2027

수학II

CONNECT

수능에 필요한 모든 것을 담은 수능 공략서

UNOVA

Contents

1. 함수의 극한과 연속

· 개념편 01
· 문제편 10

2. 미분

· 개념편 44
· 문제편 58

3. 적분

· 개념편 148
· 문제편 152

PART 1
함수의 극한과 연속

개념 유형

(1) 함수의 극한
(2) 함수의 연속

기출 유형

(1) 그래프가 주어진 함수의 우극한과 좌극한
(2) 극한값의 계산
(3) 함수의 극한
(4) 함수의 연속
(5) 새로 정의한 함수의 연속
(6) 연속을 이용한 함수의 결정
(7) 함수의 연속의 활용

THEME

1 함수의 극한

정리1 함수의 극한

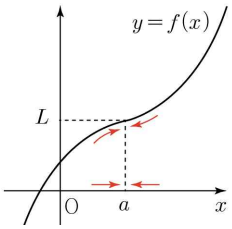
개념1 함수의 수렴과 발산

① 수렴 : 정의역과 치역이 각각 한없이 특정한 값으로 가까워지는 상황

$\lim_{x\to a} f(x)=L$ 또는 $x\to a$일 때 $f(x)\to L$이다.

(그림에서 L값을 "극한값" 또는 "극한"이라고 한다.)

② 발산 : 수렴하지 않으면 발산



TIP 주의

$f(x)$가 $x=a$에서 정의되지 않더라도 극한값은 존재할 수 있다.

개념2 우극한과 좌극한

① $x\to a+$일 때 $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 우극한이라 한다. (x가 a보다 아주 조금 클 때)

$\lim_{x\to a+} f(x)=L$ 또는 $x\to a+$일 때 $f(x)\to L$

② $x\to a-$일 때 $f(x)$의 값이 일정한 값 M에 한없이 가까워지면 좌극한이라 한다. (x가 a보다 아주 조금 작을 때)

$\lim_{x\to a-} f(x)=M$ 또는 $x\to a-$일 때 $f(x)\to M$

③ 좌극한과 우극한이 같을 때 → "극한값이 존재한다."라는 표현을 쓴다.

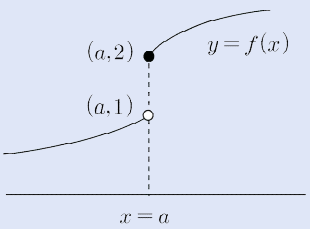
$\lim_{x\to a} f(x)=L \leftrightarrow \lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=L$

TIP 주의

① $\lim_{x\to a-} f(x)=1$

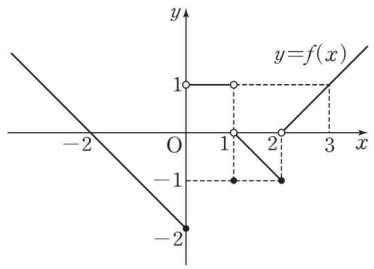
② $\lim_{x\to a+} f(x)=2$

둘이 다르기 때문에 $x=a$에서 극한값은 존재하지 않는다.



예제1 함수의 극한

함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 2+} f(x)$의 값을 구하시오.

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\lim_{x\to 0-} f(x) = -2$, $\lim_{x\to 2+} f(x) = 0$이므로 답은 -2이다.

정리2 함수의 극한에 대한 성질

개념1 함수의 극한에 대한 성질

두 극한값이 모두 존재할 때 사칙연산을 하듯이 계산이 가능하다는 것을 기억하자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때

① $\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x)=c\alpha$ (단, c는 상수)

② $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=\alpha+\beta$

③ $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=\alpha-\beta$

④ $\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} g(x)=\alpha\beta$

⑤ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta\neq 0$)

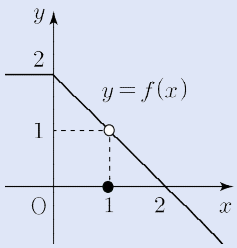
TIP 합성함수의 극한값

합성함수는 치역이 다시 정의역의 역할을 수행해야 하기 때문에 "치역의 경향성" 또한 주의깊게 살펴야 한다.

① $\lim_{x\to 1+} f(f(x))=f(1-)=1$

② $\lim_{x\to 1-} f(f(x))=f(1+)=1$

이렇게 치역의 경향성이 달라진다.



개념2 함수의 극한값의 계산 (부정형의 풀이)

① $(\frac{0}{0})$꼴 : 위 아래를 0으로 보내는 원인을 찾아 제거 "인수분해"

② $(\frac{\infty}{\infty})$꼴 : 차수비교 → 계수 비교

③ $(\infty-\infty)$꼴 : 최고차항으로 묶어서 식 정리해보기
$\sqrt{\ }$있으면 유리화를 진행해서 문제를 해결한다.

④ $(\infty\times 0)$꼴 : ① 또는 ②의 꼴로 변형해서 풀자.

예제2 함수의 극한의 사칙연산

함수 $f(x)$에 대해서 $\lim_{x\to 1} f(x)=2$일 때, 다음 극한값을 구하시오.

$\lim_{x\to 1} 5f(x)$

해설

$\lim_{x\to 1} f(x)=\alpha=2$이므로 $5\alpha=10$이다.

