 양수 t에 대하여, 두 그래프가 접하는 지점이 $x=t$ 위에 존재합니다.

즉, 2개의 관계식을 세울 수 있습니다.

$e^t=k\sin t$ … ① (함숫값이 같다.)
$e^t=k\cos t$ … ② (접선의 기울기가 같다.)

두 관계식을 연립하면, $\sin t=\cos t$ 입니다.
이때, 접점의 x좌표는 2π와 $\frac{5}{2}\pi$ 사이에 존재하므로
$t=\frac{9}{4}\pi$ 입니다.

관계식 $e^t=k\sin t$ … ① 에
$t=\frac{9}{4}\pi$를 대입하면 $e^{\frac{9}{4}\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}k$
$\therefore k=\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}$

02 2023학년도 6월 28번 정답률 47%

28. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}\ln|f(x)| & (f(x)\neq 0)\\ 1 & (f(x)=0)\end{cases}$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극솟값은? [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.

(나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고,
함수 $|g(x)|$는 $x=2$에서 극소이다.

(다) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① $\ln\frac{13}{27}$ ② $\ln\frac{16}{27}$ ③ $\ln\frac{19}{27}$ ④ $\ln\frac{22}{27}$ ⑤ $\ln\frac{25}{27}$

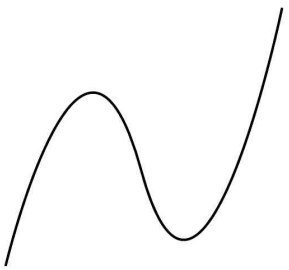
정 답 ⑤

해 설

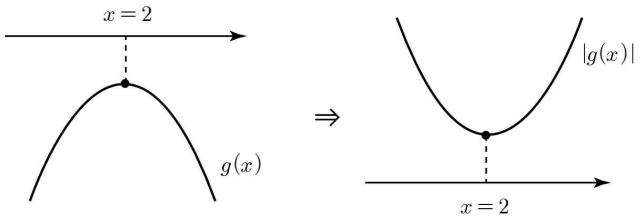
230628이다. 너무 전형적인 유형이라 28번임에도
정답률이 47%이다. 천천히 따라가보자.

우선 $f(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수이므로

개형은 다음과 같다.



이때 (나) 조건을 통해 $g(x)$가 다음과 같음을 알 수 있다.



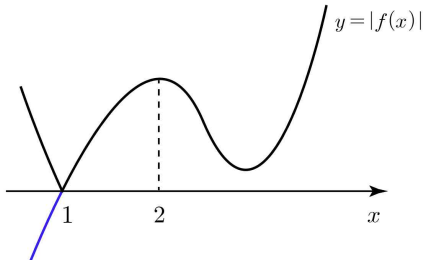
즉 $g(2)<0,\ g'(2)=0$

이때 $g'(x)=\begin{cases}\frac{f'(x)}{f(x)} & (f(x)\neq 0)\\ 0 & (f(x)=0)\end{cases}$ 이므로

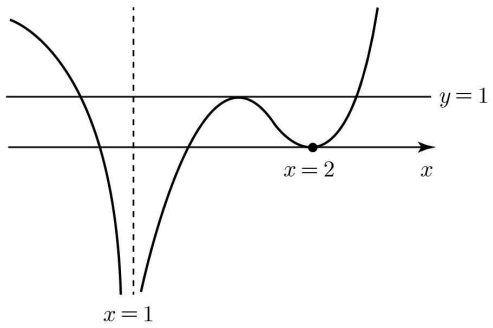
$g'(2)=\frac{f'(2)}{f(2)}=0$이므로 $f'(2)=0$ 이다.

(가)조건에 의해 $f(1)=0$이므로 $g(1)=1$이다.

따라서 $|f(x)|$의 그래프는 다음과 같고,



$g(x)$의 그래프 또한 결정할 수 있다.



한편 $f(x)$의 식을 구해보면

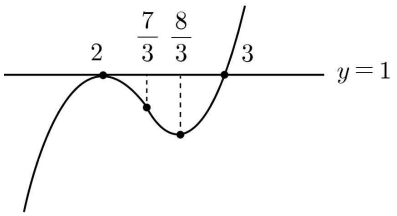
$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^3+k(x-2)^2+1$이고

$\because f(2)=1, f'(2)=0$

$f(1)=-\frac{1}{2}+k+1=0,\ k=-\frac{1}{2}$

이제 구하는 값인 극솟값을 구해주도록하자

$f(x)$의 그래프는 다음과 같고



따라서 $g(x)$는 $x=\frac{8}{3}$에서 극소를 가지므로

$g(\frac{8}{3})=\ln\frac{25}{27}$이다.

03 2023학년도 6월 30번 정답률 12%

30. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}$$

이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$$

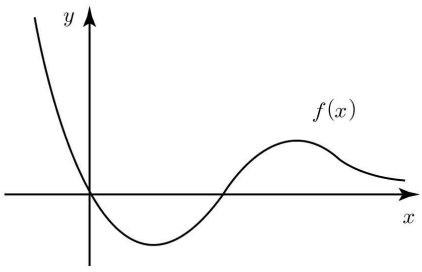
의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.

$g(5)+\lim_{t\to 5} g(t)=5$일 때, $\lim_{t\to k-} g(t)\neq \lim_{t\to k+} g(t)$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

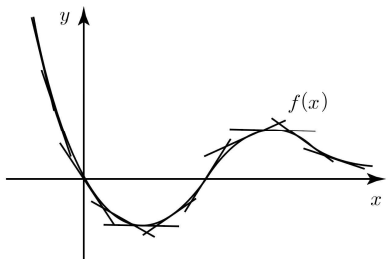
정 답 16

해 설

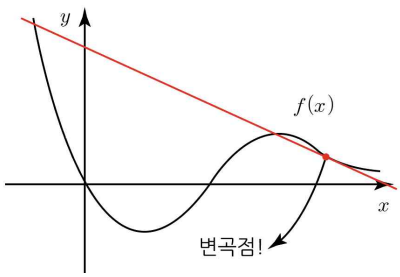
대표적인 킬러문항이다. 하지만 문제를 풀다보면 감동을 받을 포인트가 존재하는 문제이니 한 번 같이 보도록 하자.
우선 문제의 그래프의 개형을 대략 그릴 수 있으니 그려보면 다음과 같다.



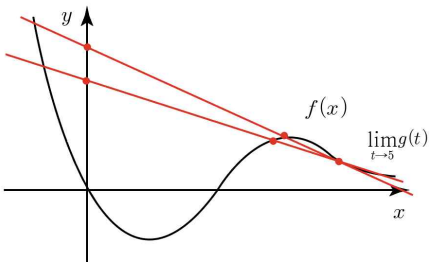
이제 주어진 방정식을 해석하도록 하자.
주어진 방정식은 $f(x)$의 한 점 $(t, f(t))$에서의 접선과 $f(x)$의 교점의 개수를 $g(t)$로 정의한다는 내용이다.
이제 해석이 끝났으니 조건식을 살펴보면
$g(5)+\lim_{t\to 5} g(t)=5$하는 식이 보인다.
주어진 조건식을 만족하는 t는 일반적인 값은 아닐 것이다.
즉 극점, 변곡점, 실근과 같은 특수점일 확률이 매우 높다.
이것은 매우 합리적인 추론이다.
접선과의 교점 개수이므로 다음과 같이 접선을 머릿속에서 계속 그리며 t를 증가시켜보도록 하자.



이렇게 극단적으로 작은 t부터 점점 t값을 키워나가며 접선과 곡선의 교점 개수를 확인하여보면 변곡점에서 조건을 만족함을 알 수 있다.



우선 변곡점에서 $g(t)$의 값은 교점개수가 2개이므로 2이다.



그리고 $\lim_{t\to 5^-} g(t)=3$이고 $\lim_{t\to 5^+} g(t)=3$이므로 $\lim_{t\to 5} g(t)=3$이다. 따라서 조건식을 만족한다.
이제 다음 조건을 확인하여보면 좌극한과 우극한이 다른 식의 값을 구하라는 조건이 있으니 아까와 같이 접선을 계속 그려보며 판단하여 보면 극대와 극소에서 다르다는 것을 알 수 있다.
우선 극값의 x값을 구하기 위해 $f(x)$를 구해야한다.
변곡점 좌표가 5이므로 $f''(x)$를 구하면
$f''(x)=(x^2-(a+4)x+2a+2)e^{-x}$이고
$x=5$를 대입해서 a를 구하면 $a=\frac{7}{3}$이다.
따라서 $f'(x)=-(x^2-\frac{13}{3}x+\frac{7}{3})e^{-x}$에서
극소와 극대의 x값의 합은 $\frac{13}{3}$

PART 3
적분

개념 유형

(1) 여러 가지 적분법
(2) 정적분의 활용
(3) 적분법과 적분 함수 추론(심화)
+적분 퍼즐 공략

기출 유형

(1) 적분법
(2) 부분적분법
(3) 정적분과 급수의 관계
(4) 치환적분법
(5) 입체도형의 부피
(6) 정적분과 곡선의 길이
(7) 적분 퍼즐(심화)
(8) 함수추론

THEME

1 여러 가지 적분법

정리1 간단한 함수의 적분법

개념1 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 적분

① $n\neq -1$일 때, $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (단, C는 적분상수)

② $n=1$일 때, $\int x^{-1}dx=\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

예시

(1) $\int x^{-2}dx=\frac{1}{(-2)+1}x^{(-2)+1}+C=-\frac{1}{x}+C$

(2) $\int_1^e \frac{1}{x}dx=[\ln|x|]_1^e=\ln e-\ln 1=1$

개념2 지수함수의 적분

① $\int e^x dx=e^x+C$

② $a>0$, $a\neq 1$일 때, $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$

예시

(1) $\int_0^1 e^x dx=[e^x]_0^1=e-1$

(2) $\int_0^1 2^x dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1=\frac{2}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}$

개념3 삼각함수의 적분

① $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$

② $\int \cos x\,dx=\sin x+C$

③ $\int \sec^2 x dx=\tan x+C$

④ $\int \csc^2 x dx=-\cot x+C$

예제1 여러 가지 함수의 적분법

$\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx$의 값은?

해설

$\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx=\int_0^1 \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x+1}dx=\int_0^1 (e^x-1)dx$

$=[e^x-x]_0^1=(e-1)-(1-0)=e-2$이다.

정리2 치환적분법

개념1 치환적분법

미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$일 때,

함수 $f(t)$가 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면 $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_\alpha^\beta f(t)dt$이다.

즉, $\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$ 이다.

TIP 특수 적분

① $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$

② $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$

예시 $\int_0^1 2xe^{x^2}dx$의 값은?

$x^2=t$로 놓으면 $x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$이고, $2x=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int_0^1 2xe^{x^2}dx=\int_0^1 e^t dt=[e^t]_0^1=e-1$이다.

예제2 치환적분법

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\cos x dx$의 값은?

해설

$\sin x=t$로 놓으면 $x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{6}$일 때 $t=\frac{1}{2}$

이고, $\cos x=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\cos x\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}} t^2 dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{24}$

정리3 부분적분법

개념1 부분적분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고, $f'(x)$, $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$이다.

TIP 함수 설정

두 함수의 곱으로 이루어진 함수를 부분적분법을 이용하여 적분할 때, 미분하면 간단해지는 함수를 $f(x)$로 놓고, 적분하기 쉬운 함수를 $g'(x)$로 놓는다.

★ **'로다삼지' 4글자를 암기하자. 미분할 함수를 정할 때, '로다삼지' 순서로 우선순위를 두면 된다.**

로그함수 다항함수 삼각함수 지수함수

$f(x)$ $g'(x)$

예시 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$의 값은?

x는 다항함수이고, $\sin x$는 삼각함수이므로 $f(x) = x$, $g'(x) = \sin x$로 놓으면, $f'(x) = 1$, $g(x) = -\cos x$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)dx = 0 + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

예제3 부분적분법

$\int_0^1 (x+1)e^x dx$의 값은?

해설

$x+1$은 다항함수이고, e^x는 지수함수이므로

$f(x) = x+1$, $g'(x) = e^x$으로 놓으면

$f'(x) = 1$, $g(x) = e^x$이므로

$\int_0^1 (x+1)e^x dx = [(x+1)e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 2e - 1 - [e^x]_0^1$

$= 2e - 1 - (e-1) = e$이다.

정리4 정적분으로 표시된 함수의 미분과 극한

개념1 정적분으로 표시된 함수의 미분

연속함수 $f(x)$에 대하여

① $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$ (단, a는 상수)

② $\frac{d}{dx}\int_x^{x+a} f(t)dt = f(x+a)-f(x)$ (단, a는 상수)

③ 두 함수 $g(x)$, $h(x)$가 미분가능 할 때, $\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = f(h(x))h'(x)-f(g(x))g'(x)$이다.

예시

(1) $\frac{d}{dx}\int_a^x 2^t dt = 2^x$ (2) $\frac{d}{dx}\int_x^{x+a} \sin t\,dt = \sin(x+a)-\sin x$

(3) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^2+1} \ln t\,dt = \ln(x^2+1)\times(x^2+1)'-\ln x^2\times(x^2)' = 2x\ln(x^2+1)-2x\ln x^2 = 2x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

개념2 정적분으로 표시된 함수의 극한

연속함수 $f(x)$에 대하여

① $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{a+x} f(t)dt = f(a)$ (단, a는 상수)

② $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt = f(a)$ (단, a는 상수)

예제4 정적분으로 표시된 함수의 미분과 극한

함수 $f(x)=\int_x^{x^2} e^t(\sin t+\cos t)dt$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$의 값은?

해설

$f(0)=\int_0^0 e^t(\sin t+\cos t)dt = 0$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=f'(0)$

$f(x)=\int_x^{x^2} e^t(\sin t+\cos t)dt$의 양변을 x에 대해서 미분하면

$f'(x)=2xe^{x^2}(\sin x^2+\cos x^2)-e^x(\sin x+\cos x)$

따라서 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=f'(0)=-1$이다.

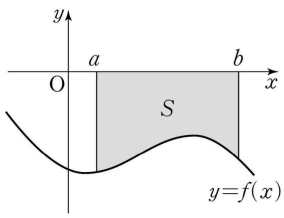
THEME

2 정적분의 활용

정리1 정적분과 급수

개념1 정적분과 급수 '유도 必 암기'

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(a+\frac{b-a}{n}k)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$이다.



★ 다음 내용은 매우 중요한 내용이기에, 꼭 읽어보자.

- $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(a+\frac{b-a}{n}k)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$를 이해해 보자.

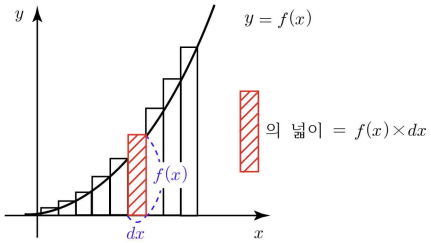
우선, 적분 기호들에 대해 상세히 알아야 한다. 기본부터 시작해, 하나하나씩 추가해보며
우리가 평소에 무심코 지나쳤던 $\int_a^b f(x)dx$가 의미하는 바가 무엇인지 알아보자.

$\int$ 기호는 합을 뜻하는 라틴어 'Summa'의 첫 글자 S를 길게 늘여 쓴 것이다.

$\int_a^b$가 의미하는 바는, 'a에서 b까지' '더한다'이다. 이는 충분히 혼자서도 직관적으로 추측할 수 있어 문제될 것이 없다.

그렇다면, $\int_a^b f(x)dx$는 무엇을 의미할까? 왜 dx가 붙는걸까?
답은 구분구적법에 있다.

세로의 길이는 함숫값에 해당하므로 $f(x)$라 둘 수 있고,
가로의 길이 Δx(구간을 등간격으로 쪼갠 길이)를 '매우 잘게' 쪼개게 되면
x의 무한소(일반적으로 모든 양수보다 작지만 0보다는 큰 상태),
즉 dx로 표현할 수 있다.



<구분구적법>

따라서, $\int_a^b f(x)dx$는, 위 그림에서처럼 각 직사각형의 넓이를 $x=a \sim x=b$ 구간에서 스캔하듯이 진행하며 모두 더한다는 것을 의미한다.

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(a+\frac{b-a}{n}k)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$의 좌변에서 등장하는 k는, 'n등분한 구간의 k번째 x좌표'임을 의미한다.

지금까지 설명한 내용들은 뒤에 나올 '곡선과 y축 사이의 넓이'를 이해하는데 있어서 중요한 논리로 작용하므로 꼭 알고 있어야 한다.
또한 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(a+\frac{b-a}{n}k)\cdot\frac{b-a}{n}$ 꼴이 나오면, 우선 구분구적법 그래프를 연상해야 한다는 것도 추가로 기억하자.

TIP 심화

① $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$ (좌변 해석: 0에서 1까지, 1만큼의 거리를 n등분한 후, 이를 해당하는 함숫값(세로의 길이)와 곱하였다.)

② $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{p}{n}k)\frac{p}{n}=\int_0^p f(x)dx$ (좌변 해석: 0에서 p까지, p만큼의 거리를 n등분한 후, 이를 해당하는 함숫값(세로의 길이)와 곱하였다.)

③ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(a+\frac{p}{n}k)\frac{p}{n}=\int_a^{a+p} f(x)dx=\int_0^p f(a+x)dx=p\int_0^1 f(a+px)dx$ (단, a, p는 상수)

(좌변 해석: a에서 $a+p$까지, p만큼의 거리를 n등분한 후, 이를 해당하는 함숫값(세로의 길이)와 곱하였다.
a에서 $a+p$까지'가 아니라 '0에서 p까지'의 구간으로 해석하고 싶다면, 그래프를 x축 방향으로 $-a$만큼 평행이동하면 된다. 그래프를 떠올리자.)

예제1 정적분과 급수

문제

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tan^2\frac{k}{4n}\pi$의 값은?

해설

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tan^2\frac{k}{4n}\pi=4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{n}\tan^2\frac{k}{4n}\pi$$
$$=4\int_0^{\frac{1}{4}}\tan^2\pi x\,dx=4\int_0^{\frac{1}{4}}(\sec^2\pi x-1)dx$$
$$=4\left\{\left(\frac{1}{\pi}\tan\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\right)-0\right\}=\frac{4-\pi}{\pi}$$

★ **좌변을 해석하는 방법에 따라 계산식이 달라진다.**

① 위 풀이처럼 0에서 $\frac{1}{4}$까지 적분하면 $\tan^2\frac{k}{4n}\pi$를 $\tan^2\left(\frac{\frac{1}{4}}{n}k\times\pi\right)$로 본 것이다.

즉, $\tan^2(\pi x)$ 함수에 대해 0에서 $\frac{1}{4}$까지 구간의 길이, 즉 $\frac{1}{4}$을 n등분한 것이다. 이를 위해 직사각형에서의 가로의 길이가 $\frac{1}{4n}$ $\left(=\frac{\frac{1}{4}}{n}\right)$ 이 되도록 다음과 같이 식 조작을 한 것이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tan^2\frac{k}{4n}\pi=4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{n}\tan^2\frac{k}{4n}\pi$

② 만약 이 문제를 보고 0에서 1까지 적분하고 싶은 생각이 먼저 떠올랐다면, 아래와 같은 풀이로 진행할 수 있다.