예제3 함수의 극한의 사칙연산

함수 f, g에 대해서 $\lim_{x\to 0} f(x)=3$, $\lim_{x\to 0} g(x)=-1$일 때, 다음 극한값을 구하시오.

① $\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))$

② $\lim_{x\to 0}(f(x)-g(x))$

해설

$\lim_{x\to 0} f(x)=\alpha=3$, $\lim_{x\to 0} g(x)=\beta=-1$이다.

$\alpha+\beta=2$이고, $\alpha-\beta=4$이다.

예제4 함수의 극한의 사칙연산

함수 f, g에 대해서 $\lim_{x\to 2} f(x)=4$, $\lim_{x\to 2} g(x)=5$일 때, 다음 극한값을 구하시오.

① $\lim_{x\to 2} f(x)g(x)$

② $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

해설

$\lim_{x\to 2} f(x)=\alpha=4$, $\lim_{x\to 2} g(x)=\beta=5$이다.

$\alpha\beta=20$, $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{4}{5}$이다.

예제5 함수의 극한값 계산(0/0)

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$의 값을 구하시오.

해설

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$이다.

또는 극한이 수렴하려면 (평가원 문제는 항상 수렴한다.)

$\frac{0}{0}$꼴이므로 $f(x)=x^2$로 설정한다면 $f'(2)=4$이다.

예제6 함수의 극한값 계산(inf/inf)

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+1}{2x^3-5x}$의 값을 구하시오.

해설

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+1}{2x^3-5x}$에서 최고차항만보면 $\frac{3}{2}$이다.

예제7 함수의 극한값 계산(inf-inf)

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$의 값을 구하시오.

해설

유리화를 진행하면 $\sqrt{x^2+1}-x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$이다.

예제8 함수의 극한값 계산(infX0)

$\lim_{x\to 0+}x\ln x$의 값을 구하시오.

해설

$\lim_{x\to 0+}x\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}(-x)=0$

정리3 함수의 극한의 대소 관계

세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$와 a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

① $f(x) \leqq g(x)$이고 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$와 $\lim_{x\to a} g(x)$가 존재하면 $\lim_{x\to a} f(x) \leqq \lim_{x\to a} g(x)$

② $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$이고 $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$ (L은 실수)이면 $\lim_{x\to a} h(x) = L$

TIP 샌드위치 정리

중간에 낀 함수는 극한값마저 끼어있어야 한다.

예제8 함수의 극한의 대소 관계

함수 $f(x) = x$, $g(x) = x+1$에 대하여, 모든 실수 x에서 $f(x) \leqq g(x)$임을 확인하고 $\lim_{x\to 5} f(x)$와 $\lim_{x\to 5} g(x)$의 크기 관계를 쓰시오.

해설

모든 x에 대하여 $x \leqq x+1$이므로 $f(x) \leqq g(x)$이다.

각 극한을 계산하면

$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} x = 5$, $\lim_{x\to 5} g(x) = \lim_{x\to 5} (x+1) = 6$이다.

따라서 $\lim_{x\to 5} f(x) = 5 \leqq 6 = \lim_{x\to 5} g(x)$

이로써 $f(x) \leqq g(x)$일 때 $\lim f \leqq \lim g$임을 확인할 수 있다.

예제9 샌드위치 정리

다음 함수에 대하여 $h(x) = x\sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $h(0) = 0$의 $\lim_{x\to 0} h(x)$를 구하시오.

해설

우선 삼각함수의 절대값 성질로

$-1 \leqq \sin\frac{1}{x} \leqq 1$이면 $-|x| \leq x\sin\frac{1}{x} \leq |x|$이다.

즉, 모든 $x \neq 0$에 대해 $-|x| \leqq h(x) \leqq |x|$이다.

양쪽 끝 함수의 극한은 $\lim_{x\to 0}(-|x|) = 0$, $\lim_{x\to 0}|x| = 0$이다.

샌드위치 정리를 적용하여 $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$이다.

THEME

2 함수의 연속

정리1 연속과 불연속

개념1 연속의 정의

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이라는 말은,
"x가 a에 충분히 가깝게 다가가면, $f(x)$도 $f(a)$에 충분히 가깝게 다가간다"를 엄밀하게 표현한 것이다.

개념2 연속성의 세 가지 조건 정리

f가 $x=a$에서 연속이려면, 아래 세 가지가 모두 필요·충분하다.

① 정의역에 포함
$f(a)$가 정의되어 있어야 한다.

② 극한 존재
$\lim_{x\to a} f(x)$이 유한한 값으로 존재해야 한다.

③ 극한값 = 함수값
$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$이어야 한다.

개념3 연속함수의 기본 성질

함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이라면 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

① 상수배 : $cf(x)$ (단, c는 상수)
② 합과 차 : $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$
③ 곱 : $f(x)g(x)$
④ 몫 : $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq 0$)
⑤ 합성 : $f(g(x))$

개념4 불연속

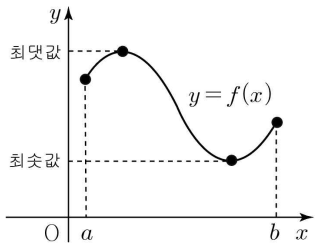
어떤 점 $x=a$에서 연속이 깨질 때, 불연속점이라고 한다.
주로 다음 세 가지 형태로 나타난다.

형태	특징	예시 함수	비고
제거형	한 점에서만 구멍이 뚫려 있음	$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ $(x\neq 1)$	$x=1$에서 값 정의만 하면 연속
점프형	좌·우극한은 존재하나 불일치	$H(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 1 & (x\geq 1)\end{cases}$	실제값이 좌·우 중 하나거나 다른 값
무한형	한쪽 극한이 $\pm\infty$	$f(x)=\dfrac{1}{x}$	끝없이 발산

정리2 최대-최소 정리와 사잇값 정리

개념1 최대-최소 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다.



TIP "닫힌" 구간에 유의해야 한다.

"열린" 구간이라면 최대/최소가 존재하지 않을 수 있다.

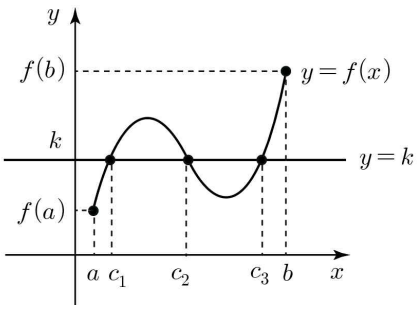
왜냐하면 열린 구간 (a, b)에서는 경계에서 값이 발산하거나 극값이 누락될 수 있다.

예 $f(x)=\frac{1}{x}$를 $(0, 1]$에서 보면, $x\to 0+$일 때 값이 $+\infty$이다.

예 $f(x)=x$를 $(0,1)$에서 보면, 최댓값은 존재하지 않는다. (x가 1에 가까워질수록 $f(x)\to 1$일 뿐)

개념2 사잇값 정리

$f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$가 다르면 $f(a)$와 $f(b)$사이 임의의 값 k에 대해 $f(c)=k$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.



TIP 왜 연속이어야 하나?

불연속점이 있으면 "건너뛰기"가 발생할 수 있다.

예를 들어 $f(x)=\begin{cases}0\,(x<0)\\2\,(x\geq 0)\end{cases}$ 여기서 $f(-1)=0$, $f(1)=2$이나, $k=1$인 점은 존재하지 않는다.

예제1 최대-최소

함수 $f(x)=-x^2+4x$가 구간 $[0, 2]$에서 갖는 최댓값과 최솟값을 구하시오.

해설

① 정리 적용 조건 확인
- $f(x)$는 다항함수이므로 모든 실수에서 연속이다.
- $[0, 2]$는 닫힌구간이자 유계구간
  따라서 최대-최소 정리에 의해 f는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 반드시 갖는다.

② 후보 점 찾기
- 구간의 경계점 $f(0)=0$이고, $f(2)=4$이다.
- $f'(x)=-2x+4=0$에서 $x=2$이므로 극값은 4이다.

따라서 최댓값은 $f(2)=4$이고, 최솟값은 $f(0)=0$이다.

예제2 사잇값 정리

방정식 $x^3+x-1=0$이 해를 실수 범위에서 적어도 하나 갖는다는 것을 보여라.

해설

① 함수 정의
$g(x)=x^3+x-1$ 함수는 다항함수이므로 모든 실수에서 연속이다.

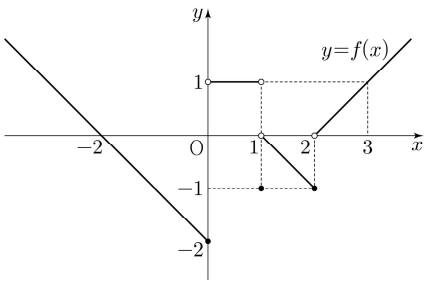
② 구간 선택 및 값 확인
연속함수 g에 대하여 $g(0)=-1$이고, $g(1)=1$이다.
따라서 $g(0)=-1<0<1=g(1)$이다.

③ 사잇값 정리 적용
$g(0)$와 $g(1)$ 사이에 0이 있으므로, 사잇값 정리에 따라 $g(c)=0$인 c(단, $0<c<1$)가 존재한다.
즉, $x^3+x-1=0$인 실근이 적어도 하나 존재한다.

유형 01 그래프가 주어진 함수의 우극한과 좌극한

01 2022학년도 6월 4번 정답률 79%

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

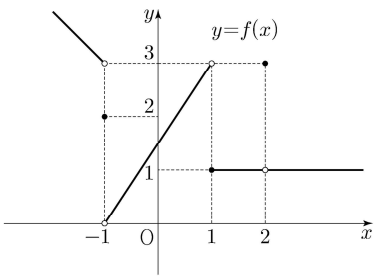


$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2 2022학년도 수능 4번 정답률 83%

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

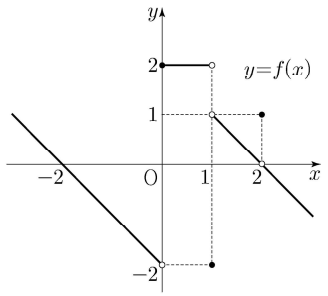


$\lim_{x\to -1-} f(x)+\lim_{x\to 2} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