$\tan^2\frac{k}{4n}\pi$를 $\tan^2\left(\frac{1}{n}k\times\frac{\pi}{4}\right)$로 보면,

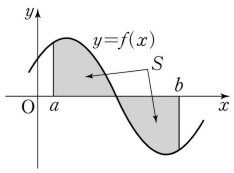
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tan^2\frac{k}{4n}\pi=\int_0^1\tan^2\frac{\pi}{4}x\,dx=\int_0^1(\sec^2\frac{\pi}{4}x-1)dx$$
$$=\left\{\left(\frac{1}{\pi}\tan\frac{\pi}{4}-1\right)-0\right\}$$ 이다.

이와 같이, '정적분과 급수' 개념을 제대로 이해하면, 자신이 편한대로 식 조작을 자유자재로 할 수가 있어진다.
이 단원을 더 이상 '암기'로 바라보질 않길 바란다.
이전 페이지의 개념 설명 내용이 이해될때까지 읽어보자. 이해만 제대로 하면, 이 단원은 식은 죽 먹기이다.

정리2 둘러싸인 부분의 넓이

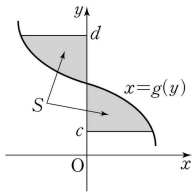
개념1 곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는 $S=\int_a^b |f(x)|dx$이다.



개념2 곡선과 y축 사이의 넓이 '유도 必' - 굳이 암기할 필요는 없다.

함수 $x=g(y)$가 닫힌구간 $[c, d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는 $S=\int_c^d |g(y)|dy$이다.

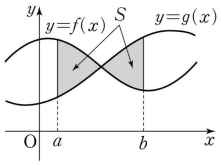


★ 두 페이지 전의 개념 설명과 대응하면서 읽어보자.

$|g(x)|$를 k번째에서의 가로의 길이, dy를 세로의 길이(여기에서는 구간을 등분한 등간격 길이가 되겠다.)로 본 후, $y=c$ ~ $y=d$ 까지 스캔하듯이 진행하며 직사각형들을 모두 더했다고 생각하자.

개념3 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는 $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$이다.



예제2 곡선과 x축 사이의 넓이

$0 \leqq x \leqq \pi$에서 곡선 $y=2\cos 2x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

해설

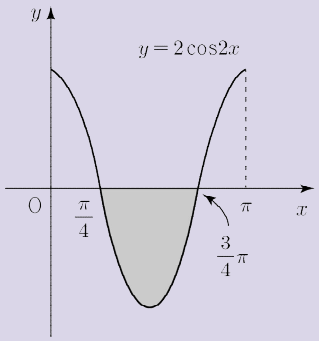
$0 \leqq x \leqq \pi$일 때, $2\cos 2x=0$, 즉 $\cos 2x=0$에서

$2x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $2x=\frac{3}{2}\pi$이므로 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$

따라서 $0 \leqq x \leqq \pi$에서 곡선 $y=2\cos 2x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} |2\cos 2x|dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (-2\cos 2x)dx = \left[-\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$= -\sin\frac{3}{2}\pi + \sin\frac{\pi}{2} = 1+1=2$$



예제3 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이

두 곡선 $y=x^2$, $y=2\sqrt{2x}$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

해설

$x^2=2\sqrt{2x}$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^4=8x$, $x(x-2)(x^2+2x+4)=0$이므로

$x=0$ 또는 $x=2$이다.

따라서 두 곡선 $y=x^2$, $y=2\sqrt{2x}$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_0^2 (2\sqrt{2x}-x^2)dx = \left[2\sqrt{2}\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2$

$$= 2\sqrt{2}\times\frac{2}{3}\times 2\sqrt{2} - \frac{1}{3}\times 8$$

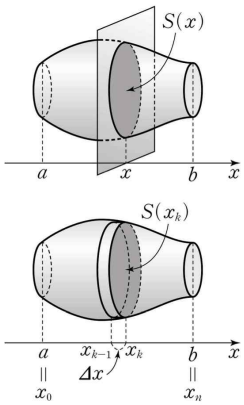
$= \frac{16}{3} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$이다.

정리3 입체도형의 부피

개념1 입체도형의 부피 '유도 必 암기'

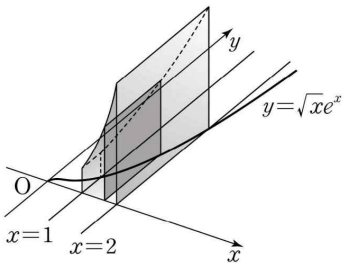
닫힌구간 $[a, b]$에서 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$이고, 함수 $S(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 이 입체도형의 부피 V는 $V=\int_a^b S(x)dx$이다.

★ **단면적 $S(x)$에 dx를 곱하였고, 똑같은 매커니즘으로 $x=a$에서 $x=b$ 구간에서 스캔하듯이 진행하며 각 면적을 더한다고 생각하면 식 $V=\int_a^b S(x)dx$ 을 쉽게 이해할 수 있다.**



예제4 입체도형의 부피

그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}e^x$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?



해설

$1 \leqq t \leqq 2$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=(\sqrt{t}\,e^t)^2=te^{2t}$

이때 $f(t)=t$, $g'(t)=e^{2t}$로 놓으면 $f'(t)=1$,

$g(t)=\frac{1}{2}e^{2t}$이므로

$V=\int_1^2 te^{2t}dt=\left[\frac{1}{2}te^{2t}\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{2}e^{2t}dt$

$=e^4-\frac{1}{2}e^2-\left[\frac{1}{4}e^{2t}\right]_1^2=\frac{3}{4}e^4-\frac{1}{4}e^2$이다.

정리4 길이

개념1 좌표평면 위를 움직이는 점이 움직인 거리 # '무지성 암기'

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x,y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때,

시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는 $s=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$이다.

개념2 곡선의 길이 # '무지성 암기' - 그러나 위 **개념1** 의 확장판이다.

① 곡선 위의 점 (x,y)가 각각 $x=f(t)$, $y=g(t)$이고 겹쳐지는 부분이 없을 때, $a\leq t\leq b$에서 이 곡선의 길이 l은

$$l=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

② $a\leq x\leq b$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이 l은 $l=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$이다.

예제5 좌표평면 위를 움직이는 점이 움직인 거리

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 위치 (x,y)가 $x=\sin t+\cos t$, $y=\sin t-\cos t$일 때, 시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는?

해설

$x=\sin t+\cos t$, $y=\sin t-\cos t$에서

$\frac{dx}{dt}=\cos t-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=\cos t+\sin t$이므로

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(\cos t+\sin t)^2}$$

$$=\sqrt{(\cos^2 t-2\cos t\sin t+\sin^2 t)+(\cos^2 t+2\cos t\sin t+\sin^2 t)}$$

$$=\sqrt{2(\sin^2 t+\cos^2 t)}=\sqrt{2}$$

따라서 점 P가 움직인 거리는 $\sqrt{2}$이다.

THEME

3 적분법과 적분함수추론

정리1 퍼즐형 적분문제의 접근법

개념1 적분퍼즐

적분법을 판정하여 복잡한 적분식을 푸는 문제를 **"적분 퍼즐"**이라고 한다.
치환적분, 부분적분, 부정적분 등의 적분들을 적절히 섞어 푸는 유형이다.

개념2 적분문제의 기본

① 구하려는 값을 정하자
내가 지금 구하려는 값이 뭐지?

② 구성 요소를 어떻게 활용할 것인지를 정하자
조건식에서 무엇을 쓸 수 있을까?

개념3 적분판정법

다음 판정법은 적분퍼즐 문제를 해결할 때 보편적으로 판단할 수 있는 판정법이다.

① 치환적분인가? ⇒ 합성함수처럼 생겼는가?
② 부정적분인가? ⇒ $F(x)$가 생각이 나는가?
③ 부분적분!

예제1 적분퍼즐과 적분판정법

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수를 갖고, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$g(x)=f'(2x)\sin\pi x+x$

라 하자. 함수 $g(x)$는 역함수 $g^{-1}(x)$를 갖고,

$\int_0^1 g^{-1}(x)dx=2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx+\frac{1}{4}$

을 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{\pi}$ ② $-\frac{1}{2\pi}$ ③ $-\frac{1}{3\pi p}$ ④ $-\frac{1}{4\pi}$ ⑤ $-\frac{1}{5\pi}$

해설

심화 유형 중 하나인 적분퍼즐이다.
다음문제는 수능에서 출제될 확률이 높진 않으나 반드시 해결할 줄 알아야하는 유형이다. 적분퍼즐이란 말 그대로 적분만 잘하면 퍼즐 풀 듯이 해결하면 된다.

우선 적분 퍼즐 유형은 "구하려는 값"부터 생각하는 것이 먼저다. 그리고 문제의 조건을 어떻게 이용할지 뜯어보고 퍼즐을 맞추면 된다.

우선 기본적인 적분법 판정 순서는
1. 치환적분인가? (합성함수 꼴 생각)
2. 부정적분인가? ($F(x)$를 생각)
3. 부분적분이구나!(곱의 꼴 생각)
다음과 같다.

우선 치환적분인가?
조건에는 $f'(2x)$라는 식이 보이므로 치환이 필요할 것이다. 또한 곱의 꼴이 보이므로 부분적분도 필요하다.

이를 종합하여 구하는 값을 이용하여보자.
(조건의 형태을 바꿀 수도 구하려는 값의 형태를 바꿀 수도 있다. 고민하며 바꿔보면 어려움이 없을 것이다.)
이제 문제에 들어가 조건을 풀어보면
$g(0)=0, g(1)=1$이므로

$\int_0^1 g(x)dx+\int_0^1 g^{-1}(x)dx=1$

따라서 $2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx+\frac{1}{4}=1-\int_0^1 g(x)dx$

이제 구하는 값을 조건에 맞게 적분하면

$\int_0^2 f(x)\cos(\frac{\pi}{2}x)dx=\int_0^2 2f(2t)\cos\pi t\,dt\ *(x=2t)$

$=\frac{2}{\pi}f(2t)\sin\pi|_0^1-\frac{4}{\pi}\int_0^1 f'(2t)\sin\pi t dt=-\frac{1}{3\pi}$

정리2 곱상수 적분

개념1 함수의 구간이동 항등식

고정점(구간 분할점)을 항등식에 대입하여 구간의 확장성 판단

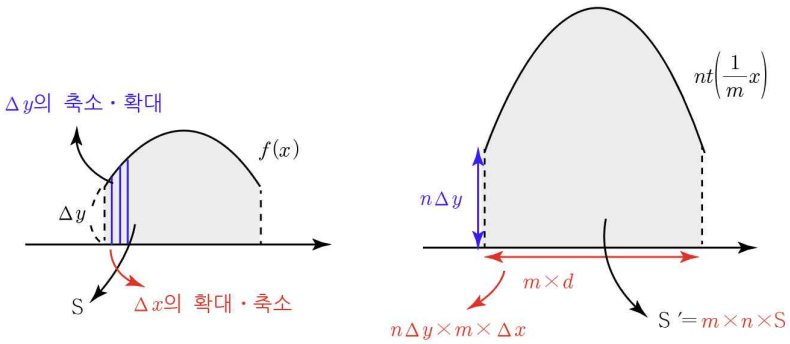
$ex)$ $\exists f(x), g(x),\ \forall x\ f(g(x))=x,\ f(2x)=2g(x)\ f(1)=1$일 때, ~~~

다음과 같은 조건에서 $f(1)=g(1)=1$이고 $f(2)=2g(1)=2$ 이다. 이를 반복하면 $f(4)=2g(2)=4$ ….
이렇게 끝 점을 대입하여 구간분할 후 좌표를 관찰하여 그래프를 추론한다. (22학년도 수능 30번 참조)

개념2 곱상수 적분(확대, 축소)

함수 $f(x)$에 대하여 $nf(\frac{1}{m}x)$인 함수가 존재할 때, $f(x)$의 넓이를 S라 하면

$nf(\frac{1}{m}x)$의 넓이는 $S'=m\times n\times S$ 이다.



정리3 정적분으로 정의된 함수

개념1 정적분으로 정의된 함수의 정적분 단축 암기식

정적분으로 정의된 함수를 미분하는 방법이다.
암기하면 기계적으로 계산하여 시간을 아낄 수 있다.

① $\left\{\int_a^{h(x)}(f(x)-f(t))g(t)dt\right\}'=f'(x)\int_a^{h(x)}g(t)dt$

② $\left\{\int_a^{x}(f(x)-f(t))g(t)dt\right\}'=f'(x)\int_a^{x}g(t)dt$

③ $\left\{\int_a^{x}(kx-kt)f(t)dt\right\}'=k\times\int_a^{x}f(t)dt$

④ $\left\{\int_a^{x}(x-t)f(t)dt\right\}'=\int_a^{x}f(t)dt$

개념2 편미분적 관점

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^{x}\{f(x)-f(t)\}g(t)dt$$
$$=\int_a^{x}\frac{\partial}{\partial x}\{f(x)-f(t)\}g(t)dt$$
$$=\int_a^{x}f'(x)g(t)dt=f'(x)\int_a^{x}g(t)dt$$

TIP 편미분

편미분이란 간단히 다변수함수의 특정변수를 제외한 나머지 변수를 상수 취급하여 미분하는 것이다.
즉 위의 식에서 t는 무시하고 x에 대해서 미분을 하였다.
∂는 편미분 기호이다.

개념3 Leibniz Integral Rule

라이프니츠 적분 규칙이다. 대학과정에서 전미분, 편미분의 개념에 대해 알고있어야 되지만
수험생으로서 이러한 방법 또한 존재한다는 것을 알아두면 좋다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^{b}f(x,t)dt=\int_a^{b}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)dt$$

즉 위에서 설명한 편미분적 방법과 거의 유사하다.

예제2 정적분 단축 암기식

$f(x)=x^3-12x^2+45x+3$ 일 때

$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4dt$가 오직 하나의 극값을 갖는 a는?

해설

정적분 단축 암기식에 의해

$g'(x)=\int_a^x \{f(t)\}^4\times f'(t)dt$이고

$f'(x)=3(x-3)(x-5)$이다. 이때 $\{f(t)\}^4\geq 0$이며 실근에서 차수가 4이상이다. 따라서 근은 정적분이 0이 되도록하는 a와 $f'(t)$의 실근에서만 생길 수 있다.

이때 오직 한 근을 가지기 위해서는 a와 $f'(t)$의 실근이 일치해야한다. $\therefore a=3,\ 5$

예제3 라이프니츠 적분 규칙

$\int_0^2 xf(tx)dx=4t^2$일 때 $f(2)$의 값을 구하시오.

해설

$\frac{d}{dx}\int_0^2 xf(tx)dx=\int_0^2 \frac{\partial}{\partial x}xf(tx)dx=\int_0^2 x^2f'(tx)dx=8t$

이때 $\left[\frac{1}{t}x^2f(tx)\right]_0^2-\frac{2}{t}\int_0^2 xf(tx)dx=\frac{4}{t}f(2t)-8t$

$f(2t)=4t^2, f(2)=4$

정리4 3초 반응 적분

개념1 분수꼴 미분법

① $\int \frac{1}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$

쉽게 외우는 법! 분모를 미분하고 계수에서 1 빼기! 마지막에 -1 곱하기

예시

(1) $\int \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$: 분모 미분하면 $2x$, 계수에서 1빼면 x

(2) $\int \frac{3}{x^4} = -\frac{1}{x^3} + C$: 분모 미분하면 $4x^3$, 계수에서 1빼면 $3x^3$

개념2 도표적분법

부분적분의 도구이다.

$\int f'(x)g(x)dx$에서 부분적분법이 필요할 때 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\int f'g = fg - Fg' + Fg'' - \cdots$$

$+g$	f	
$-g'$	f	fg
$+g''$	F	$-Fg'$
$-g'''$	F	Fg''
$\vdots$	$\vdots$	

증명은 생략한다.

개념3 지수함수 적분법

다음 적분은 지수함수와 함수 $f(x)$가 곱해진 적분을 할 때 부분적분을 빠르게 하는 방법이다.

$$\int f(x)e^{-x}dx = -\{f + f' + f'' + \cdots + f^{(n)}\}e^{-x} + C$$

$$\int f(x)e^{x}dx = \{f - f' + f'' - \cdots + f^{(n)}\}e^{x} + C$$

예시

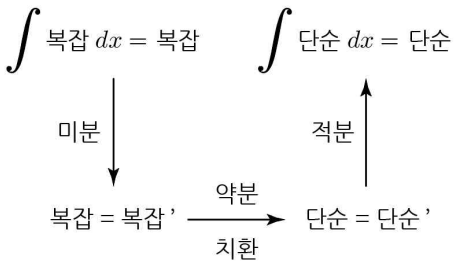
(1) $\int (x^2+2x+3)e^{-x}dx = -\{(x^2+2x+3)+(2x+2)+2\}e^{-x}$

(2) $\int (-x+k)e^{-x}dx = -(-x+k-1)e^{-x} + C$ (250930 中)

정리5 차원디멘션 적분

개념1 차원디멘션 적분법

다음 적분식과 같이 복잡한 적분을 푸는 방법 중 하나이다.



즉 복잡한 식을 미분하여 단순하게 만들고, 다시 적분하면 식이 깔끔해진다.

예제4 차원디멘션 적분

모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x f(t)e^t dt = \{f(x)\}^3 - 3\{f(x)\}^2 - 16$ 이다.

$f(x) \geq 0$일 때 $f(a) = 6$인 실수 a에 대해 $f'(a)$를 구하시오.

해설

우선 양 변에 $x = 0$을 대입하면

$0 = \{f(0)\}^3 - 3\{f(0)\}^2 - 16$이다. $f(x) \geq 0$이므로 $f(0) = 4$

$P(x) = \{f(x)\}^3 - 3\{f(x)\}^2 - 16$이라고 하자.