03 2023학년도 6월 4번 정답률 83%

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

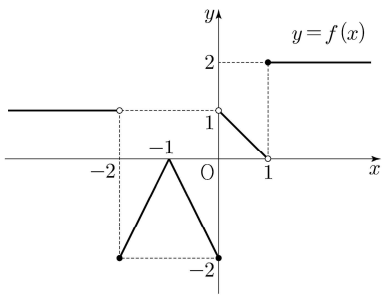


$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

04 2024학년도 9월 4번 정답률 75%

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

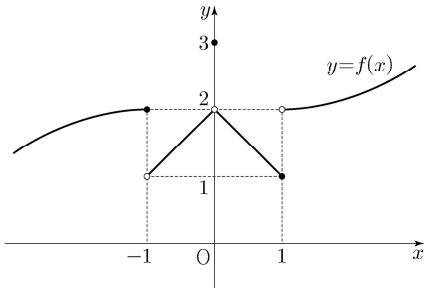


$\lim_{x\to -2+} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

05 2025학년도 6월 4번 정답률 83%

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

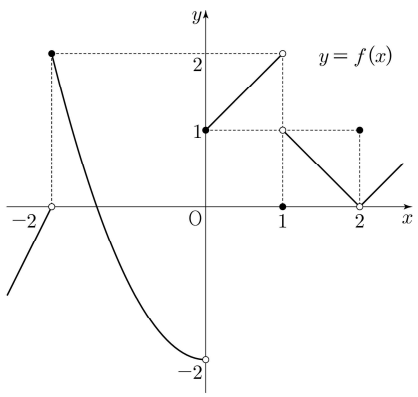


$\lim_{x\to 0+} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

06 2025학년도 9월 4번 정답률 86%

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

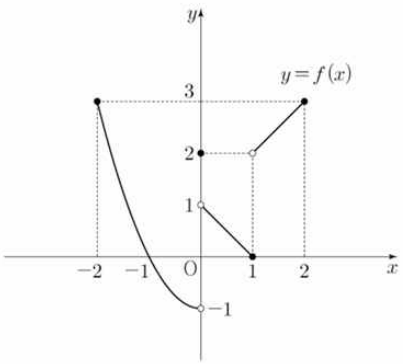


$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① −2 ② −1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

07 2026학년도 9월 4번 정답률 98%

4. 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

유형 02 극한값의 계산

01 2023학년도 9월 2번 정답률 84%

2. 함수 $f(x)=2x^2+5$에 대하여 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$의 값은? [2점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

02 2023학년도 수능 2번 정답률 79%

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

03 2024학년도 9월 2번 정답률 82%

2. 함수 $f(x)=2x^2-x$에 대하여 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

04 2026학년도 6월 2번 정답률 98%

2. 함수 $f(x)=x^2-x+1$에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

05 2026학년도 9월 2번 정답률 98%

2. 함수 $f(x)=x^2-4x+2$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

06 2026학년도 수능 2번 정답률 97%

2. 함수 $f(x)=3x^3+4x+1$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 값은? [2점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

유형 03 함수의 극한

01 2022학년도 9월 8번 정답률 66%

8. 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

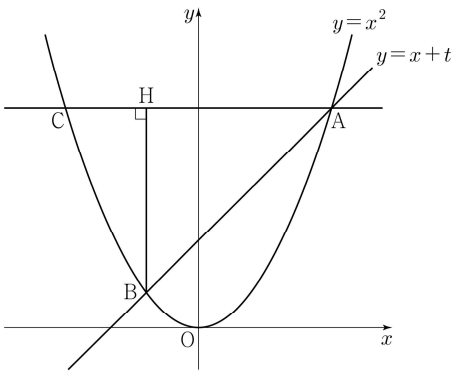
① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

02 2023학년도 9월 12번 정답률 47%

12. 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\overline{AH}-\overline{CH}}{t}$의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



03 2025학년도 수능 21번 정답률 12%

21. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 정수 a, b에 대하여 $f(1)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

> 모든 실수 α에 대하여 $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(2x+1)}{f(x)}$의 값이 존재한다.

04 2026학년도 9월 13번 정답률 67%

13. 함수 $f(x)=x^2+6x+12$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 개수는? [4점]

> 모든 실수 a에 대하여
> $\lim_{x\to a}\dfrac{x^2}{\left(f(x)\right)^2-k(x+2)f(x)}$의 값이 존재한다.

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

유형 04 함수의 연속

01 2022학년도 9월 4번 정답률 84%

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x \le -1) \\ x^2-5x-a & (x > -1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

02 2023학년도 6월 6번 정답률 77%

6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x < -1) \\ x & (-1 \le x < 3) \\ bx-2 & (x \ge 3) \end{cases}$$

이다. 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

03 2023학년도 9월 4번 정답률 84%

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+a & (x \le a) \\ ax-6 & (x>a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

04 2024학년도 6월 4번 정답률 70%

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 1} f(x)=4-f(1)$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

05 2024학년도 수능 4번 정답률 80%

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 3x-a & (x<2) \\ x^2+a & (x \ge 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

06 2026학년도 6월 4번 정답률 97%

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+a & (x<3) \\ 5x-a & (x\geq 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

07 2026학년도 수능 4번 정답률 96%

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 3x-2 & (x<1) \\ x^2-3x+a & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

유형 05 새로 정의한 함수의 연속

01 2022학년도 6월 8번 정답률 68%

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+6 & (x<a) \\ 2x-a & (x\geq a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

유형 06 연속을 이용한 함수의 결정

01 2022학년도 수능 12번 정답률 48%

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

02 2024학년도 9월 15번 정답률 33%

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x)\neq 0)\\ 3 & (f(x)=0)\end{cases}$$

이라 하자. $\lim_{x\to 3} g(x)=g(3)-1$일 때, $g(5)$의 값은? [4점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

유형 07 함수의 연속의 활용

01 2023학년도 수능 14번 정답률 13%

14. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\begin{cases} x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ f(x) & (-1\le x\le 1) \end{cases}$$

함수 $h(x)=\lim_{t\to 0+} g(x+t)\times \lim_{t\to 2+} g(x+t)$에 대하여
<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $h(1)=3$

ㄴ. 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

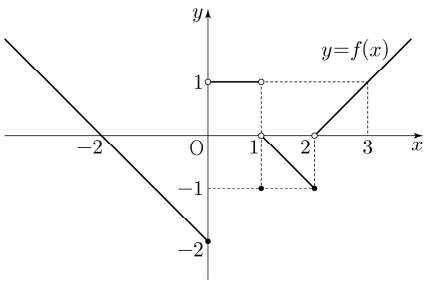
ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1,1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$이면 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

유형 01 그래프가 주어진 함수의 우극한과 좌극한

01 2022학년도 6월 4번 정답률 79%

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

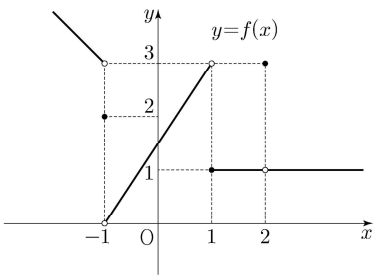
정 답 ①

해 설

$\lim_{x\to 0-} f(x)=-2$, $\lim_{x\to 2+} f(x)=0$이므로 답은 -2이다.

2 2022학년도 수능 4번 정답률 83%

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1-} f(x)+\lim_{x\to 2} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

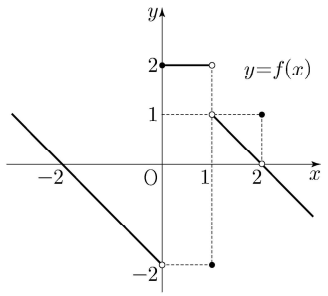
정 답 ④

해 설

$\lim_{x\to -1-} f(x)=3$, $\lim_{x\to 2} f(x)=1$이므로 $3+1=4$이다.

03 2023학년도 6월 4번 정답률 83%

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

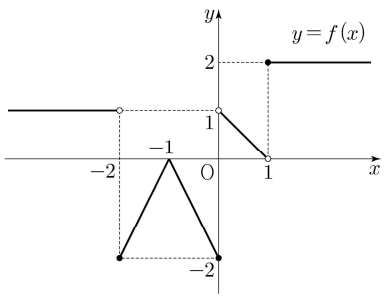
정 답 ②

해 설

$\lim_{x\to 0-} f(x)=-2$, $\lim_{x\to 1+} f(x)=1$이므로 $-2+1=-1$이다.

04 2024학년도 9월 4번 정답률 75%

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -2+} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

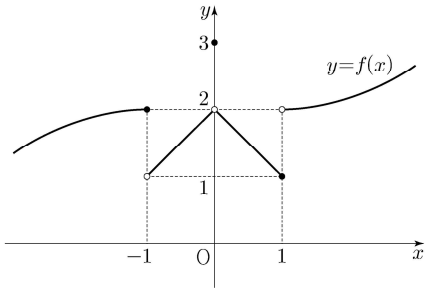
정 답 ①

해 설

$\lim_{x\to -2+} f(x)=-2$, $\lim_{x\to 1-} f(x)=0$이므로 $-2+0=-2$이다.

05 2025학년도 6월 4번 정답률 83%

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0+} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

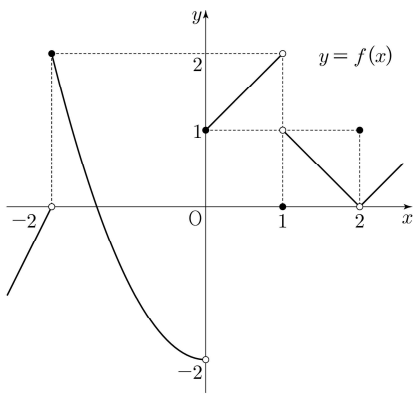
정 답 ③

해 설

$\lim_{x\to 0+} f(x)=2$, $\lim_{x\to 1-} f(x)=1$이므로 $2+1=3$이다.

06 2025학년도 9월 4번 정답률 86%

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① −2 ② −1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

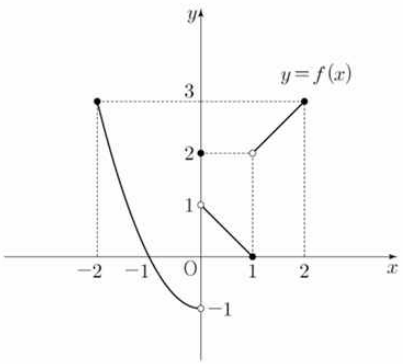
정 답 ②

해 설

$\lim_{x\to 0-} f(x)=-2$, $\lim_{x\to 1+} f(x)=1$이므로 $-2+1=-1$이다.

07 2026학년도 9월 4번 정답률 98%

4. 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ①

해 설

$\lim_{x\to 0-} f(x) = -1$이고, $\lim_{x\to 1+} f(x) = 2$이다.

따라서, $\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x) = 1$이다.