양 변을 x에 대해 미분하면

$f(x)e^x = f'(x)\{f(x)\}^2 + 3f'(x)f(x)$이고

양 변을 $f(x)$로 나누면

$e^x = f'(x)f(x) + 3f'(x)$

이제 다시 양 변을 적분하면

$e^x + C_1 = 3f(x) + \frac{1}{2}\{f(x)\}^2 + C_2$

$x = 0$을 대입하면 $C_1 - C_2 = 19$

이제 $f(a) = 6$을 이용하면

$e^a + C_1 - C_2 = 18 + 18 = 36$

$\therefore e^a = 17$

$e^x = f'(x)f(x) + 3f'(x)$에 $x = a$를 대입하면

$17 = f'(a)f(a) + 3f'(a)$

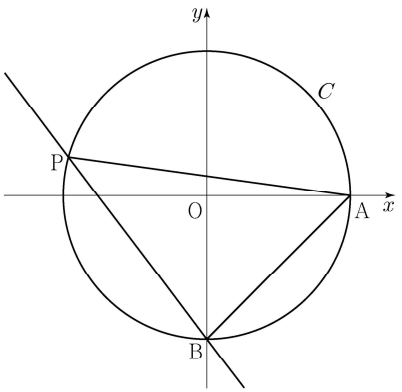
$\therefore f'(a) = \frac{17}{9}$

유형 01 적분법

01 2022학년도 9월 28번 정답률 46%

28. 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 C와 두 점 $A(2, 0)$, $B(0, -2)$가 있다. 원 C 위에 있고 x좌표가 음수인 점 P에 대하여 $\angle PAB=\theta$라 하자.
점 $Q(0, 2\cos\theta)$에서 직선 BP에 내린 수선의 발을 R라 하고, 두 점 P와 R 사이의 거리를 $f(\theta)$라 할 때, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta$의 값은? [4점]

① $\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$
④ $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}-3}{2}$



02 2026학년도 9월 26번 정답률 89%

26. 곡선 $y=\frac{3}{x-1}\ (x>1)$이 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 곡선 $y=\frac{3}{x-1}\ (x>1)$과 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $4-3\ln 3$ ② $3-3\ln 2$ ③ $4-2\ln 3$
④ $3+3\ln 2$ ⑤ $3+3\ln 3$

유형 02 부분적분법

01 2023학년도 9월 24번 정답률 86%

24. $\int_0^{\pi} x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$의 값은? [3점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

유형 03 정적분과 급수의 관계

01 2022학년도 수능 26번 정답률 74%

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$ 의 값은? [3점]

① $\ln 5$ ② $\dfrac{\ln 5}{2}$ ③ $\dfrac{\ln 5}{3}$ ④ $\dfrac{\ln 5}{4}$ ⑤ $\dfrac{\ln 5}{5}$

02 2023학년도 수능 24번 정답률 78%

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{3k}{n}}$ 의 값은? [3점]

① $\dfrac{4}{3}$ ② $\dfrac{13}{9}$ ③ $\dfrac{14}{9}$ ④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ $\dfrac{16}{9}$

유형 04 치환적분법

01 2025학년도 수능 24번 정답률 91%

24. $\int_0^{10} \frac{x+2}{x+1}dx$의 값은? [3점]

① $10+\ln 5$ ② $10+\ln 7$ ③ $10+2\ln 3$
④ $10+\ln 11$ ⑤ $10+\ln 13$

02 2026학년도 9월 24번 정답률 92%

24. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx$의 값은? [3점]

① $e-2$ ② $\frac{e-1}{2}$ ③ $\frac{e}{2}$
④ $e-1$ ⑤ $\frac{e+1}{2}$

03 2026학년도 수능 24번 정답률 76%

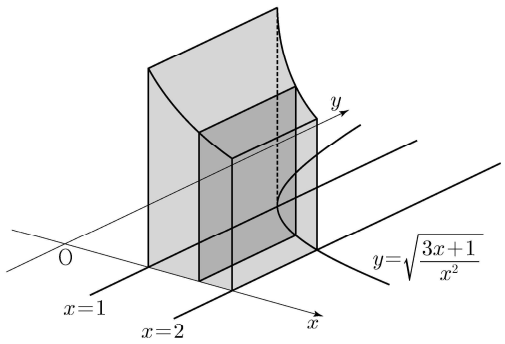
24. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\, dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

유형 05 입체도형의 부피

01 2022학년도 9월 26번 정답률 83%

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\dfrac{3x+1}{x^2}}\ (x>0)$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피는? [3점]

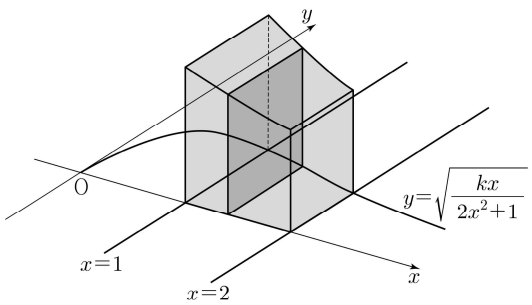


① $3\ln 2$ ② $\dfrac{1}{2}+3\ln 2$ ③ $1+3\ln 2$

④ $\dfrac{1}{2}+4\ln 2$ ⑤ $1+4\ln 2$

02 2023학년도 9월 26번 정답률 83%

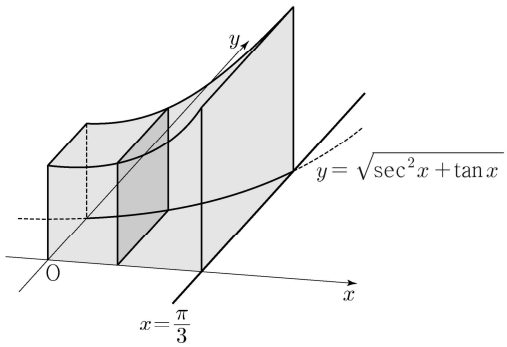
26. 그림과 같이 양수 k에 대하여 곡선 $y=\sqrt{\dfrac{kx}{2x^2+1}}$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 $2\ln 3$일 때, k의 값은? [3점]



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

03 2023학년도 수능 26번 정답률 72%

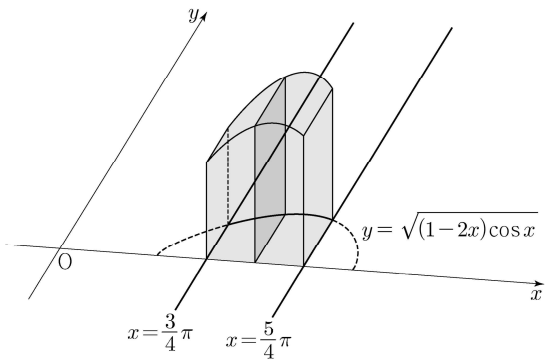
26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\sec^2 x+\tan x}\left(0\le x\le \frac{\pi}{3}\right)$와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\ln 2}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln 2$ ③ $\sqrt{3}+\frac{\ln 2}{2}$
④ $\sqrt{3}+\ln 2$ ⑤ $\sqrt{3}+2\ln 2$

04 2024학년도 수능 26번 정답률 75%

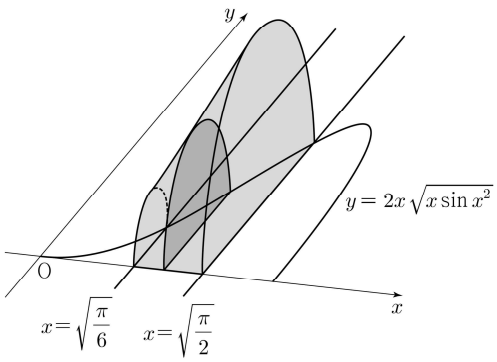
26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{(1-2x)\cos x}\ \left(\frac{3}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi\right)$와 x축 및 두 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$, $x=\frac{5}{4}\pi$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$ ② $\sqrt{2}\pi-1$ ③ $2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}\pi-1$ ⑤ $2\sqrt{2}\pi$

05 2025학년도 9월 26번 정답률 82%

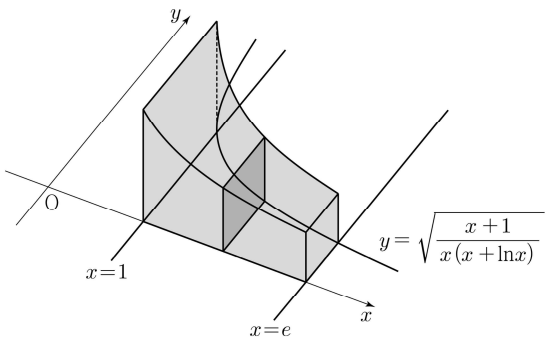
26. 그림과 같이 곡선 $y=2x\sqrt{x\sin x^2}\ (0\le x\le\sqrt{\pi})$와 x축 및 두 직선 $x=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 반원일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{\pi^2+6\pi}{48}$ ② $\frac{\sqrt{2}\pi^2+6\pi}{48}$ ③ $\frac{\sqrt{3}\pi^2+6\pi}{48}$
④ $\frac{\sqrt{2}\pi^2+12\pi}{48}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}\pi^2+12\pi}{48}$

06 2025학년도 수능 26번 정답률 82%

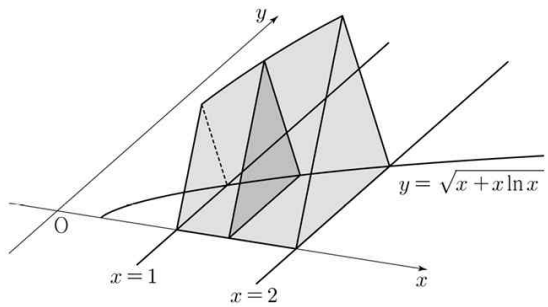
26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\frac{x+1}{x(x+\ln x)}}$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=e$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\ln(e+1)$ ② $\ln(e+2)$ ③ $\ln(e+3)$
④ $\ln(2e+1)$ ⑤ $\ln(2e+2)$

07 2026학년도 수능 26번 정답률 78%

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x+x\ln x}$ 와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{\sqrt{3}(3+8\ln 2)}{16}$ ② $\frac{\sqrt{3}(5+12\ln 2)}{24}$ ③ $\frac{\sqrt{3}(1+12\ln 2)}{16}$

④ $\frac{\sqrt{3}(1+2\ln 2)}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}(1+9\ln 2)}{12}$

유형 06 정적분과 곡선의 길이

01 2022학년도 수능 27번 정답률 63%

27. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치가 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\dfrac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 중점일 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{3}{8}$ ② $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{5}{16}$ ③ $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{1}{4}$

④ $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{3}{16}$ ⑤ $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{1}{8}$

02 2024학년도 9월 27번 정답률 52%

27. $x=-\ln 4$에서 $x=1$까지의 곡선 $y=\frac{1}{2}\left(\left|e^{x}-1\right|-e^{|x|}+1\right)$의 길이는? [3점]

① $\frac{23}{8}$ ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{29}{8}$ ④ 4 ⑤ $\frac{35}{8}$

유형 07 적분 퍼즐(심화)

01 2022학년도 수능 30번 정답률 7%

30. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=1$, $\int_1^2 f(x)\,dx=\frac{5}{4}$
>
> (나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,
> $x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

$\int_1^8 xf'(x)\,dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

02 2024학년도 9월 25번 정답률 81%

25. 함수 $f(x)=x+\ln x$에 대하여 $\int_1^e\left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)\,dx$의 값은? [3점]

① $\frac{e^2}{2}+\frac{e}{2}$ ② $\frac{e^2}{2}+e$ ③ $\frac{e^2}{2}+2e$
④ e^2+e ⑤ e^2+2e

03 2024학년도 수능 25번 정답률 78%

25. 양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이고, $g'(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.
모든 양수 a에 대하여

$$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}\,dx=2\ln a+\ln(a+1)-\ln 2$$

이고 $f(1)=8$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

04 2025학년도 9월 28번 정답률 55%

28. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수를 갖고, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f'(2x)\sin\pi x+x$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 역함수 $g^{-1}(x)$를 갖고,

$$\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx=2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx+\frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$ 의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{\pi}$ ② $-\frac{1}{2\pi}$ ③ $-\frac{1}{3\pi}$ ④ $-\frac{1}{4\pi}$ ⑤ $-\frac{1}{5\pi}$

05 2026학년도 수능 28번 정답률 34%

28. 함수

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)$$

와 양수 t에 대하여 점 $(s,\ f(s))\ (s>0)$에서 y축에 내린 수선의 발과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s,\ f(s))$에서의 접선이 y축과 만나는 점 사이의 거리가 t가 되도록 하는 s의 값을 $g(t)$라 하자. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} g(t)\,dt$의 값은? [4점]

① $\frac{161}{12}+\ln 3$ ② $\frac{40}{3}+\ln 3$ ③ $\frac{53}{4}+\ln 2$

④ $\frac{79}{6}+\ln 2$ ⑤ $\frac{157}{12}+\ln 2$

심화유형 함수추론

01 2022학년도 6월 29번 정답률 34%

29. $t>2e$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$이 $x=k$에서 극대일 때, 실수 k의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$인 실수 α에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

02 2022학년도 9월 29번 정답률 29%

29. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(a)=6$인 a에 대하여 $g(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다.
>
> (나) $g(x)$는 $x=b$, $x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.) [4점]

03 2023학년도 수능 29번 정답률 28%

29. 세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=ae^{2x}+be^{x}+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)+6}{e^{x}}=1$

(나) $f(\ln 2)=0$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_{0}^{14}g(x)\,dx=p+q\ln 2$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

04 2023학년도 수능 30번 정답률 11%

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=e^{\sin \pi x}-1$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)=g(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.
>
> (나) 열린구간 $(0, 3)$에서 방정식 $h(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

$f(3)=\frac{1}{2}$, $f'(3)=0$일 때, $f(2)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

05 2024학년도 6월 26번 정답률 75%

26. x에 대한 방정식 $x^2-5x+2\ln x=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 합은? [3점]

① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ -8 ④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

06 2024학년도 6월 28번 정답률 26%

28. 두 상수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$$

이다.

(나) $f(0)=f(2)+1$

① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{7}{64}$ ③ $-\frac{5}{32}$ ④ $-\frac{13}{64}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

07 2024학년도 9월 28번 정답률 21%

28. 실수 $a\,(0<a<2)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 2|\sin 4x| & (x<0) \\ -\sin ax & (x\geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수

$$g(x)=\left|\int_{-a\pi}^{x} f(t)\,dt\right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, a의 최솟값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

08 2023학년도 9월 30번 정답률 8%

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 구간 $(0, \infty)$에서 $g(x) \geq 0$인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \leq -3$인 모든 실수 x에 대하여
$f(x) \geq f(-3)$이다.

(나) $x > -3$인 모든 실수 x에 대하여
$g(x+3)\{f(x)-f(0)\}^2 = f'(x)$이다.

$\int_4^5 g(x)dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

09 2024학년도 수능 28번 정답률 15%

28. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이고, $x < 0$일 때 $f(x) = -4xe^{4x^2}$이다.
모든 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x) = t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$라 하자.
두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모든 양수 t에 대하여

$$2g(t) + h(t) = k \ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킨다. $\int_0^7 f(x)dx = e^4 - 1$일 때, $\dfrac{f(9)}{f(8)}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{2}e^5$ ② $\dfrac{4}{3}e^7$ ③ $\dfrac{5}{4}e^9$ ④ $\dfrac{6}{5}e^{11}$ ⑤ $\dfrac{7}{6}e^{13}$

10 2024학년도 수능 30번 정답률 8%

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=|\sin x|\cos x$$

이다. 양수 a에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 함수

$$h(x)=\int_0^x \{f(t)-g(t)\}\,dt$$

가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\frac{100}{\pi}\times(a_6-a_2)$의 값을 구하시오. [4점]

11 2025학년도 6월 28번 정답률 8%

28. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}(x-a-2)^2e^x & (x\geq a)\\ e^{2a}(x-a)+4e^a & (x<a)\end{cases}$$

일 때, 실수 t에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 x의 최솟값을 $g(t)$라 하자.

함수 $g(t)$가 $t=12$에서만 불연속일 때, $\dfrac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))}$의 값은?

(단, a는 상수이다.) [4점]

① $6e^4$ ② $9e^4$ ③ $12e^4$ ④ $8e^6$ ⑤ $10e^6$

12 2025학년도 6월 29번 정답률 16%

29. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\ln(1+x^2)+a$ (a는 상수)와 두 양수 b, c에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq b) \\ -f(x-c) & (x<b) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
$a+b+c=p+q\ln 2$일 때, $30(p+q)$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

13 2025학년도 9월 30번 정답률 16%

30. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(k-|x|)e^{-x}$$

이라 하자. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $F(x)$에 대하여 $F(0)$의 최솟값을 $g(k)$라 하자.

> 모든 실수 x에 대하여 $F'(x)=f(x)$이고 $F(x)\geq f(x)$이다.

$g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)=pe+q$일 때, $100(p+q)$의 값을 구하시오.
(단, $\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$이고, p와 q는 유리수이다.) [4점]

14 2025학년도 수능 30번 정답률 18%

30. 두 상수 $a\,(1 \le a \le 2)$, b에 대하여 함수 $f(x) = \sin(ax + b + \sin x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0) = 0$, $f(2\pi) = 2\pi a + b$
(나) $f'(0) = f'(t)$인 양수 t의 최솟값은 4π이다.

함수 $f(x)$가 $x = \alpha$에서 극대인 α의 값 중 열린구간 $(0, 4\pi)$에 속하는 모든 값의 집합을 A라 하자. 집합 A의 원소의 개수를 n, 집합 A의 원소 중 가장 작은 값을 α_1이라 하면,

$n\alpha_1 - ab = \dfrac{q}{p}\pi$이다. $p + q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

15 2026학년도 6월 28번 정답률 12%

28. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$와 두 상수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $a \times e^b$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^5 + \{f(x)\}^3 + ax + b = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$$

이다.

(나) $f(-3)f(3) < 0$, $f'(2) > 0$

① $-3e^{-\frac{4}{3}}$ ② $-\frac{5}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ③ $-\frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

④ $e^{-\frac{4}{3}}$ ⑤ $\frac{7}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

16 2026학년도 6월 30번 정답률 9%

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\left|f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이고, $g(0)>0$이다.

(나) $g'(\ln 3)<0$, $|g'(-\ln 3)|=\frac{3}{8}g(-\ln 3)$

$g(0)$의 최솟값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

17 2026학년도 9월 28번 정답률 23%

28. 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=g(x)-\tan g(x)$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g'(0)\times\left(g(0)\right)^2$의 값은? [4점]

(가) $f(0)=0$, $f''(\pi)=0$

(나) $\sin g(\pi)=0$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\frac{3\pi}{2}$

① -12 ② -6 ③ -1 ④ 3 ⑤ 9

18 2026학년도 9월 30번 정답률 19%

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\ln\left(\frac{g(x)}{1+xf'(x)}\right)$$

를 만족시킨다. $f(1)=4\ln 2$이고

$$\int_1^2 g(x)\,dx=34,\quad \int_1^2 xg(x)\,dx=53$$

일 때, $\int_1^2 xe^{f(x)}\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

19 2026학년도 수능 30번 정답률 11%

30. 실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|x| \le 1$일 때, $4 \times \left(f^{-1}(x)\right)^2 = x^2\left(x^2-5\right)^2$이다.
> (나) $|x| > 1$일 때, $\left|f^{-1}(x)\right| = e^{|x|-1}+1$이다.

실수 m에 대하여 기울기가 m이고 점 $(1, 0)$을 지나는 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(m)$이라 하자.
함수 $g(m)$이 $m=a$, $m=b\,(a<b)$에서 불연속일 때,

$g(a) \times \left(\lim_{m \to a+} g(m)\right) + g(b) \times \left(\frac{\ln b}{b}\right)^2$의 값을 구하시오.

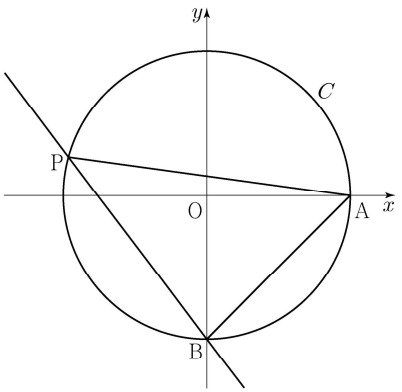
(단, $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$) [4점]

유형 01 적분법

01 2022학년도 9월 28번 정답률 46%

28. 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 C와 두 점 $A(2, 0)$, $B(0, -2)$가 있다. 원 C 위에 있고 x좌표가 음수인 점 P에 대하여 $\angle PAB=\theta$라 하자.
점 $Q(0, 2\cos\theta)$에서 직선 BP에 내린 수선의 발을 R라 하고, 두 점 P와 R 사이의 거리를 $f(\theta)$라 할 때, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta$의 값은? [4점]

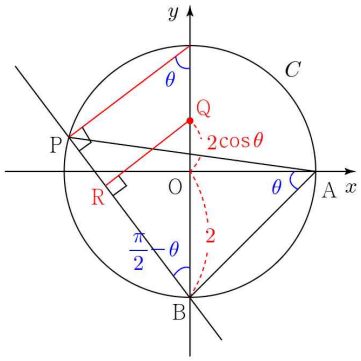
① $\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$
④ $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}-3}{2}$



정 답 ①

해 설

얼핏보기엔 삼각함수 도형 극한 문제이나 적분 연산이 있으므로 근사가 불가능한 문제이다.
이렇게 근사가 불가능한 문제는 호흡을 길게 가져가더라도 꼼꼼히 푸는 것이 좋다. 그러나 다음과 같은 문제로 적분에서 출제를 하게 되면 29, 30번 문제에 적분이 들어가기 힘드므로 출제될 확률이 높진 않은 문제이다.
우선 정의대로 그림을 그려보면 다음과 같다.