유형 02 극한값의 계산

01 2023학년도 9월 2번 정답률 84%

2. 함수 $f(x)=2x^2+5$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$의 값은? [2점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

정 답 ①

해 설

미분계수 정의에 의해 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로

$f'(x)=4x$에서 $f'(2)=8$이다.

02 2023학년도 수능 2번 정답률 79%

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ④

해 설

$\frac{\infty}{\infty}$꼴에서 최고차 계수의 합을 보면 $\frac{1+3}{1}=4$이다.

03 2024학년도 9월 2번 정답률 82%

2. 함수 $f(x)=2x^2-x$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ③

해 설

미분계수 정의에 의해 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=f'(1)$이다.

$f'(x)=4x-1$에서 $f'(1)=4-1=3$이다.

04 2026학년도 6월 2번 정답률 98%

2. 함수 $f(x)=x^2-x+1$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ①

해 설

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$이다.

$f'(x)=2x-1$이므로 $f'(1)=1$이다.

05 2026학년도 9월 2번 정답률 98%

2. 함수 $f(x)=x^2-4x+2$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ④

해 설

$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=f'(4)$이다.

$f'(x)=2x-4$이고, $f'(4)=4$이다.

06 2026학년도 수능 2번 정답률 97%

2. 함수 $f(x)=3x^3+4x+1$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 값은? [2점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

정 답 ④

해 설

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$이다.

$f'(x)=9x^2+4$이므로 $f'(1)=13$이다.

유형 03 함수의 극한

01 2022학년도 9월 8번 정답률 66%

8. 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

정 답 ②

해 설

STEP1 부정형의 이해를 통해 $f(x)$의 인수를 파악하자.

- $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$
  분모가 0으로 수렴하므로, 극한값이 존재하기 위해서는 분자도 0으로 수렴해야 한다. 따라서 $f(0)=0$이다.
  또한, 위 극한식은 미분계수의 정의에 따라 $f'(0)=1$임을 의미한다.
- $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$의 극한식도 위의 이유를 통해
  $f(1)=0,\ f'(1)=1$을 만족한다.
- 따라서 $f(x)$는 삼차함수이고, x와 $(x-1)$을 인수로 가지므로 $f(x)=x(x-1)(ax+b)$라고 표현할 수 있다.

STEP2 극한 계산 마무리

$\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)(ax+b)}{x}=(-1)(b)=-b=1$

$\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(ax+b)}{x-1}=1(a+b)=a+b=1$이므로 $a=2$이다.

따라서 $f(x)=x(x-1)(2x-1)$이고,

$f(2)=2\times 1\times 3=6$이다.

TIP 거리곱 풀이법

$f(a)=0$을 만족하는 점에서 $f'(a)=p|l_1\times l_2|$를 만족하므로 $f(x)$의 해를 $x=0,\ 1,\ x_0$라고 가정하자.

그러면 $f'(0)=p\times 1\times x_0=1$이고, (단, $p>0$)

$f'(1)=-[p\times 1\times(x_0-1)]=-px_0+p=1$이다.

식을 정리하면 $p=2$이고, $x_0=\frac{1}{2}$이다.

따라서 $f(x)=2x(x-1)(x-\frac{1}{2})$이다.

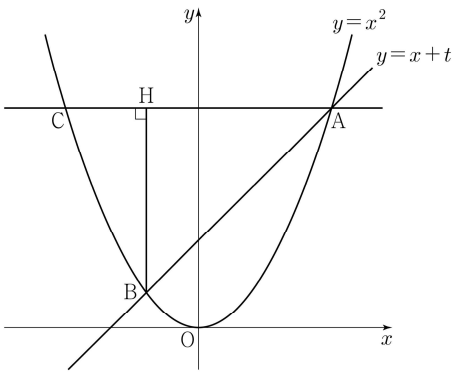
$f(2)=4\times 1\times\frac{3}{2}=6$이다.

02 2023학년도 9월 12번 정답률 47%

12. 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\overline{AH}-\overline{CH}}{t}$의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



정 답 ②

해 설

STEP1 교점의 좌표 표현

- $y=x+t$와 $y=x^2$의 교점은 $x^2-x-t=0$의 두 근이므로, 이 근을 a, b라 하면, $a+b=1$, $ab=-t$이다.
- 문제에서 "A의 x좌표가 양수"이므로 $A=(a,a^2)$, $B=(b,b^2)$이다.
  여기서 $a=\dfrac{1+\sqrt{1+4t}}{2}$, $b=\dfrac{1-\sqrt{1+4t}}{2}$이다.
- A를 지난 x축에 평행한 직선 $y=a^2$와 포물선 $y=x^2$의 교점은 $x=\pm a$이므로 $C=(-a,a^2)$이다.

STEP2 수선의 발 H 구하기

AC는 수평선$(y=a^2)$이므로, 점 $B=(b,b^2)$에서 AC에 내린 수선의 발 H는 $H=(b,a^2)$이다.

STEP3 거리 계산

수평거리를 쓰면

$AH=|x_A-x_H|=|a-b|=a-b$,

$CH=|x_C-x_H|=|(-a)-b|=a+b$

따라서 $AH-CH=(a-b)-(a+b)=-2b$이다.

STEP4 극한값 구하기

$\dfrac{AH-CH}{t}=\dfrac{-2b}{t}=-\dfrac{2}{t}\dfrac{1-\sqrt{1+4t}}{2}=\dfrac{\sqrt{1+4t}-1}{t}$이다.