따라서

$\overline{PB}=4\sin\theta$, $\overline{RB}=(2\cos\theta+2)\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$

$f(\theta)=\overline{PB}-\overline{RB}$

$=4\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta-2\sin\theta=2\sin\theta-\sin2\theta$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta=\left[-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$

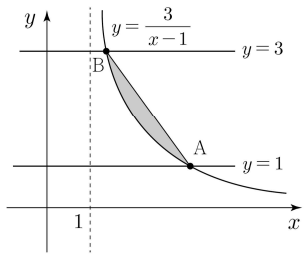
02 2026학년도 9월 26번 정답률 89%

26. 곡선 $y=\frac{3}{x-1}$ $(x>1)$이 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 곡선 $y=\frac{3}{x-1}$ $(x>1)$과 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $4-3\ln3$ ② $3-3\ln2$ ③ $4-2\ln3$
④ $3+3\ln2$ ⑤ $3+3\ln3$

정 답 ①

해 설



곡선 $y=\frac{3}{x-1}$이 $y=1$, $y=3$과 만나는 점은 각각 $(4, 1)$, $(2, 3)$이다.

직선 AB는 $y=-x+5$이므로 곡선 $y=\frac{3}{x-1}$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_2^4(-x+5-\frac{3}{x-1})dx$이다.

$\int_2^4(-x+5-\frac{3}{x-1})dx=[-\frac{x^2}{2}+5x-3\ln(x-1)]_2^4$

$=-6+10-3\ln3=4-3\ln3$

유형 02 부분적분법

01 2023학년도 9월 24번 정답률 86%

24. $\int_0^{\pi} x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

정 답 ②

해 설

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로 주어진 식은

$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$입니다.

부분적분법에서, 미분하려는 함수는 '로다삼지' 순서대로 우선순위를 부여합니다.

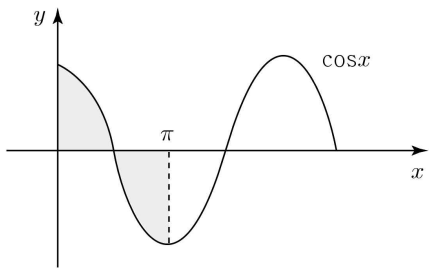
현재 다항함수와 삼각함수가 있으므로, 다항함수를 '미분할 함수'로 설정합니다.

부분적분법을 하여 계산하면,

$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx=[-x\cos x]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx$

$=\pi+0=\pi$ 입니다.

★ $\int_0^{\pi}\cos x\,dx$ 계산 시, 그래프를 생각하면 계산하기 편리합니다. $\cos x$를 적분하지 않고도, 빠르게 값이 0임을 파악할 수 있습니다.



유형 03 정적분과 급수의 관계

01 2022학년도 수능 26번 정답률 74%

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$ 의 값은? [3점]

① $\ln 5$ ② $\dfrac{\ln 5}{2}$ ③ $\dfrac{\ln 5}{3}$ ④ $\dfrac{\ln 5}{4}$ ⑤ $\dfrac{\ln 5}{5}$

정 답 ③

해 설

'정적분과 급수의 관계' 파트는 기본적으로, $\dfrac{k}{n}$ 꼴이 나오도록 식을 변형해야 합니다.

분모·분자를 n^3으로 나누면

$\dfrac{\left(\dfrac{k}{n}\right)^2+2\left(\dfrac{k}{n}\right)}{\left(\dfrac{k}{n}\right)^3+3\left(\dfrac{k}{n}\right)^2+1}\times\dfrac{1}{n}$ 입니다.

즉, 주어진 식은

$\displaystyle\int_0^1\frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}\,dx$ 이고, 계산하면

$\dfrac{1}{3}\times\left[\ln|x^3+3x^2+1|\right]_0^1=\dfrac{\ln 5}{3}$ 입니다.

02 2023학년도 수능 24번 정답률 78%

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{3k}{n}}$ 의 값은? [3점]

① $\dfrac{4}{3}$ ② $\dfrac{13}{9}$ ③ $\dfrac{14}{9}$ ④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ $\dfrac{16}{9}$

정 답 ③

해 설

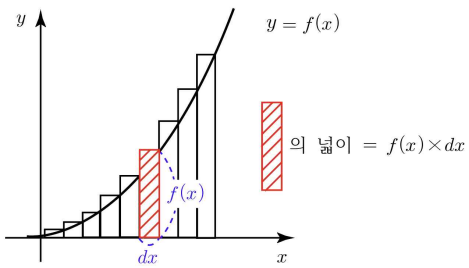
주어진 식을, 1에서 4까지의 구간을 적분한다는 관점으로 보면,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{3k}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{3k}{n}}$

로 변형할 수 있다.

구분구적법 그래프를 함께 떠올리며,

$\dfrac{3}{n}$을 가로의 길이로, $\sqrt{1+\dfrac{3k}{n}}$을 세로의 길이로 보자.



<구분구적법 그래프>

따라서, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{3k}{n}}=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_1^4\sqrt{x}\,dx$

$=\dfrac{1}{3}\times\left[\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\dfrac{14}{9}$

유형 04 치환적분법

01 2025학년도 수능 24번 정답률 91%

24. $\int_0^{10} \frac{x+2}{x+1}dx$의 값은? [3점]

① $10+\ln 5$ ② $10+\ln 7$ ③ $10+2\ln 3$
④ $10+\ln 11$ ⑤ $10+\ln 13$

정 답 ④

해 설

$x+1=t$로 치환하면,

$$\int_1^{11} \frac{t+1}{t}dt = \int_1^{11}\left(1+\frac{1}{t}\right)dt$$

$= [t+\ln t]_1^{11} = 10+\ln 11$ 입니다.

02 2026학년도 9월 24번 정답률 92%

24. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx$의 값은? [3점]

① $e-2$ ② $\frac{e-1}{2}$ ③ $\frac{e}{2}$
④ $e-1$ ⑤ $\frac{e+1}{2}$

정 답 ④

해 설

$x-\frac{\pi}{4}=t$로 치환하자.

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos(x-\frac{\pi}{4})e^{\sin(x-\frac{\pi}{4})}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t e^{\sin t}dt$이다.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t e^{\sin t}dt = [e^{\sin t}]_0^{\frac{\pi}{2}} = e-1$이다.

(적분 과정은 너무 직관적이기 때문에 과정을 생략합니다.)

03 2026학년도 수능 24번 정답률 76%

24. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\, dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

정 답 ④

해 설

$\sqrt{\sin x - \sin^3 x} = \sqrt{\sin x(1-\sin^2 x)} = \sqrt{\sin x \cos^2 x}$ 이다.

$[0, \frac{\pi}{2}]$ 에서 $\cos x \geq 0$ 이므로 $\sqrt{\sin x \cos^2 x} = \cos x \sqrt{\sin x}$ 이다.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x}\, dx$ 를 구하기 위해 $\sin x = t$ 로 치환하자.

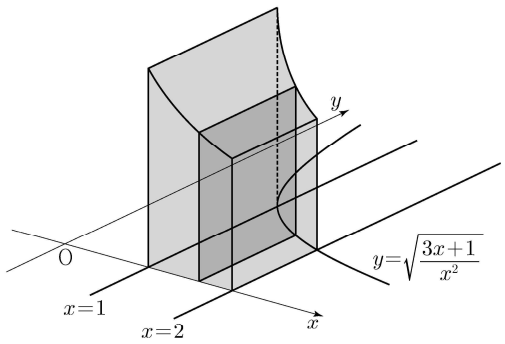
$\cos x dx = dt$ 이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x}\, dx = \int_0^1 \sqrt{t}\, dt = [\frac{2}{3} t\sqrt{t}]_0^1 = \frac{2}{3}$ 이다.

유형 05 입체도형의 부피

01 2022학년도 9월 26번 정답률 83%

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\dfrac{3x+1}{x^2}}\ (x>0)$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피는? [3점]



① $3\ln 2$ ② $\dfrac{1}{2}+3\ln 2$ ③ $1+3\ln 2$

④ $\dfrac{1}{2}+4\ln 2$ ⑤ $1+4\ln 2$

정 답 ②

해 설

단면이 정사각형이므로, 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면 $S(x)=\dfrac{3x+1}{x^2}$ 입니다.

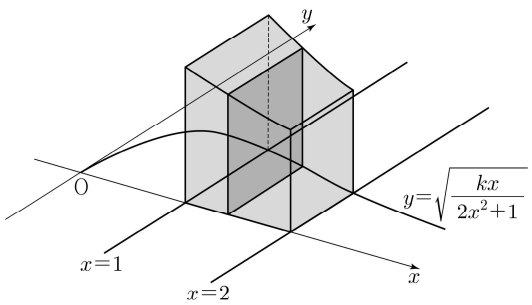
문제에서 요구하는 입체도형의 부피는

$$\int_1^2 S(x)\,dx=\int_1^2 \frac{3x+1}{x^2}\,dx=\int_1^2\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=\left[3\ln x-\frac{1}{x}\right]_1^2=\frac{1}{2}+3\ln 2$$

02 2023학년도 9월 26번 정답률 83%

26. 그림과 같이 양수 k에 대하여 곡선 $y=\sqrt{\dfrac{kx}{2x^2+1}}$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 $2\ln 3$일 때, k의 값은? [3점]



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

정 답 ③

해 설

단면이 정사각형이므로, 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면 $S(x)=\dfrac{kx}{2x^2+1}$ 입니다.

문제에서 요구하는 입체도형의 부피는

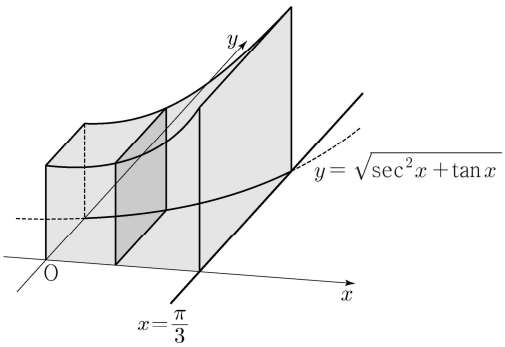
$$\int_1^2 S(x)\,dx=\int_1^2 \frac{kx}{2x^2+1}\,dx=\frac{k}{4}\int_1^2\left(\frac{4x}{2x^2+1}\right)dx$$

$$=\frac{k}{4}\left[\ln|2x^2+1|\right]_1^2=\frac{k}{4}\ln 3$$

$\dfrac{k}{4}\ln 3=2\ln 3$이므로, $k=8$

03 2023학년도 수능 26번 정답률 72%

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\sec^2 x+\tan x}\left(0\le x\le\frac{\pi}{3}\right)$와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\ln 2}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln 2$ ③ $\sqrt{3}+\frac{\ln 2}{2}$
④ $\sqrt{3}+\ln 2$ ⑤ $\sqrt{3}+2\ln 2$

정 답 ④

해 설

$0\le t\le\frac{\pi}{3}$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면 $S(t)=(\sqrt{\sec^2 t+\tan t})^2=\sec^2 t+\tan t$이므로 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 t+\tan t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sec^2 x+\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$$

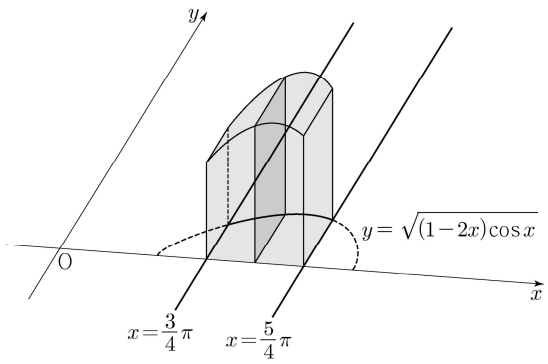
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{\sec^2 x-\frac{(\cos x)'}{\cos x}\right\}dx$$

$$=[\tan x-\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{3}}=\tan\frac{\pi}{3}-\ln\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\sqrt{3}-\ln\frac{1}{2}=\sqrt{3}+\ln 2$$

04 2024학년도 수능 26번 정답률 75%

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{(1-2x)\cos x}\ \left(\frac{3}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi\right)$와 x축 및 두 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$, $x=\frac{5}{4}\pi$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$ ② $\sqrt{2}\pi-1$ ③ $2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}\pi-1$ ⑤ $2\sqrt{2}\pi$

정 답 ③

해 설

직선 $x=t\ \left(\frac{3}{4}\pi \le t \le \frac{5}{4}\pi\right)$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{5}{4}\pi(1-2t)\cos t$

따라서 입체도형의 부피를 V라 하면

$u(t)=1-2t$, $v'(t)=\cos t$, $u'(t)=-2$, $v(t)=\sin t$라 하면

$$V=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}(1-2t)\cos t\,dt$$

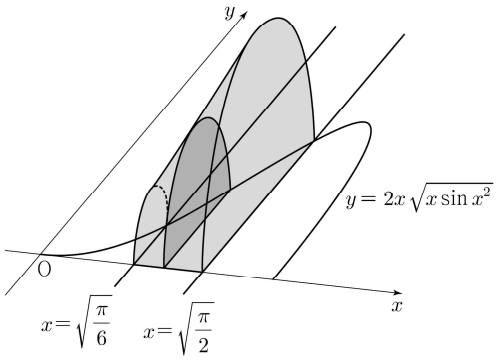
$$=[(1-2t)\sin t]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}+2\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\sin t\,dt$$

$$=\left(1-\frac{5}{2}\pi\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(1-\frac{3}{2}\pi\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$$

05 2025학년도 9월 26번 정답률 82%

26. 그림과 같이 곡선 $y=2x\sqrt{x\sin x^2}\ (0\le x\le\sqrt{\pi})$와 x축 및 두 직선 $x=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 반원일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{\pi^2+6\pi}{48}$ ② $\frac{\sqrt{2}\pi^2+6\pi}{48}$ ③ $\frac{\sqrt{3}\pi^2+6\pi}{48}$
④ $\frac{\sqrt{2}\pi^2+12\pi}{48}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}\pi^2+12\pi}{48}$

정 답 ③

해 설

$\sqrt{\frac{\pi}{6}}\le t\le\sqrt{\frac{\pi}{2}}$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{\pi}{2}t^3\sin t^2$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}S(t)\,dt=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{\pi}{2}t^3\sin t^2dt=\frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}t^3\sin t^2dt$$

이때 $t^2=u$라 하면 $t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$일 때 $u=\frac{\pi}{2}$, $t=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$일 때 $u=\frac{\pi}{6}$이고, $2t=\frac{du}{dt}$이므로

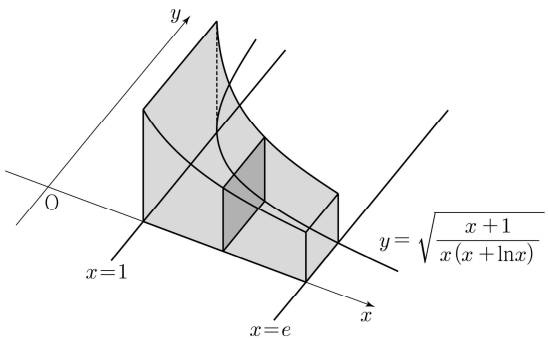
$$\frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}t^3\sin t^2\,dt=\frac{\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}u\sin u\,du$$

$$=\frac{\pi}{4}\left([-u\cos u]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos u\,du\right)=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+[\sin u]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{12}\pi+1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}\pi^2+6\pi}{48}$$

06 2025학년도 수능 26번 정답률 82%

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\frac{x+1}{x(x+\ln x)}}$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=e$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\ln(e+1)$ ② $\ln(e+2)$ ③ $\ln(e+3)$
④ $\ln(2e+1)$ ⑤ $\ln(2e+2)$

정 답 ①

해 설

직선 $x=t\ (1\le t\le e)$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\left(\sqrt{\frac{t+1}{t(t+\ln t)}}\right)^2=\frac{t+1}{t(t+\ln t)}$

따라서 이 입체도형의 부피는

$\int_1^e S(t)dt=\int_1^e\frac{t+1}{t(t+\ln t)}dt$

이때 $t+\ln t=s$라 하면

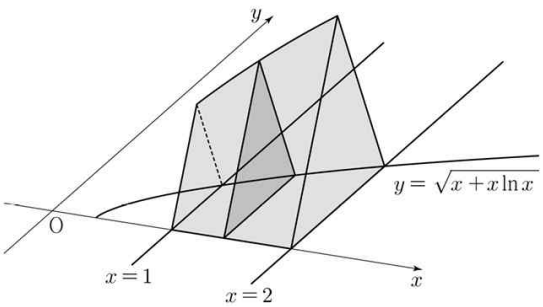
$\frac{ds}{dt}=1+\frac{1}{t}=\frac{t+1}{t}$이고 $t=1$일 때, $s=1$, $t=e$일 때

$s=e+1$이므로 $\int_1^e S(t)dt=\int_1^e\frac{t+1}{t(t+\ln t)}dt=\int_1^{e+1}\frac{1}{s}ds$

$=[\ln s]_1^{e+1}=\ln(e+1)$

07 2026학년도 수능 26번 정답률 78%

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x+x\ln x}$ 와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{\sqrt{3}(3+8\ln 2)}{16}$ ② $\frac{\sqrt{3}(5+12\ln 2)}{24}$ ③ $\frac{\sqrt{3}(1+12\ln 2)}{16}$

④ $\frac{\sqrt{3}(1+2\ln 2)}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}(1+9\ln 2)}{12}$

정 답 ①

해 설

x에 따른 단면적의 넓이를 구하자.

단면이 정삼각형이므로 한 변의 길이를 이용하여 구할 수 있다.

정삼각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{x+x\ln x}$ 이므로 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{x+x\ln x})^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(x+x\ln x)$이다.

따라서, 입체도형의 부피는 $\int_1^2 \frac{\sqrt{3}}{4}(x+x\ln x)dx$이다.

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{3}}{4}(x+x\ln x)dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}+2\ln 2\right)$$

유형 06 정적분과 곡선의 길이

01 2022학년도 수능 27번 정답률 63%

27. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치가 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 중점일 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$ ② $\frac{e^4}{2}-\frac{5}{16}$ ③ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{4}$

④ $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{8}$

정 답 ①

해 설

★ 본격적인 풀이에 들어가기 전에,
중점을 어떻게 구하는지부터 알고 넘어갑시다.

두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$의 중점 M의 좌표는
$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ 입니다.
즉, 중점의 x좌표는, 두 점의 x좌표의 합 ÷ 2 이고,
중점의 y좌표는, 두 점의 y좌표의 합 ÷ 2입니다.

==========

문제에서 주어진 두 함수가 만나는 교점에 대해 알아봅시다.
$x^2=t^2x-\frac{\ln t}{8}\Leftrightarrow x^2-t^2x+\frac{\ln t}{8}$
근과 계수의 관계에 의해, 교점의 x좌표의 합은 t^2입니다.
즉, 두 교점의 x좌표를 각각 x_a, x_b라 하면,
$x_a+x_b=t^2$입니다.