$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\sqrt{1+4t}-1}{t}=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{(\sqrt{1+4t}-1)(\sqrt{1+4t}+1)}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$

$=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{4}{t(\sqrt{1+4t}+1)}=\dfrac{4}{\sqrt{1}+1}=2$이다.

03 2025학년도 수능 21번 정답률 12%

21. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 정수 a, b에 대하여 $f(1)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

> 모든 실수 α에 대하여 $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(2x+1)}{f(x)}$의 값이 존재한다.

정 답 16

해 설

STEP1 극한이 존재하려면

- α가 $f(\alpha)\neq 0$일 때는 별다른 제약이 없다.
- 문제는 $f(\alpha)=0$인 경우.
  분모가 0이므로 분자도 0이 되어야 극한값이 유한하게 존재한다. 즉, $f(\alpha) \Rightarrow f(2\alpha+1)=0$이다.

STEP2 실근에 대한 조건

f는 3차 함수이므로 실근이 적어도 하나는 있다.
그 실근을 k라 하면 $f(k)=0$, $f(2k+1)=0$이다.

이 두 식을 동시에 만족시키는 실수 k를 찾아보면
CASE 1. k와 $2k+1$이 동일한 근이면(다중근이거나)
CASE 2. 서로 다른 두 근이면(일반근)

첫 번째 경우는 다중근이 되면서 무수히 많은 제약(반복되는 방정식)이 생겨 배제되고, 두 번째 경우에는 $k=2k+1$이므로 $k=-1$만이 유일한 실근이 된다.
따라서 f의 유일한 실근은 $x=-1$이어야 한다.

STEP3 $f(x)$ 인수분해

1. $x=-1$이 유일한 실근이므로 $f(x)=(x+1)(x^2+px+q)$
여기서 x^2+px+q의 판별식은 음수여야 실근이 더 생기지 않는다.
2. 상수항 비교:
$f(x)=x^3+ax^2+bx+4=(x+1)(x^2+px+q)$
$=x^2+(p+1)x^2+(p+q)x+q$
따라서 $\begin{cases}p+1=a\\p+q=b\\q=4\end{cases}$ 즉 $q=4$, $p=a-1$, 그리고
$b=p+q=(a-1)+4=a+3$
3. 이차식의 판별식
$D=p^2-4q=(a-1)^2-16<0 \Rightarrow (a-1)^2<16$
$\Rightarrow -3<a<5$
a, b는 정수이므로 $a\in\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

STEP4 $f(1)$의 최댓값

$f(1)=1^3+a\cdot 1^2+b\cdot 1+4=2a+8$
a가 클수록 커지므로, 가능한 최대 $a=4$를 택하면
$f(1)_{max}=2\cdot 4+8=16$이다.

04 2026학년도 9월 13번 정답률 67%

13. 함수 $f(x)=x^2+6x+12$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 개수는? [4점]

> 모든 실수 a에 대하여
> $\lim_{x\to a}\dfrac{x^2}{(f(x))^2-k(x+2)f(x)}$의 값이 존재한다.

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

정 답 ④

해 설

극한값이 존재하기 위한 조건을 떠올려보자.
먼저, 문제에 제시된 분수의 분모와 분자가 모두 연속함수이므로 여기에서 분모가 0이 되는 경우만 고려하면 된다는 것을 떠올려야 한다.

STEP1 분모가 0이 되는 x값 찾기

분모를 인수분해하면 $f(x)(f(x)-k(x+2))$이므로 분모가 0이 되는 경우는 $f(x)=0$ 또는 $f(x)=k(x+2)$일 때이다.
$f(x)$의 판별식이 0보다 작으므로, $f(x)\neq 0$이다.
$f(x)=k(x+2)$이면, 분모가 0이 되므로 분자도 0이어야 한다.
따라서, $f(x)=k(x+2)$의 근은 없거나 $x=0$뿐이다.

STEP2 주어진 $f(x)$를 대입하여 정답 찾기

$f(x)-k(x+2)$는 이차방정식이므로 근이 없거나 $x=0$만 존재하려면 $f(x)-k(x+2)=x^2$ 또는 판별식이 음수여야한다.
$f(x)-k(x+2)=x^2$이면, $k=6$이다.
판별식이 음수이면, $(6-k)^2-4(12-2k)<0$이고, $-2<k<6$이다.
따라서, $-2<k\leq 6$이므로 정수 k는 $-1, 0, \cdots 6$으로 총 8개가 가능하다.

유형 04 함수의 연속

01 2022학년도 9월 4번 정답률 84%

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x \le -1) \\ x^2-5x-a & (x > -1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ④

해 설

$-2+a=6-a$에서 $a=4$이다.

02 2023학년도 6월 6번 정답률 77%

6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가

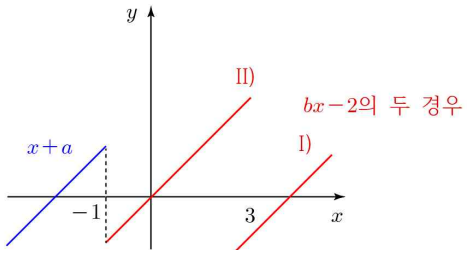
$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x < -1) \\ x & (-1 \le x < 3) \\ bx-2 & (x \ge 3) \end{cases}$$

이다. 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

정 답 ⑤

해 설



STEP1 $x=-1$

$a-1=1$에서 $a=2$이다.