교점의 y좌표 합을 구해봅시다.
두 교점의 y좌표는 각각 $(x_a)^2$, $(x_b)^2$ 입니다.
따라서, 두 교점의 y좌표 합은
$(x_a)^2+(x_b)^2=(x_a+x_b)^2-2x_ax_b=t^4-\frac{\ln t}{4}$
($\because$ 근과 계수의 관계에 의해, x좌표의 곱은 $\frac{\ln t}{8}$입니다.)

따라서 중점 P의 좌표는 $\left(\frac{t^2}{2},\ \frac{4t^4-\ln t}{8}\right)$ 입니다.
$x=\frac{t^2}{2}$, $y=\frac{4t^4-\ln t}{8}$ 이므로
$\frac{dx}{dt}=t$, $\frac{dy}{dt}=2t^3-\frac{1}{8t}$ 입니다.

즉, 문제에서 제시한 점 P가 이동한 거리는
$$\int_1^e\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_1^e\sqrt{4t^6+\frac{t^2}{2}+\frac{1}{64t^2}}\,dt$$
$$=\int_1^e\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^4+\frac{\ln t}{8}\right]_1^e$$
$$=\left(\frac{e^4}{2}+\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{2}+0\right)=\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$$

02 2024학년도 9월 27번 정답률 52%

27. $x=-\ln 4$에서 $x=1$까지의 곡선 $y=\frac{1}{2}(|e^x-1|-e^{|x|}+1)$의 길이는? [3점]

① $\frac{23}{8}$ ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{29}{8}$ ④ 4 ⑤ $\frac{35}{8}$

정 답 ①

해 설

곡선의 길이를 구하기 위해서는 $\frac{dy}{dx}$를 알아야 합니다.
그러나, 현재 문제에서 제시한 함수를 보면 절댓값이 포함되어 있기에 x의 범위에 따라 $\frac{dy}{dx}$가 달라집니다.

그래서 x의 범위를 나누어 각 길이를 구한 후, 이를 모두 더하여 총 길이를 구하는 풀이로 진행해야 합니다.

$|e^x-1|=\begin{cases} e^x-1 & (x\geq 0) \\ 1-e^x & (x<0) \end{cases}$, $e^{|x|}=\begin{cases} e^x & (x\geq 0) \\ e^{-x} & (x<0) \end{cases}$ 입니다.

$x=0$을 경계로, 문제에서 주어진 함수를 절댓값을 제거하여 표현할 수 있습니다.

$$\frac{1}{2}(|e^x-1|-e^{|x|}+1)=\begin{cases} 0 & (x\geq 0) \\ \frac{1}{2}(-e^x-e^{-x}+2) & (x<0) \end{cases}$$

이제 구간을 나누어 곡선의 길이를 구해봅시다.
① 0에서 1까지
해당하는 함수가 $y=0$ (상수함수)이므로 길이는 1입니다.

② $-\ln 4$에서 0까지

$$\int_{-\ln 4}^{0}\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{2x}+e^{-2x}-2)}\,dx=\int_{-\ln 4}^{0}\left\{\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right\}dx$$

$$\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]_{-\ln 4}^{0}=\frac{15}{8}$$

①, ②에 의해 총 길이는 $1+\frac{15}{8}=\frac{23}{8}$

유형 07 적분 퍼즐(심화)

01 2022학년도 수능 30번 정답률 7%

30. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=1$, $\int_1^2 f(x)dx=\frac{5}{4}$
>
> (나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,
> $x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

$\int_1^8 xf'(x)dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

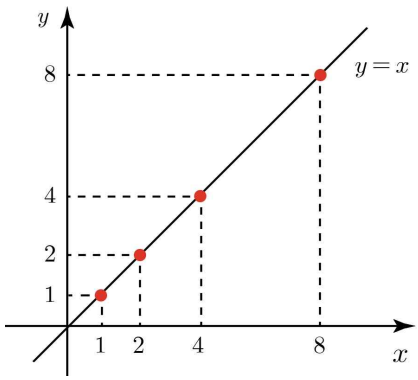
정 답 143

해 설

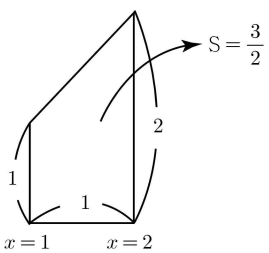
22수능 30번 문제이다. 보다시피 적분문제는 복잡하고
길을 잘못 찾으면 시간을 정말 많이 잡아먹을 수도 있다,
그러므로 판정법에 따라 확실하게 풀어내자. 우선 적분판정법에 의해
구하는 값에서 부분적분이 필요해보인다.

$$\int_1^8 xf'(x)dx= 8f(8)-f(1)-\int_0^8 f(x)dx$$

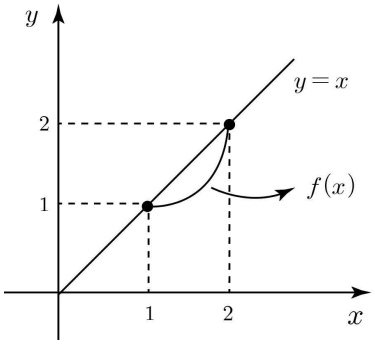
이제 문제로 들어가보자. (가) 조건에선 $f(1)=1$임을 알려주고
(나) 조건을 통해 $g(2)=2f(1)=2$임을 안다. 쭉 $f(4)=4, f(8)=8$이
성립한다. 이를 토대로 고정점을 찍어주면 다음과 같다.



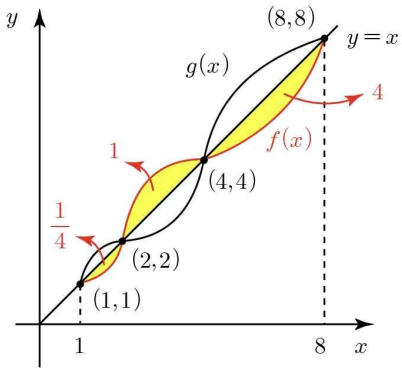
이제 $\int_1^2 f(x)dx=\frac{5}{4}\leq\frac{3}{2}$이므로



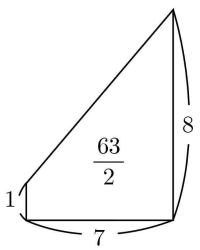
$f(x)$는 $(1,2)$에서 $y=x$아래에 위치할 것이다,



이제 이를 토대로 그래프를 완성하고
확대,축소 적분의 개념을 사용하여
각 칸의 넓이를 구하면
$\frac{1}{4}\Rightarrow 1\Rightarrow 4$로 증가할 것이다.(길이비, 넓이비)
이를 토대로 그래프를 그려보면 다음과 같고



마지막으로 구하는 값인 $\int_1^8 f(x)dx$를 구하기 위해
다음 사다리꼴에서 각 그래프의 남은 넓이를 더하고 빼면



$\int_1^8 f(x)dx=\frac{63}{2}-\frac{1}{4}+1-4=\frac{113}{4}$이고
구하는 값은 $64-1-\frac{113}{4}=\frac{139}{4}$
따라서 $p+q=143$

02 2024학년도 9월 25번 정답률 81%

25. 함수 $f(x)=x+\ln x$에 대하여 $\int_1^e\left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)\,dx$의 값은? [3점]

① $\frac{e^2}{2}+\frac{e}{2}$ ② $\frac{e^2}{2}+e$ ③ $\frac{e^2}{2}+2e$
④ e^2+e ⑤ e^2+2e

정 답 ②

해 설

우선, 위 문제를 보자마자 $f(x)$를 바로 대입할 생각을 할 수 있습니다. 그러나, 해보시면 알겠지만 식만 복잡해지고 계산 과정이 길어집니다. (물론 답은 나옵니다.)

평가원 문제는 항상, 풀이가 길게 나오지 않습니다. 본인이 내신문제를 풀고 있다는 생각이 들면 (계산을 너무 많이 하는 느낌), 그것은 평가원에서 의도한 풀이로 풀고 있는 것이 아닌 상황입니다.

$\left(1+\frac{1}{x}\right)$를 유심히 보시면, $f(x)$를 미분한 결과라는 것을 알 수 있습니다. 즉, 문제에서 주어진 식을
$\int_1^e f'(x)f(x)\,dx$ 로 봐야 합니다.

$f(x)=u$로 치환하면, $f(1)=1$, $f(e)=e+1$ 이므로

$$\int_1^{e+1}u\,du=\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^{e+1}=\frac{(e+1)^2}{2}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{e^2}{2}+e$$

03 2024학년도 수능 25번 정답률 78%

25. 양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이고, $g'(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다. 모든 양수 a에 대하여

$$\int_1^a\frac{1}{g'(f(x))f(x)}\,dx=2\ln a+\ln(a+1)-\ln 2$$

이고 $f(1)=8$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

정 답 ④

해 설

$g(f(x))=x$이므로 합성함수 미분법에 의해

$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$ 입니다.

이를 바탕으로 문제에서 주어진 식을 다시 쓰면,

$\int_1^a\frac{f'(x)}{f(x)}dx=2\ln a+\ln(a+1)-\ln 2$ 입니다.

위 등식에서 좌변은 곧

$[\ln|f(x)|]_1^a=\ln|f(a)|-\ln 8$ ($\because f(1)=8$) 입니다.

이때, $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$ 모두 양의 실수 전체 집합에서 정의되었다는 조건에서, 함수 f의 함숫값은 음수가 될 수 없음을 알 수 있습니다.

(★ 원함수 $f(x)$의 치역이 곧 역함수 $g(x)$의 정의역이 되는데, $g(x)$의 정의역 (= $f(x)$의 치역)이 양의 실수 전체 집합이기 때문입니다.)

따라서, $[\ln|f(x)|]_1^a=\ln|f(a)|-\ln 8=\ln f(a)-\ln 8$입니다.

$\ln f(a)-\ln 8=2\ln a+\ln(a+1)-\ln 2$를 간단히 정리하면,

$\ln f(a)=\ln 4a^2(a+1)$

$\rightarrow f(a)=4a^2(a+1)$입니다.

$\therefore f(2)=48$

04 2025학년도 9월 28번 정답률 55%

28. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수를 갖고, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f'(2x)\sin\pi x+x$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 역함수 $g^{-1}(x)$를 갖고,

$$\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx=2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx+\frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$ 의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{\pi}$ ② $-\frac{1}{2\pi}$ ③ $-\frac{1}{3\pi}$ ④ $-\frac{1}{4\pi}$ ⑤ $-\frac{1}{5\pi}$

정 답 ③

해 설

심화 유형 중 하나인 적분퍼즐이다.
다음문제는 수능에서 출제될 확률이 높진 않으나 반드시 해결할 줄 알아야하는 유형이다. 적분퍼즐이란 말 그대로 적분만 잘하면 퍼즐 풀 듯이 해결하면 된다.

우선 적분 퍼즐 유형은 "구하려는 값"부터 생각하는 것이 먼저다. 그리고 문제의 조건을 어떻게 이용할지 뜯어보고 퍼즐을 맞추면 된다.

우선 기본적인 적분법 판정 순서는
3. 치환적분인가? (합성함수 꼴 생각)
4. 부정적분인가? ($F(x)$를 생각)
3. 부분적분이구나!(곱의 꼴 생각)
다음과 같다.

우선 치환적분인가?
조건에는 $f'(2x)$라는 식이 보이므로 치환이 필요할 것이다.
또한 곱의 꼴이 보이므로 부분적분도 필요하다.

이를 종합하여 구하는 값을 이용하여보자.
(조건의 형태을 바꿀 수도 구하려는 값의 형태를 바꿀 수도 있다. 고민하며 바꿔보면 어려움이 없을 것이다.)
이제 문제에 들어가 조건을 풀어보면
$g(0)=0, g(1)=1$이므로

$$\int_0^1 g(x)dx+\int_0^1 g^{-1}(x)dx=1$$

따라서 $2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx+\frac{1}{4}=1-\int_0^1 g(x)dx$

이제 구하는 값을 조건에 맞게 적분하면

$$\int_0^2 f(x)\cos(\frac{\pi}{2}x)dx=\int_0^2 2f(2t)\cos\pi t\,dt\ *(x=2t)$$

$$=\frac{2}{\pi}f(2t)\sin\pi|_0^1-\frac{4}{\pi}\int_0^1 f'(2t)\sin\pi t dt=-\frac{1}{3\pi}$$

05 2026학년도 수능 28번 정답률 34%

28. 함수

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)$$

와 양수 t에 대하여 점 $(s,\ f(s))\ (s>0)$에서 y축에 내린 수선의 발과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s,\ f(s))$에서의 접선이 y축과 만나는 점 사이의 거리가 t가 되도록 하는 s의 값을 $g(t)$라 하자. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} g(t)\,dt$의 값은? [4점]

① $\frac{161}{12}+\ln 3$ ② $\frac{40}{3}+\ln 3$ ③ $\frac{53}{4}+\ln 2$

④ $\frac{79}{6}+\ln 2$ ⑤ $\frac{157}{12}+\ln 2$

정 답 ⑤

해 설

변수가 2개 등장하는 합성함수의 적분에 관한 문항이다.
문항에 제시된 조건을 따라 각각의 함수를 세팅하면 어렵지 않게 풀 수 있다.
먼저, $(s, f(s))$에서 y축에 내린 수선의 발은 $(0, f(s))$이다.
$y=f(x)$의 $(s, f(s))$에서의 접선은 $y=f'(s)(x-s)+f(s)$이므로 이 접선이 y축과 만나는 점은 $(0, f(s)-sf'(s))$이다.
따라서, $t=|f(s)-(f(s)-sf'(s))|=|sf'(s)|$이다.

$f'(x)=x-1+\frac{1}{1+x}$이므로 $t=|\frac{s^3}{1+s}|$이다.

$s>0$이므로 $t=\frac{s^3}{1+s}$이다.

문제의 조건에서 $s=g(t)$이다.

$\int g(t)dt$를 구해야 하므로 t를 s에 관한 식으로 바꾸자.

$t=\frac{s^3}{1+s}$에서 양변을 미분하면 $dt=[\frac{3s^2}{1+s}-\frac{s^3}{(1+s)^2}]ds$이다.

$\int g(t)dt=\int s(\frac{3s^2}{1+s}-\frac{s^3}{(1+s)^2})ds=\int \frac{2s^4+3s^3}{(1+s)^2}ds$이다.

$t=\frac{1}{2}$부터 $t=\frac{27}{4}$까지 적분하므로 $s=1$부터 $s=3$까지 적분 범위를 잡으면 된다.

$\int_1^3 \frac{2s^4+3s^3}{(1+s)^2}ds$의 값을 구하자.

바로 적분할 수 없으므로 식을 변형하자.

$2s^4+3s^3=(1+s)^2(2s^2-s)+(s+1)-1$이므로

$$\int_1^3 \frac{2s^4+3s^3}{(1+s)^2}ds=\int_1^3 2s^2-s+\frac{1}{(1+s)}-\frac{1}{(1+s)^2}ds$$
$$=[\frac{2}{3}s^3-\frac{1}{2}s^2+\ln(1+s)+\frac{1}{1+s}]_1^3=\frac{52}{3}-4+\ln 2-\frac{1}{4}$$
$$=\frac{157}{12}+\ln 2$$

이다.

01 2022학년도 6월 29번 정답률 34%

29. $t>2e$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$이 $x=k$에서 극대일 때, 실수 k의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$인 실수 α에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정 답 17

해 설

STEP1 극댓값 조건

- $f(x)$가 미분가능이므로 $x=k$에서 극대이면 $f'(k)=0$이다.
  $f'(k)=2t\cdot\frac{\ln k}{k}-2k=0$이다. 즉, $t\ln k=k^2$이다.
- $k=g(t)$를 대입하면 $t\ln g(t)=\{g(t)\}^2$ … ①

STEP2 α구하기

- $t=\alpha$에서 $\alpha\ln(g(\alpha))=\{g(\alpha)\}^2$
  $\alpha\ln(e^2)=e^4$에서 $\alpha=\frac{e^4}{2}$이다.

STEP3 답 구하기

- ①을 미분하면 $\ln(g(t))+\frac{tg'(t)}{g(t)}=2g(t)g'(t)$이다.
  α를 대입해서 정리하면 $g'(\alpha)=\frac{4}{3}e^{-2}$이다.
- 따라서 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{8}{9}$이고, $p+q=17$이다.

02 2022학년도 9월 29번 정답률 29%

29. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(a)=6$인 a에 대하여 $g(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다.
>
> (나) $g(x)$는 $x=b$, $x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.) [4점]

정 답 24

해 설

$g(x)$를 합성함수 형태로 나타내면

$g(x)=(x+2)e^x \circ f(x)$ 이다.

이때 함수 $(x+2)e^x$의 개형은 다음과 같다.

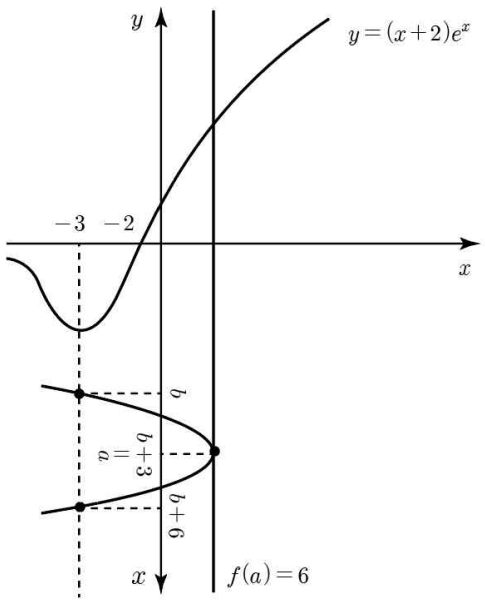
(이미지1)

이제 조건 분석에 들어가보자

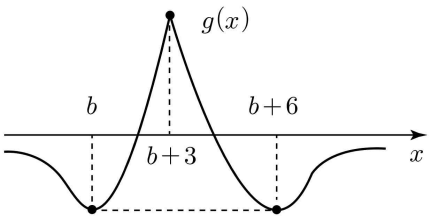
$x=b$, $x=b+6$ 에서 최소이다. 이제 N축함수를 사용하여 추론에 들어가보자

우선 (가)조건에서 $f(a)=6$인 a에 대해 $g(x)$가 최대이므로 이차함수의 축이 $x=a$이다.

이 상황을 N축함수로 나타내어 보면 다음과 같다.



이제 $g(x)$를 나타내어보면 다음과 같다. (N축 사용)



(미분가능성은 무시하였다)

이를 토대로 $f(x)$의 식을 나타내어보면

$f(x)=k(x-b)(x-b-6)-3$ 이다.

이때 $a=b+3$ 이다. (이차함수의 대칭성)

따라서 축의 방정식은 $x=a=b+3$이고

이때 $f(x)$의 값은 6이므로

$$\begin{aligned} f(b+3) &= k(b+3-b)(b+3-b-6)-3 \\ &= k \cdot 3 \cdot (-3)-3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

따라서 $k=-1$이다. $f(x)=-x^2+6x-3$ 이므로

$(\alpha-\beta)^2=36-12=24$

03 2023학년도 수능 29번 정답률 28%

29. 세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=ae^{2x}+be^{x}+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)+6}{e^{x}}=1$

(나) $f(\ln 2)=0$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

$\int_{0}^{14}g(x)dx=p+q\ln 2$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

정 답 26

해 설

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=0$ 이므로 (가)의 극한이 수렴하기 위해선

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+6)=0$ 이다.

따라서 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=c=-6$ 이다.

(나) 조건에 의해

$f(\ln 2)=4a+2b-6=0$에서 $\therefore 2a-b=6$이다.

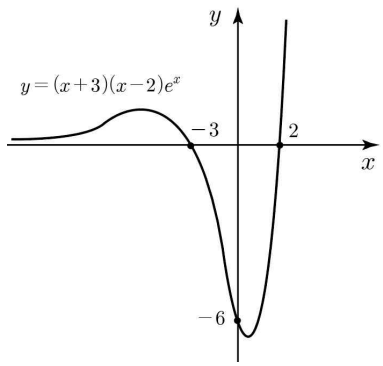
(가) 조건에서

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)+6}{e^{x}}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{ae^{2x}+be^{x}}{e^{x}}=b=1$

$\begin{cases}2a+b=3\\ b=1\end{cases}$ 에서 $a=1$

$\therefore f(x)=e^{2x}+e^{x}-6=(x+3)(x-2)\cdot e^{x}$

이므로 그래프는 다음과 같다.



이때 다음 공식이 성립하므로

$\int_{a}^{b}f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)}g(x)dx=bf(b)-af(a)$

$\int_{\ln 2}^{k}f(x)dx+\int_{0}^{14}g(x)dx=kf(k)-\ln 2f(\ln 2)=kf(k)$

$f(k)=14$ 이므로

$e^{2k}+e^{x}-6=14$,

$e^{2k}+e^{k}-20=0$에서 $e^{k}=4$이고 $k=\ln 4$이다.

$\int_{\ln 2}^{\ln 4}f(x)dx=[\frac{1}{2}e^{2x}+e^{x}-6x]_{\ln 2}^{\ln 4}=8-6\ln 2$

따라서 $\int_{0}^{14}g(x)dx=34\ln 2-8$이다.

$p=34$이고, $q=-8$이므로 $p+q=26$이다.

04 2023학년도 수능 30번 정답률 11%

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=e^{\sin \pi x}-1$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)=g(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.
> (나) 열린구간 $(0,3)$에서 방정식 $h(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

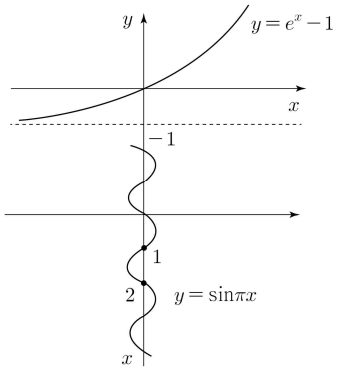
$f(3)=\frac{1}{2}$, $f'(3)=0$일 때, $f(2)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정 답 31

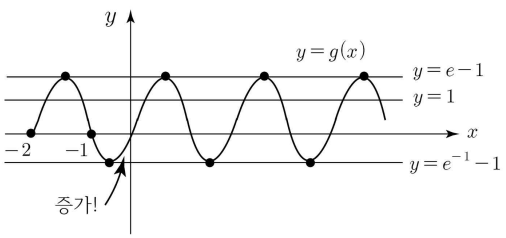
해 설

정답률 11%의 킬러문항이다.
30번 문항을 마주하였을 땐 당황하지말고
풀이 방향성 확립부터 진행하여보자 항상 30번과 같은
고난도 추론 문제에선 알고 있는 함수부터 천천히 접근하는
것이 중요하다.

STEP1 주어진 함수의 개형 추론
우선 주어진 함수 $g(x)$의 개형부터 확인하자
함수 $g(x)$는 함수 e^x-1에 $\sin \pi x$가 합성된 함수이다.
이때 e^x-1는 증가함수이므로 대체로 $\sin \pi x$의 개형을
따라가며 주기적으로 반복되는 함수일 것이다. 이제 정확한
개형 추론을 위하여 N축을 사용하여보자

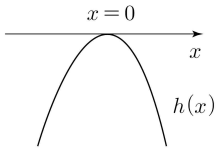


이를 토대로 합성함수의 개형을 그리면
(개념편 N축 사용법 보고오세요)

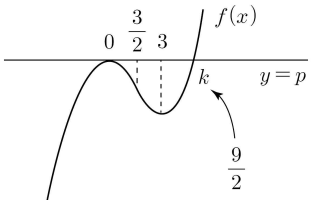


STEP2 이제 조건 분석에 들어가보면
$h(x)=g(f(x))$ 라는 것을 알 수 있다.
이는 $g(x)$라는 고정된 함수에서 함수 $h(x)$의 조건을 분석하여 힘수$f(x)$의 개형을 파악하는 함수추론 문제이다.

이제 문제파악이 끝났으니 조건 해석에 들어가자
(가)조건에서 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.
이를 나타내어보면 다음과 같다.

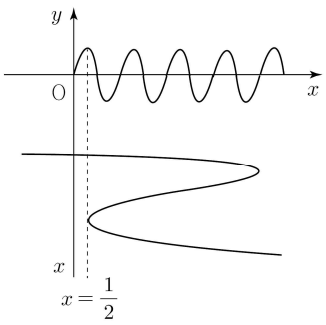


이때 합성함수가 극대가 되기 위해선 겉함수 혹은 속함수가 극값을 가져야만한다. 극댓값이 0 이므로 겉함수는 $x=f(0)$에서 정수이다. 이때 겉함수 $g(x)$는 극대를 가질 수 없으므로 $f(x)$가 $x=0$에서 극값을 가진다. 이때 $f'(3)=0$이고 최고차항이 양수이므로 $x=0$에서 극대를 가져야만 한다.



또한 $h(x)$가 $x=0$이기 위해선 $f(0)$의 값이 짝수이어야만 한다. $x=$홀수에서 $g(x)$는 감소하므로 $h(x)$가 극소가 된다. 또한 (나) 조건에서 실근 개수가 7개라는 조건을 주었으므로 잠시 생각하여 보자.

$(0,3)$에서 그래프는 감소한다. $f(3)=\frac{1}{2}$이므로 7개의 실근을 가지며 $f(0)$이 짝수의 값을 가지기 위해선 $f(0)=8$이 되어야만한다.



이를 토대로 $f(x)=ax^2(x-\frac{9}{2})+b$라 나타낼 수 있고

$f(3)=\frac{1}{2}$, $f(0)=8$ 을 대입하여 $f(x)$를 구하면

$f(x)=\frac{5}{9}x^2(x-\frac{9}{2})+8$ 이다.

$\therefore f(2)=\frac{22}{9}$이고 $p+q=31$이다.

05 2024학년도 6월 26번 정답률 75%

26. x에 대한 방정식 $x^2-5x+2\ln x=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 합은? [3점]

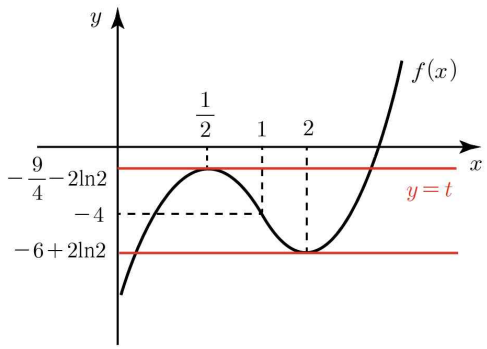
① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ -8 ④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

정 답 ②

해 설

그래프를 그려서, $y=x^2-5x+2\ln x$와 $y=t$의 교점의 개수를 확인합시다.

$f(x)=x^2-5x+2\ln x$라 합시다.



위 그림처럼, $t=-\frac{9}{4}-2\ln 2$, $-6+2\ln 2$ 일 때 문제의 조건을 만족시킵니다.

따라서, 모든 실수 t의 값의 합은 $-\frac{33}{4}$

06 2024학년도 6월 28번 정답률 26%

28. 두 상수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여
$$\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$$
이다.

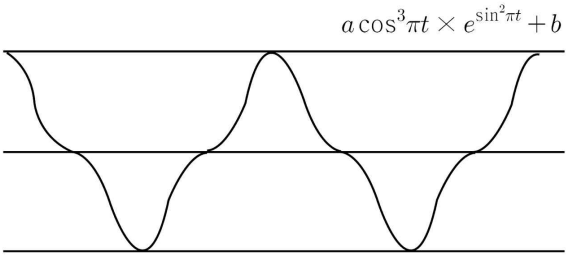
(나) $f(0)=f(2)+1$

① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{7}{64}$ ③ $-\frac{5}{32}$ ④ $-\frac{13}{64}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

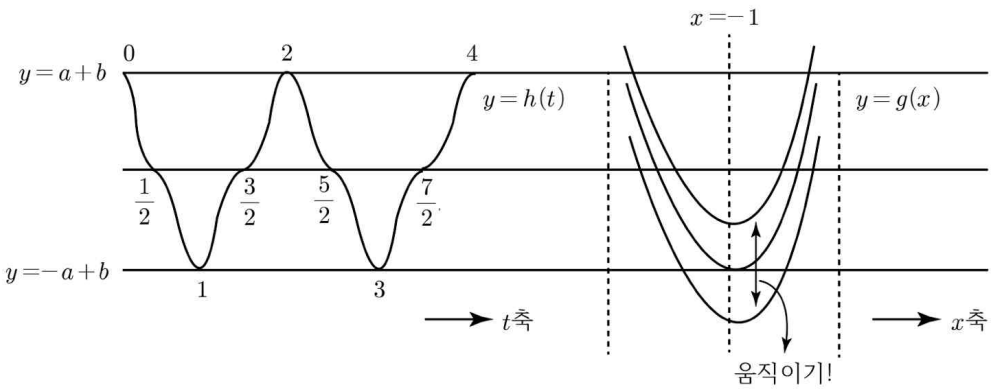
정 답 ②

해 설

정답률 26%의 고난도 함수추론 문항이다.
N축함수의 대표기출이니 자세하게 학습해보자
우선 굉장히 복잡한 항등식이 주어져있다.
우선 항상 하던대로
합성함수 꼴로 (가)의 좌변을 나타내어보면
$(x^2+2x)\bullet f(x)$의 꼴로 나타낼 수 있다.
이때 개념편에서 배운 N축함수를 사용하여보자
결국 이 항등식에서 $y=(x^2+2x)\bullet f(x)$와
$y=a\cos^3\pi t\bullet e^{\sin^2\pi t}+b$의
교점의 x좌표가 $f(t)$로 나타내어 질 수 있다.
교점의 x좌표 : $f(t)$
$y=a\cos^3\pi t\bullet e^{\sin^2\pi t}+b$: $h(t)$
$y=(x^2+2x)$: $g(x)$로 정리하여 표현할 것이다.
이제 $h(t)$의 대략적 개형을 그려보도록 하자
대략적 미분을 통하여 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다

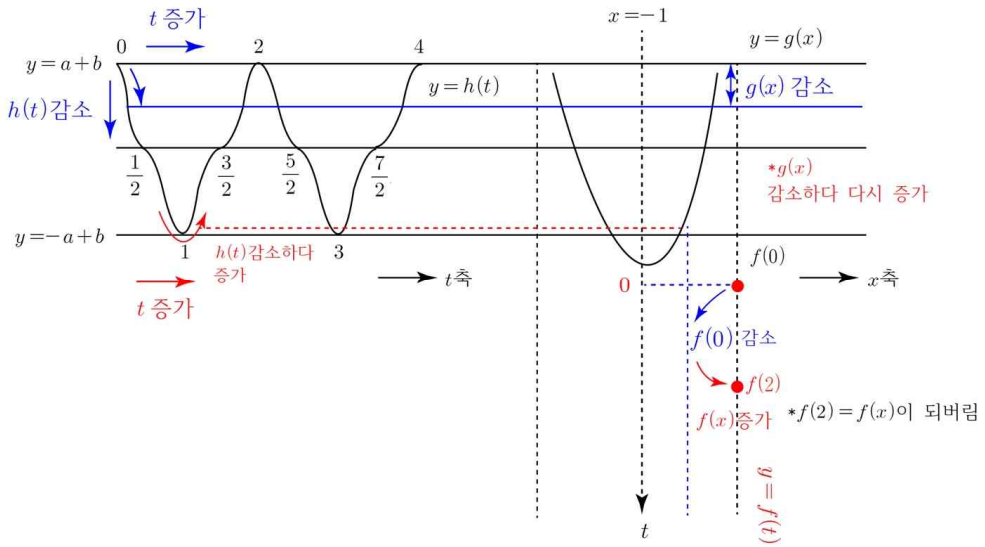


(스스로 도함수를 구해 개형을 그려보길 바란다.)
이제 N축함수를 이용하여보자

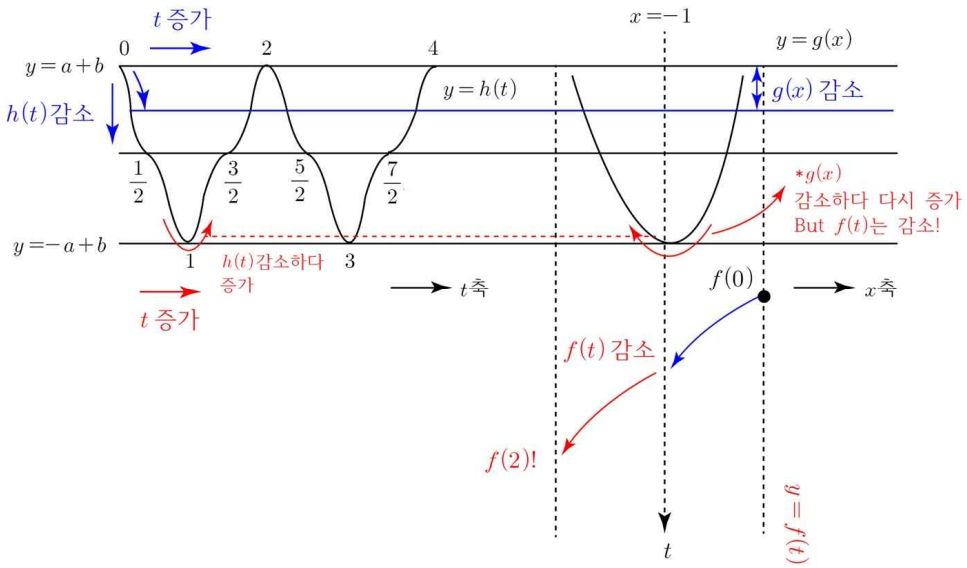


좌측에는 $h(t)$를 우측에는 $g(x)$를 위치하고 $g(x)$를 움직여보며 조건을 만족시켜보자

우선 문제의 기본조건에서 $f(x)$는 연속함수이므로 끊어져선 안된다. 이때 $g(x)$의 최솟값이 $h(t)$보다. 작다면 어떻게 될까?



우선 (나)조건에 의해 $f(0)$은 $f(2)$보다 크므로 t값이 증가함에 따라 $g(x)$의 값은 점점 감소할 것이다.
그러다 t값이 $h(t)$가 최솟값에 도달하는 값에 도달하고 다시 $h(t)$가 증가하게 되면 $g(x)$도 증가하게 될 것이다.
그렇게 된다면 $f(2)+1=f(0)$이 된다는 조건을 만족하지 못한다. (함숫값이 다시 올라가면 $f(t)$의 값도 올라가게 되므로) 따라서 $g(x)$의 최솟값이 $h(t)$보다 크거나 같을 것이다, 이때 더 크다면 존재성 모순이므로 최솟값이 일치할 수 밖에 없다.
(개념편 확인바람, *N축함수의 조건)



따라서 $h(t)$의 최솟값은 -1이므로 $-a+b=-1$의 식이 나오게 되고 (나) 조건에 의해 $f(0)=-\frac{1}{2}$, $f(2)=-\frac{3}{2}$일 것이다.

즉, $h(t)$의 최댓값은 $a+b=-\frac{3}{4}$이다. 따라서 $a=\frac{1}{8}$, $b=-\frac{7}{8}$이고 답은 $-\frac{7}{64}$이다.

아마 처음에 보면 이해가 안될 확률이 높다,
N축함수는 시험장에서 항등식 문제를 정말 사기적으로 해결할 수 있다.

07 2024학년도 9월 28번 정답률 21%

28. 실수 $a\,(0<a<2)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 2|\sin 4x| & (x<0) \\ -\sin ax & (x\geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수

$$g(x)=\left|\int_{-a\pi}^{x} f(t)\,dt\right|$$

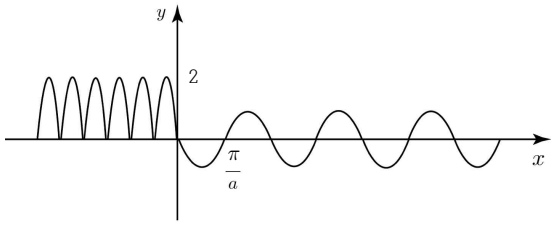
가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, a의 최솟값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

정 답 ②

해 설

조건을 우직하게 따라가다보면 저절로 풀리는 문제이다.
어렵지 않게 해결해 보도록 하자
항상 아는 함수부터 들어가자
우선 $f(x)$의 식 전체를 알고 있으므로
$f(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



이때 $x<0$에서 한 주기 적분값은 1이며,
$x>0$에서 주기의 반의 넓이는 $\frac{2}{a}$이다.
이제 주어진 $g(x)$를 관찰하여 보면 굉장히 복잡한 구조이다,
우선 한 번에 모든 걸 해결할 순 없으니 치환을 해보도록 하자
$h(x)=\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt$ 라고 하자
따라서 $g(x)=|h(x)|$이므로 $g(-a\pi)=h(-a\pi)=0$이다.
이제 조건을 사용하여 보자
함수 $g(x)$가 미분가능하므로 $h'(-a\pi)=0$이고
따라서 $a=\frac{n}{4}$가 될 것이다. (n은 자연수)

이제 살짝 복잡하니 잘 따라와야 한다.
$g(x)$는 미분가능하므로 y축이 $g(x)$가 $x<0$에서
삼중근을 갖는 지점에 놓이게 된다.(그래프와 이해바람)
이때 $x>0$의 함숫값이 그보다 덜 내려오게 되면 미분
가능하다. (첨점이 생기지 않음)

이를 토대로 함숫값의 차이를 구하면
$x<0$에서는 $h(0)-h(-a\pi)=n$이고
$x>0$에서는 $\frac{2}{a}$이므로

$n>\frac{2}{a}$이고 $a=\frac{n}{4}$이므로 $n^2>8$이다.
따라서 $n>2\sqrt{2}$이므로 $n=3$, $\therefore a\geq\frac{3}{4}$이다.

08 2023학년도 9월 30번 정답률 8%

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 구간 $(0, \infty)$에서 $g(x) \geq 0$인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x \leq -3$인 모든 실수 x에 대하여
> $f(x) \geq f(-3)$이다.
> (나) $x > -3$인 모든 실수 x에 대하여
> $g(x+3)\{f(x)-f(0)\}^2 = f'(x)$이다.

$\int_4^5 g(x)dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정 답 28

해 설

항상 강조하는 것이지만 30번이라는 숫자에 쫄지말자
복잡한 문제일수록 길을 따라가면 발상 없이 풀 수 있다.
문제에 들어가보면 미적분 문제임에도 사차함수가 등장했다.
수2에서 배운 내용을 잘 종합하여 들어가보도록 하자

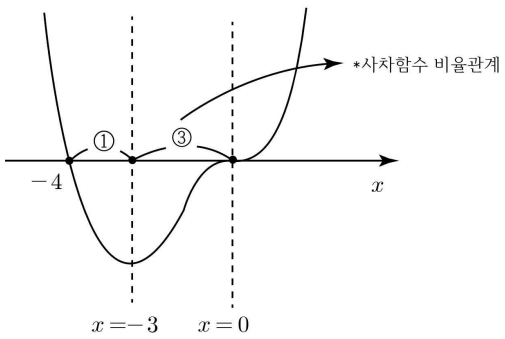
우선 (가) 조건은 함수에 대해 아는 것이 별로 없으니
넘어가도록 하자
이제 (나) 조건을 보자
$g(x)$와 $f(x)$의 두 함수로 구성이 되어있다.
이를 $g(x+3)$에 대해 정리하면
$g(x+3) = \frac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}$이다. 이제 적분 문제이니 구하는 값을 보면 $g(x)$의 적분값을 구하는 것이므로 복잡하지 않은 식의 적분이므로
다음과 같이 고쳐주겠다.

$$\int_4^5 g(x)dx = \int_1^2 g(x+3)dx = \int_1^2 \frac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}dx$$

이제 적분판정법을 사용하여보자
치환적분인가? 분모에 복잡한 식이 있으며 분자에 미분한 함수가 보이므로 맞다는 것을 알 수 있다.
$f(x)-f(0)$를 t로 치환하면
$f'(x)dx = dt$이다
따라서 치환 적분법의 결과는

$$\int_{f(1)-f(0)}^{f(2)-f(0)} \frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{f(1)-f(0)} - \frac{1}{f(2)-f(0)}$$

이다. 즉 $f(0), f(1), f(2)$ 세 값만 구하면 된다,
이제 문제를 다시 보면 구간 $(0,\infty)$에서 $g(x) \geq 0$이다,
즉, $x \geq -3$에서 $g(x+3) \geq 0$ 이다.
이때 분모는 완전제곱식이므로 $f'(x) \geq 0$이다,
즉 이 사차함수는 $x \geq -3$에서 증가한다.
(가) 조건을 확인하면 $f(-3)$이 최솟값인 것도
확인가능하다.
이제 (나)의 조건식에 0을 대입하여 보면
$f'(0) = 0$임을 알 수 있다. 다음과 같은 함수일 것이다.



$f(x) = x^3(x+4)+C$
적분상수가 있지만 차를 구하는 것이니 문제가 없다,
$f(1)-f(0) = 5$, $f(2)-f(0) = 48$
따라서 답은 $\frac{1}{5} - \frac{1}{48} = \frac{43}{240}$
즉, $p+q = 283$이다.

09 2024학년도 수능 28번 정답률 15%

28. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이고, $x<0$일 때 $f(x)=-4xe^{4x^2}$이다.
모든 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$라 하자.
두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모든 양수 t에 대하여

$$2g(t)+h(t)=k \ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킨다. $\int_0^7 f(x)dx=e^4-1$일 때, $\frac{f(9)}{f(8)}$의 값은? [4점]

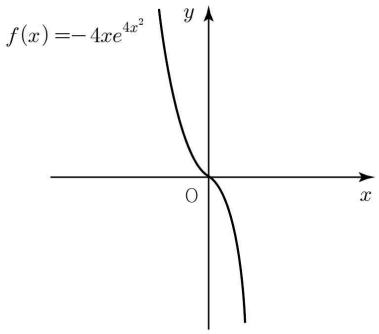
① $\frac{3}{2}e^5$ ② $\frac{4}{3}e^7$ ③ $\frac{5}{4}e^9$ ④ $\frac{6}{5}e^{11}$ ⑤ $\frac{7}{6}e^{13}$

정 답 ②

해 설

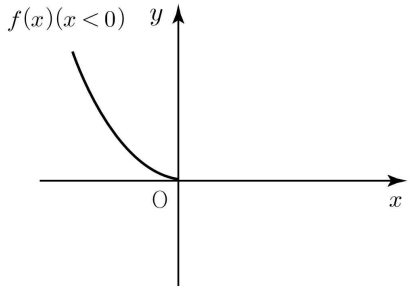
정답률 15%의 고난도 문제이다. 하지만 N축함수와 항등식을 잘 사용하면 어렵지 않게 해결할 수 있다.

우선 항상 그렇듯 아는 함수부터 시작하자
현재 $x<0$에서 $f(x)$를 알고 있으니 한 번 그려보면
$f'(x)=(-32x^2-4)e^{4x^2}$이므로

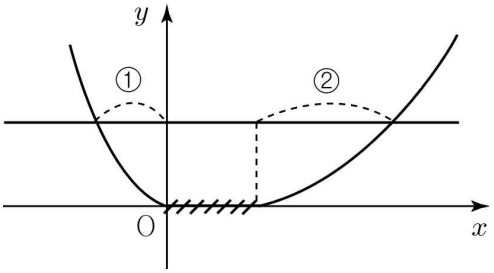


이때
$x<0$에서 $f(x)$를 $f_1(x)$이라하고
$x>0$에서 $f(x)$를 $f_2(x)$이라하자

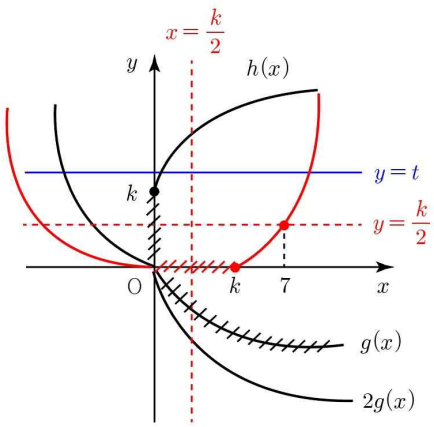
1)



또한 $f(x)=t$라는 방정식이 나왔으므로 N축함수를 사용하여 풀어보도록 하자!
이때 $2g(t)+h(t)=k$에 따라 다음과 같은 그래프를 얻을 수 있다.



즉, $f_2(x)=f_1(\frac{k-x}{2})$라는 식을 얻을 수 있다.
그리고 이를 통해 $g(t)$와 $h(t)$를 그려주면 다음과 같은 그래프가 나온다.



($\because f(g(t))=t$, $f(h(t))=t$이므로 N축함수의 정의에 따라서 회전 그래프를 그릴 수 있다.)
마지막으로 $\int_0^7 f(x)dx=e^4-1$은

$\int_0^7 f_2(x)dx=\int_0^7 f_1(\frac{k-x}{2})dx=e^4-1$이므로

이때 $\frac{k-x}{2}=m$이라하면 $-\frac{1}{2}dx=dm$이다.

따라서 $\int_{\frac{k-7}{2}}^{0} -8me^{4m^2}dm=e^{(k-7)^2}-1$이다.

$\therefore k=5 \text{ or } 9$이고 $k<7$이므로 $k=5$이다.

따라서 $f(9)=f_2(9)=f_1(-2)=8e^{16}$이고

$f(8)=f_2(8)=f_1(-\frac{3}{2})=6e^9$

따라서 $\frac{f(9)}{f(8)}=\frac{4}{3}e^7$이다.

10 2024학년도 수능 30번 정답률 8%

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=|\sin x|\cos x$$

이다. 양수 a에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 함수

$$h(x)=\int_0^x \{f(t)-g(t)\}\,dt$$

가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$\frac{100}{\pi}\times(a_6-a_2)$의 값을 구하시오. [4점]

정 답 125

해 설

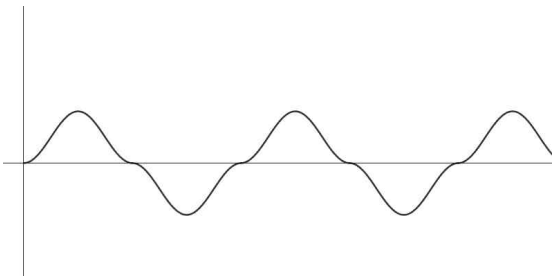
24 수능 30번 문제로 정답률 8%의 고난도 문항이지만 전형적인 문제이니 잘 따라가면 어려움 없이 풀 수 있다.

우선 $f'(x)$의 식이 있으니 직접 적분하여 원시함수를 구하여보도록 하자

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x}{2} & (\sin x \geq 0)\\ -\dfrac{\sin^2 x}{2} & (\sin x<0)\end{cases}$$ 이다.

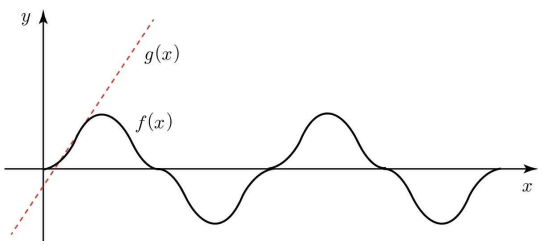
이때 적분상수를 고려하지 않아도 되는 이유는 문제에서 함수 $f(x)-g(x)$를 이용하기 때문에 $f(x)$의 접선 $g(x)$에 대하여 둘의 차에서 적분상수가 소거되기 때문이다. 따라서 일반성을 잃지 않는다.

이제 $f(x)$의 그래프를 그려보도록 하자



$h(x)$의 도함수는 $f(x)-g(x)$이므로 극값을 가지기 위해선 접선이 $f(x)$를 뚫는 상황 즉, 변곡접선이어야한다.

($x=\frac{\pi}{2}$인 경우와 같이 $f(x)$가 극값을 갖는 x에서는 부호 변화가 발생하지 않으므로 $h(x)$의 극값이 아니다.)



즉, a는 $f'(x)=0$의 근이므로

$a_2=\frac{3}{4}\pi$, $a_6=2\pi$이고 $\frac{100}{\pi}(2\pi-\frac{3}{4}\pi)=125$이다.

11 2025학년도 6월 28번 정답률 8%

28. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}(x-a-2)^2e^x & (x\geq a)\\ e^{2a}(x-a)+4e^a & (x<a)\end{cases}$$

일 때, 실수 t에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 x의 최솟값을 $g(t)$라 하자.

함수 $g(t)$가 $t=12$에서만 불연속일 때, $\dfrac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))}$의 값은?

(단, a는 상수이다.) [4점]

① $6e^4$ ② $9e^4$ ③ $12e^4$ ④ $8e^6$ ⑤ $10e^6$

정 답 ④

해 설

전형적인 N축함수 문제이다. 정답률에 쫄지 말고 천천히 분석해보자

우선 아는 것부터 시작하도록 하자.

$f(x)$의 개형을 대략적으로 구해보자.

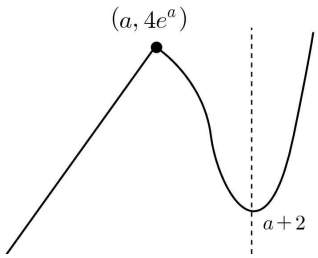
개형 파악을 위해 도함수 근을 구할 것인데 이는 초월함수 단축암기식을 통하여 빠르게 파악할 수 있다.

● 초월 함수 단축 암기식

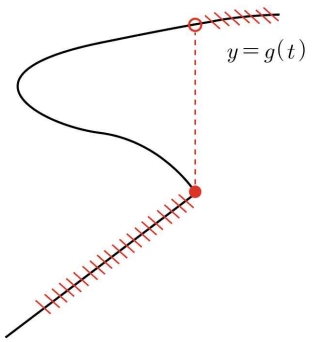
$p(x-a)^ne^{bx}$의 도함수 근은 $a,\ a-\dfrac{n}{b}$이다.

이를 통해 $f(x)$의 도함수 근이 $a, a+2$ 이다.

$f(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



그리고 이때 $f(x)=t$를 만족시키는 x의 최솟값을 $g(t)$라 하였다. 이를 N축함수로 해석하기 위해 회전을 시키고 $g(t)$의 정의에 따라 함수를 나타내면 빨간색으로 칠한 함수와 같다.



$g(t)$가 $x=t$에서 불연속이 되는 t의 값은 $4e^a$이다.

즉, $e^a=3$이다.

그리고 이때

$t=f(a+2)$일 때 $g(t)$의 기울기는 $\dfrac{1}{e^{2a}}$이고

$t=f(a+6)>4e^a$일 때 $g(t)$의 기울기는 $\dfrac{1}{f'(a+6)}$이므로

$f'(a+6)=e^{a+6}\times(a+6-a)\times(a+6-a-2)=3e^6\times6\times4$

마지막으로 답을 구하면 $\dfrac{1}{9}\times6\times4\times3e^6=8e^6$이다.

12 2025학년도 6월 29번 정답률 16%

29. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\ln(1+x^2)+a$ (a는 상수)와 두 양수 b, c에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq b) \\ -f(x-c) & (x<b) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
$a+b+c=p+q\ln 2$일 때, $30(p+q)$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

정 답 55

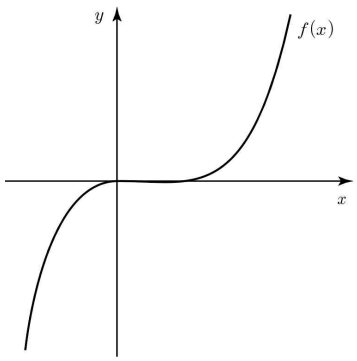
해 설

25학년도 29번으로 나온 문제이지만
29번이라기엔 터무니없이 쉬우니 기본을 따라가도록 하자
$g(x)$가 실수 전체 집합에서 미분가능하므로
연속성과 미분가능성을 이용하여 식이 2개가 나올 것이다.

① $f(b)=-f(b-c)$ … (연속성 조건)
② $f'(b)=-f'(b-c)$ … (미분가능성 조건)

우선 $f(x)$에 미지수 a가 존재하므로
미분가능성 조건을 먼저 풀어보도록 하자

$f'(x)=x^2-2x+\frac{2x}{1+x^2}=\frac{x^2(x-1)^2}{1+x^2}$이고 $f'(x) \geq 0$이므로
$f(x)$의 개형을 그리면 다음과 같다,



이때 함수 $-f(x-c)$는 $f(x)$를 x축 대칭이동 한 것이므로
미분가능하기 위해선 $f'(b)=0$이다.
이때 b는 양수이므로 $b=1$이다.
이때 자명하게 기울기가 0인 지점인 $x=1$을
평행이동시켜 $x=0$에 위치하게 하려면 $c=1$임을 알 수있다.
이제 a를 구하기 위해 연속성 조건을 활용하면
$f(0)=-f(1)$이므로 $a=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln 2$이다.

마지막으로 $a+b+c=\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\ln 2$이고 $30(p+q)=55$이다.

13 2025학년도 9월 30번 정답률 16%

30. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(k-|x|)e^{-x}$$

이라 하자. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $F(x)$에 대하여 $F(0)$의 최솟값을 $g(k)$라 하자.

모든 실수 x에 대하여 $F'(x)=f(x)$이고 $F(x)\geq f(x)$이다.

$g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)=pe+q$일 때, $100(p+q)$의 값을 구하시오.

(단, $\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$이고, p와 q는 유리수이다.) [4점]

정 답 25

해 설

위 문제는 25학년도 9모의 하이라이트 문제이다.
고난도 문제이며 계산량으로 승부를 본 문제이니 잘따라오길 바란다.
우선 $F(x)$와 $f(x)$의 대소 비교 조건이 나왔으므로
새롭게 함수를 정의하도록 하자
(복잡한 방정식은 우변에 다 밀어넣고 생각하자
곡선과 곡선의 비교는 볼록성을 알 때만 사용할 것)
$P(x)=F(x)-f(x)$라 하자

우선 $f(x)$의 부정적분을 구해보면

$$F(x)=\begin{cases}(x-k+1)e^{-x}+C & (x\geq 0)\\ (-x-k-1)e^{-x}+C+2 & (x<0)\end{cases}$$

이때 반응적분을 사용하면 도함수를 구하지 않고 바로 구할 수 있다.
(두번째 식에서 $C+2$ 가 된 이유는 $F(x)$가 연속인 조건을 고려한 것이다.)

*지수함수 반응적분

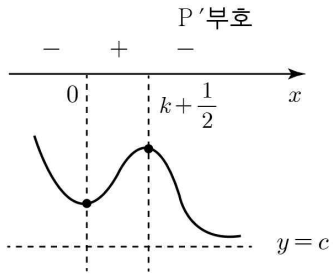
$$\int f(x)e^{-x}dx=-(f+f'+f''+\cdots)e^{-x}+C$$
$$\int f(x)e^{x}dx=(f-f'+f''-\cdots)e^{x}+C$$

그리고 $P(x)$의 도함수는

$$P'(x)=\begin{cases}(-2x+2k+1)e^{-x} & (x\geq 0)\\ (2x+2k-1)e^{-x} & (x\leq 0)\end{cases}$$

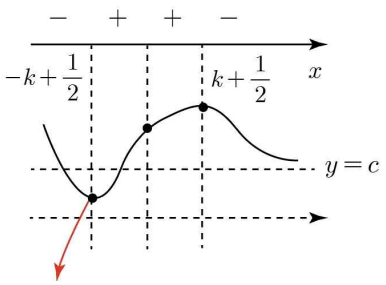
이제 k의 범위에 따라 경우를 나누어보면

(1) $0<k\leq\frac{1}{2}$



$C\geq 0$, $g(k)=-k+1$이다.

(2) $k\geq\frac{1}{2}$인 경우



$\left(-k+\frac{1}{2},\ -2e^{k-\frac{1}{2}}+c+2\right)\rightarrow g(k)=-1+2e^{k-\frac{1}{2}}-k$

$g(k)=-1+2e^{k-\frac{1}{2}}-k$ 이다.

따라서 $g(\frac{1}{4})+g(\frac{3}{2})=2e-\frac{7}{2}$이고,
$100(p+q)=25$이다.

14 2025학년도 수능 30번 정답률 18%

30. 두 상수 $a\,(1 \le a \le 2)$, b에 대하여 함수 $f(x) = \sin(ax + b + \sin x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0) = 0$, $f(2\pi) = 2\pi a + b$
> (나) $f'(0) = f'(t)$인 양수 t의 최솟값은 4π이다.

함수 $f(x)$가 $x = \alpha$에서 극대인 α의 값 중 열린구간 $(0, 4\pi)$에 속하는 모든 값의 집합을 A라 하자. 집합 A의 원소의 개수를 n, 집합 A의 원소 중 가장 작은 값을 α_1이라 하면,

$n\alpha_1 - ab = \dfrac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정 답 17

해 설

25수능 30번 문항이다. 현장에선 굉장히 삼각함수가 두 번 합성이 되어 있어 난이도가 높아보이지만 전형적인 문제로서 어렵지 않게 풀 수 있을 것이다,

이제 문제를 들어가보자 우선 아는 함수가 없다.

따라서 주어진 조건부터 천천히 나아가보도록 하자

우선 $f(0) = 0$이므로 $\sin b = 0$이다.

즉, $b = k\pi$(k는 정수)이다.

이제 $f(2\pi) = 2\pi a + b$를 이용하여

$\sin(2\pi a + b) = 2\pi a + b$이다.

$\sin x = x$의 실근은 오직 $x = 0$임으로

$2\pi a + b = 0$이다.

따라서 (가)조건을 종합하여 $a = -\dfrac{k}{2}$이고

이때 k는 정수이므로

$a = 1, \dfrac{3}{2}, 2$ 이다.

이제 (나) 조건을 보도록 하자

$f'(0) = (a+1)\cos b$이고

$f'(4\pi) = (a+1)\cos(4\pi a + b)$이다.

이때 주기가 2π이지만 t의 최솟값이 4π이므로

$a = \dfrac{3}{2}$라는 것을 특정할 수 있다,(주기성)

따라서 $b = -3\pi$이다.

이를 토대로

$f'(x) = \left(\dfrac{3}{2} + \cos x\right) \cdot \cos\left(\dfrac{3}{2}x - 3x + \sin x\right)$이다.

$f'(0) = 0$이 되기 위해선 $\cos\left(\dfrac{3}{2}x - 3\pi + \sin x\right) = 0$

$\left(\dfrac{3}{2} + \cos x > 0\text{이므로}\right)$

이제 복잡한 함수가 등장하였으니

$g(x) = \dfrac{3}{2}x - 3\pi + \sin x$로 치환하면

$g(0) = -3\pi$, $g(4\pi) = 3\pi$이므로

이때 극값의 지점의 개수을 구하면 3개다,

$n = 3$

이제 α_1은 집합 A의 가장 작은 원소이므로

α_1는 $g(x) = -\dfrac{3}{2}\pi$의 근이다.

이를 계산하면 $\alpha_1 = \pi$이다.

따라서 구하는 값은

$3\pi + \dfrac{9}{2}\pi = \dfrac{15}{2}\pi$이므로

$p + q = 17$

15 2026학년도 6월 28번 정답률 12%

28. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$와 두 상수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times e^{b}$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3+ax+b=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$$

이다.

(나) $f(-3)f(3)<0$, $f'(2)>0$

① $-3e^{-\frac{4}{3}}$ ② $-\frac{5}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ③ $-\frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

④ $e^{-\frac{4}{3}}$ ⑤ $\frac{7}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

정 답 ①

해 설

이 문항은 풀이가 바로 눈에 보이지 않는 난이도 있는 문항이다. 본 해설은 가장 기본적이고 정직한 풀이를 담아놓았고, 추가적으로 변곡접선을 이용한 풀이는 강의에서 소개하겠다. 학생들은 아래 적힌 풀이만 이해하고 활용할 줄 알아도 시험장에서 본 문항을 잘 풀어냈을 것이다.

STEP1 주어진 식을 미분하여 조건 활용하기

(가)에서 주어진 식만으로는 (나)의 조건을 활용할 수 없다.

따라서, (가)의 식에서 양변을 미분해보자.

$5(f(x))^4f'(x)+3(f(x))^2f'(x)+a=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$ 이다.

위의 식에서도 특별히 조건을 활용할 방법이 바로 보이지 않는다.

따라서, 양변을 다시 한번 미분해보자.

$$20(f(x))^2(f'(x))^2+5(f(x))^4f''(x)+6f(x)(f'(x))^2+3(f(x))^2f''(x)$$
$$=\frac{2}{x^2+x+\frac{5}{2}}-\frac{(2x+1)^2}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2}=\frac{-2(x-1)(x+2)}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2}$$

이다.

여기에서, 좌변이 모두 $f(x)$의 항을 포함하고 있음을 알 수 있다.

(나)의 $f(-3)f(3)<0$을 보고, 사잇값 정리를 떠올릴 수 있어야 한다.

$f(3)$과 $f(-3)$의 부호가 다르므로 $-3<\alpha<3$에서 $f(\alpha)=0$인

α가 존재한다.

STEP2 (나) 조건으로 답을 구하기

두 번 미분한 함수에 $x=\alpha$를 대입하자.

좌변은 0이므로 우변이 0이려면 $\alpha=1,-2$ 중 하나이다.

두 값 중 결정하기 위해 $f'(2)>0$이라는 조건을 활용하자.

한 번 미분한 함수에 $\alpha=1$을 대입하면 $a=\frac{2}{3}$이고,

$\alpha=-2$를 대입하면 $a=-\frac{2}{3}$이다.

한 번 미분한 함수에서 $x=2$를 대입하면

$\{5(f(2))^4+3(f(2))^2\}f'(2)=\frac{10}{17}-a$이다.

좌변이 양수이므로, $a=\frac{2}{3}$이면 불가능하다.

따라서, $a=-\frac{2}{3}$이고, 원래의 식에 $x=-2$를 대입하면

$-2a+b=\ln(\frac{9}{2})$이므로 $b=\ln(\frac{9}{2})-\frac{4}{3}$이다.

$a\times e^{b}=-3e^{-\frac{4}{3}}$이다.

16 2026학년도 6월 30번 정답률 9%

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\left|f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이고, $g(0)>0$이다.
(나) $g'(\ln 3)<0$, $|g'(-\ln 3)|=\frac{3}{8}g(-\ln 3)$

$g(0)$의 최솟값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정 답 25

해 설

전형적인 미분을 활용하여 개형을 찾고, 주어진 조건을 활용하는 문항이다.

STEP1 미분하여 경우 나누기

$g(x)$가 $x=0$에서 극소이고, $g(0)>0$이다.

따라서, $f(\frac{2}{1+e^{-x}})$가 $x=0$에서 양수인 값을 가지고 극소이거나,

$f(\frac{2}{1+e^{-x}})$가 $x=0$에서 음수인 값을 가지고 극대이다.

$f(\frac{2}{1+e^{-x}})$가 $x=0$에서 극값을 가지므로 $x=0$에서 미분계수가 0이다.

따라서, $\frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}f'(\frac{2}{1+e^{-x}})$에 0을 대입하면 $f'(1)=0$이다.

(나)에서 $g'(\ln 3)<0$이므로 $f(\frac{2}{1+e^{-x}})$가 $x=\ln 3$에서 양수인 값을 가지고 기울기가 음수이거나, 음수인 값을 가지고 기울기가 양수이다.

$g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $f(\frac{2}{1+e^{-x}})$는 양수 값만을 가지거나 음수 값만을 가진다. ($\because f(\frac{2}{1+e^{-x}})$가 x축을 뚫고 지나가는 경우가 있으면 미분가능하지 않다.)

STEP2 조건을 활용하여 정답 개형을 찾기

(나) 조건의 $|g'(-\ln 3)|=\frac{3}{8}g(-\ln 3)$을 식에 대입하자.

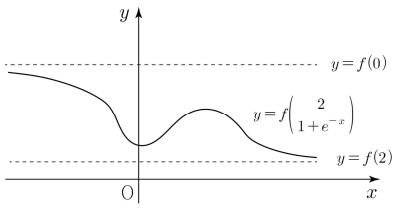
$f(\frac{2}{1+e^{-x}})$을 미분하면, $\frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}f'(\frac{2}{1+e^{-x}})$이다.

따라서, $|g'(-\ln 3)|=|\frac{3}{8}f'(\frac{1}{2})|$이다.

$g(-\ln 3)=|f(\frac{1}{2})|$이므로 $|f(\frac{1}{2})|=|f'(\frac{1}{2})|$이다.

① $f(\frac{2}{1+e^{-x}})$가 양수인 값만 가지는 경우

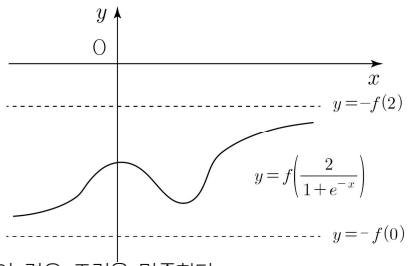
이 경우 다음과 같은 개형이 그려진다.



$f(x)$가 최고차항이 1인 삼차함수이므로 $f(\frac{2}{1+e^{-x}})$가 $x=0$에서 극소를 가지면 극대는 $x<0$인 점에서 나와야 한다.
하지만, 개형 상으로 $x>0$에서 극대가 나와 모순이다.

②$f(\frac{2}{1+e^{-x}})$가 음수인 값만 가지는 경우

이 경우 다음과 같은 개형이 그려진다.



이 경우 조건을 만족한다.

$f(\frac{1}{2})<0$, $f'(\frac{1}{2})>0$이므로 $f(\frac{1}{2})=-f'(\frac{1}{2})$이다.

$f(\frac{2}{1+e^{-x}})<0$을 만족하려면, $\lim_{x\to\infty}f(\frac{2}{1+e^{-x}})<0$이어야 한다.

따라서, $f(2)\le 0$이다.

위의 조건 $f'(1)=0$, $f(\frac{1}{2})=-f'(\frac{1}{2})$, $f(2)\le 0$을 종합하면

$f(x)$는 다음과 같다.

$f'(x)=3(x-1)(x-k)$이므로,

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(1+k)x^2+3kx+C$

$f(\frac{1}{2})=-f'(\frac{1}{2})$이므로, $\frac{1}{8}-\frac{3}{8}(1+k)+\frac{3k}{2}+C=\frac{3}{2}(\frac{1}{2}-k)$

$C=1-\frac{21}{8}k$이고,

$f(2)=8-6(1+k)+6k+C=3-\frac{21}{8}k\le 0$

따라서, $k\ge\frac{8}{7}$이다.

$g(0)=|f(1)|=|1-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}k+3k+1-\frac{21}{8}k|=|\frac{1}{2}-\frac{9}{8}k|\ge\frac{11}{14}$이다.

17 2026학년도 9월 28번 정답률 23%

28. 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=g(x)-\tan g(x)$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g'(0)\times\left(g(0)\right)^2$의 값은? [4점]

(가) $f(0)=0$, $f''(\pi)=0$

(나) $\sin g(\pi)=0$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\frac{3\pi}{2}$

① -12 ② -6 ③ -1 ④ 3 ⑤ 9

정 답 ②

해 설

(가)의 조건은 삼차함수의 계수를 결정하기 위한 조건이다.
(나)의 조건을 활용하기 위해서는 식을 변형해야한다.

STEP1 주어진 식을 미분하여 조건 찾기

(나)의 조건을 사용하기 위해 양변을 미분하자.

$f'(x)=g'(x)-g'(x)\sec^2 g(x)$이다.

$\sin g(\pi)=0$이므로 $\sec^2 g(\pi)=1$이다.

따라서, $f'(\pi)=g'(\pi)-g'(\pi)\sec^2 g(\pi)=0$이다.

$f'(\pi)=0$, $f''(\pi)=0$이므로 $f(x)=a(x-\pi)^3+b$이다.

STEP2 $g(x)$의 제한 범위를 통해 미지수 구하기

이 문항에서 가장 발견하기 어려운 부분이 있는데, $f(x)$를 잘 살펴보면 $\tan g(x)$의 항이 무한대의 값을 가지지 않도록 설정해야함을 알 수 있다.

또한, $g(x)$가 연속함수이기 때문에 $g(x)$의 함숫값이 가질 수 있는 범위가 $\frac{2n-1}{2}\pi$에서 $\frac{2n+1}{2}\pi$ 사이이다.

$\lim_{x\to\infty} g(x)=\frac{3}{2}\pi$이므로 $\frac{\pi}{2}<g(x)<\frac{3}{2}\pi$ 또는

$\frac{3}{2}\pi<g(x)<\frac{5}{2}\pi$이다.

$\sin g(\pi)=0$이므로 각각의 경우에 $g(\pi)=\pi$ 또는 2π이다.

그러므로 b의 값이 양수이고, $f(0)=0$이므로 a의 값도 양수이다.

$a>0$이므로 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이고, $\lim_{x\to\infty}\tan g(x)=-\infty$ 이므로

$\frac{3}{2}\pi<g(x)<\frac{5}{2}\pi$이어야 한다.

따라서, $g(\pi)=2\pi=b$, $f(0)=-a\pi^3+2\pi=0$이므로 $a=\frac{2}{\pi^2}$이다.

$f'(0)=6=g'(0)-g'(0)\sec^2 g(0)=-g'(0)\tan^2 g(0)$이고,

$g(0)=\tan g(0)$이므로 $g'(0)\times(g(0))^2=-6$이다.

18 2026학년도 9월 30번 정답률 19%

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\ln\left(\frac{g(x)}{1+xf'(x)}\right)$$

를 만족시킨다. $f(1)=4\ln 2$이고

$$\int_1^2 g(x)dx=34,\quad \int_1^2 xg(x)dx=53$$

일 때, $\int_1^2 xe^{f(x)}dx$의 값을 구하시오. [4점]

정 답 31

해 설

이 문항은 적분에 대한 감이 있는 학생이라면 어렵지 않게 풀었을 만한 문항이다.
적분에 대한 감각을 기르면 문항을 보는 속도가 많이 빨라지므로 꾸준한 연습이 필요하다.

STEP1 주어진 식을 적분하여 조건 찾기

$f(x)=\ln(\frac{g(x)}{1+xf'(x)})$을 보면, 우변에 $f(x)$와 $g(x)$가 섞여 있으므로 이 둘을 분리해야겠다는 생각이 자연스럽게 들 것이다.

식을 정리하면, $e^{f(x)}=\frac{g(x)}{1+xf'(x)}$이고,

$e^{f(x)}+xf'(x)e^{f(x)}=g(x)$이다.

위의 식에서, 적분 감각이 있는 학생은 좌변을 바로 적분하였을 것이고, 만약 잘 보이지 않는다면 부분적분을 해보면 된다.

적분하면 $\int(e^{f(x)}+xf'(x)e^{f(x)})dx=xe^{f(x)}+C$ 이다.

따라서, $[xe^{f(x)}]_1^2=\int_1^2 g(x)dx$이다.

STEP2 문제에서 구해야하는 값에 대한 적분 식 세우기

$[xe^{f(x)}]_1^2=2e^{f(2)}-e^{f(1)}=\int_1^2 g(x)dx=34$이다.

$f(1)=4\ln 2$이므로 $f(2)=2\ln 5$이다.

문제에서 물어본 것은 $\int_1^2 xe^{f(x)}dx$이므로 원래의 식을 다시 변형하여 문제에서 물어본 형태를 만들자.

$e^{f(x)}+xf'(x)e^{f(x)}=g(x)$에서 양변에 x를 곱하면,

$xe^{f(x)}+x^2f'(x)e^{f(x)}=xg(x)$이다.

적분하면, $\int_1^2(xe^{f(x)}+x^2f'(x)e^{f(x)})dx=\int_1^2 xg(x)dx$이다.

우변은 53이므로 $\int_1^2 x^2f'(x)e^{f(x)}dx$의 값만 구하면 된다.

위의 적분식을 부분적분하자.

$$\int_1^2 x^2f'(x)e^{f(x)}dx=[x^2e^{f(x)}]_1^2-\int_1^2 2xe^{f(x)}dx$$
$$=4e^{f(2)}-e^{f(1)}-2\int_1^2 xe^{f(x)}dx$$
$$=100-16-2\int_1^2 xe^{f(x)}dx$$

따라서, 정리하면 $84-\int_1^2 xe^{f(x)}dx=\int_1^2 xg(x)dx=53$이고,

$\int_1^2 xe^{f(x)}dx=31$이다.

19 2026학년도 수능 30번 정답률 11%

30. 실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|x| \le 1$일 때, $4\times\{f^{-1}(x)\}^2 = x^2(x^2-5)^2$이다.
> (나) $|x| > 1$일 때, $|f^{-1}(x)| = e^{|x|-1}+1$이다.

실수 m에 대하여 기울기가 m이고 점 $(1,0)$을 지나는 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(m)$이라 하자.
함수 $g(m)$이 $m=a$, $m=b\,(a<b)$에서 불연속일 때,

$g(a)\times\left(\lim_{m\to a+} g(m)\right)+g(b)\times\left(\frac{\ln b}{b}\right)^2$의 값을 구하시오.

(단, $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$) [4점]

정 답 11

해 설

함수의 그래프를 그려 교점의 개수를 세는 문항으로, 역함수의 미분이 아이디어로 활용되는 문항이다.
난이도가 무자비한 문항이 아니기 때문에 한 번 도전해보고 풀이를 보면 좋을 만한 문항이다.

STEP1 박스 안의 조건을 이용하여 $f^{-1}(x)$ 구하기

(가)에서 $|x|\le 1$일 때, $|f^{-1}(x)| = \left|\frac{x(x^2-5)}{2}\right|$이다.

(나)에서 $|x|>1$일 때, $|f^{-1}(x)| = |e^{|x|-1}+1|$이다.

$f(x)$가 증가하는 연속함수이므로 $f^{-1}(x)$도 증가하는 연속함수이다.
따라서, $f^{-1}(x)$는 각 범위에서 다음과 같은 함수를 따른다.

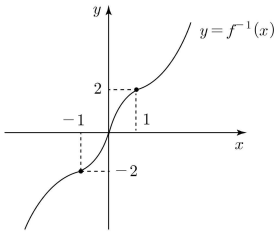
$1<x$: $f^{-1}(x)=e^{x-1}+1$

$0<x<1$: $f^{-1}(x)=-\frac{x(x^2-5)}{2}$

$-1<x<0$: $f^{-1}(x)=\frac{x(x^2-5)}{2}$

$x<-1$: $f^{-1}(x)=-e^{-x-1}-1$

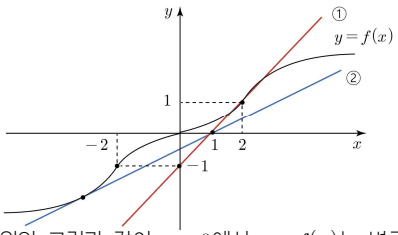
위의 내용을 바탕으로 그래프를 그리면 아래의 그림과 같은 개형을 가진다.



위의 그래프에서 $y=x$에 대해 대칭시키면 $y=f(x)$의 개형이 나타난다.

STEP2 $(1,0)$을 지나는 직선과의 교점의 개수를 세기

$y=f(x)$에서 $(1,0)$을 지나는 직선의 교점 수를 생각해보자.



위의 그림과 같이 $x>0$에서 $y=f(x)$는 변곡점을 $(2,1)$에서 가진다.
이때 $(2,1)$에서의 접선의 기울기를 계산해보면, 기울기가 1이 나와 ① 직선과 같이 $(1,0)$을 지난다.
따라서, $x<0$ 부분에서 접하는 ② 직선의 기울기를 가지기 전까지는 교점의 개수가 1이다.
② 직선의 기울기를 m_1이라 하자.
$m>m_1$에서는 $y=f(x)$와의 교점의 개수가 1이다.
$m=m_1$일 때는 $y=f(x)$와의 교점 개수가 2이고,
$0<m<m_1$에서는 교점 개수가 3이다.
$m=0$일 때는 다시 교점의 개수가 1이고,
$m<0$에서는 교점의 개수가 모두 1이다.
따라서, $a=0$, $b=m_1$이다.
위에서 $g(0)=1$, $\lim_{m\to 0+} g(m)=3$이다.

$g(b)=2$이고, 이제 $\frac{\ln b}{b}$의 값만 구하면 된다.

$b=m_1$의 기울기를 가질 때 접선의 방정식은
$y=m_1(x-1)$이고, 이 접선이 $y=f(x)$와 접한다.
접점의 x좌표를 t라 하면, $f(t)=m_1(t-1)$이고,
$m_1=f'(t)$이다.
역함수만 주어져 있으므로 대입하면 $f(-e^{-x-1}-1)=x$이다.
따라서, $t=-e^{-m_1(t-1)-1}-1$이고,
$e^{-x-1}f'(-e^{-x-1}-1)=1$이므로 $m_1=f'(t)=-\frac{1}{t+1}$이다.

연립하면, $t+1=-e^{-\frac{2}{t+1}}$이다. $\frac{\ln m_1}{m_1}=\frac{\ln\left(-\frac{1}{t+1}\right)}{-\frac{1}{t+1}}$이고,

$\ln(-(t+1))=-\frac{2}{t+1}$이므로 $\frac{\ln m_1}{m_1}=-2$이다.

따라서, 답을 구하면 $1\times 3+2\times(-2)^2=11$이다.