STEP2 $x=3$

I) $3=3b-2$에서 $b=\frac{5}{3}$이다.

II) $3=2-3b$에서 $b=-\frac{1}{3}$이다. (b는 양수가 아니므로X)

따라서 $a+b=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3}$이다.

03 2023학년도 9월 4번 정답률 84%

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+a & (x \le a) \\ ax-6 & (x>a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

정 답 ①

해 설

$\lim_{x\to a-} f(x)=f(a)=\lim_{x\to a+} f(x)$이므로

$-a=a^2-6$에서 $a^2+a-6=0$이다.

따라서 $a=-3$, $a=2$이다.

모든 상수 a의 값의 합은 -1이다.

04 2024학년도 6월 4번 정답률 70%

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 1} f(x)=4-f(1)$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ②

해 설

연속이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$이다.

따라서 $f(1)=2$이다.

05 2024학년도 수능 4번 정답률 80%

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 3x-a & (x<2) \\ x^2+a & (x \ge 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ①

해 설

연속이므로 $\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)=f(2)$이다.

따라서 $6-a=4+a$에서 $a=1$이다.

06 2026학년도 6월 4번 정답률 97%

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+a & (x<3) \\ 5x-a & (x\geq 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

정 답 ③

해 설

$\lim_{x\to 3-} f(x)=\lim_{x\to 3-}(-x^2+a)=-9+a$이고,

$f(3)=\lim_{x\to 3+} f(x)=\lim_{x\to 3+}(5x-a)=15-a$이다.

$\lim_{x\to 3-} f(x)=\lim_{x\to 3+} f(x)$이므로

$-9+a=15-a,\ a=12$이다.

07 2026학년도 수능 4번 정답률 96%

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 3x-2 & (x<1) \\ x^2-3x+a & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ③

해 설

$f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$f(1)=1-3+a=a-2$이고, $\lim_{x\to 1-} f(x)=3-2=1$이다.

따라서, $a=3$이다.

유형 05 새로 정의한 함수의 연속

01 2022학년도 6월 8번 정답률 68%

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+6 & (x<a) \\ 2x-a & (x\geq a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

정 답 ④

해 설

$\lim_{x\to a-} f(x)=6-2a$

$\lim_{x\to a+} f(x)=a$

$(6-2a)^2=a^2$에서 $a=2$ 또는 $a=6$이다.

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 8이다.

유형 06 연속을 이용한 함수의 결정

01 2022학년도 수능 12번 정답률 48%

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

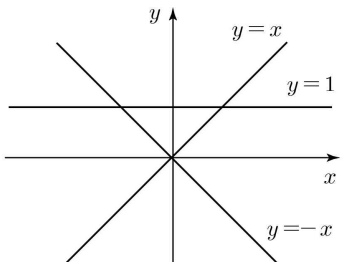
정 답 ③

해 설

인수분해시

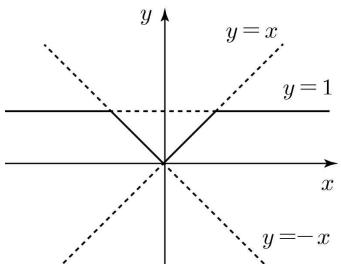
$\{f(x)\}^2\{f(x)-1\}-x^2\{f(x)-1\}=0$

$\{f(x)-1\}\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}=0$



즉, $f(x)=1$ 또는 $f(x)=-x$ 또는 $f(x)=x$이다.

이중 $f(x)$의 최댓값이 1, 최솟값이 0인 연속함수 f는 아래 그래프의 경우 뿐이다.



$f(-\frac{4}{3})=1$, $f(0)=0$, $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$이다.

모든 값의 합은 $\frac{3}{2}$이다.

02 2024학년도 9월 15번 정답률 33%

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x)\neq 0)\\ 3 & (f(x)=0)\end{cases}$$

이라 하자. $\lim_{x\to 3} g(x)=g(3)-1$일 때, $g(5)$의 값은? [4점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

정 답 ④

해 설

STEP1 $f(3)\neq 0$인 경우

만약 $f(3)\neq 0$이면,

$g(x)$는 $x=3$ 근처에서 $\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$이다.

$f(x)$는 연속함수이므로, $g(x)$는 $x=3$ 근처에서 연속적인 값을 갖고, 그 극한은 $g(3)$와 같아진다.

하지만 조건에 의하여 극한값은 $g(3)-1$이어야 한다. (불가능)

TIP 연속함수의 성질

$g(x)$함수가 연속함수 $f(x)$들의 합, 차, 곱, 또는 합성으로 이루어져 있다면, 연속함수이다.

STEP2 $f(3)=0$인 경우

- $f(3)=0$이면 $g(3)=3$이다.
- $\lim_{x\to 3} g(x)=g(3)-1$에 의해 $\lim_{x\to 3} g(x)=3-1=2$이다.

  $\lim_{x\to 3}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=2$에서 분모가 $f(3)=0$으로 향하므로 $\dfrac{0}{0}$꼴에 의해 $f(6)=0$이다.

  또한, $f(3)+1=1$이므로 $f(x)+1$의 항을 없앨 수 있다.
- $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이며 $f(3)=0$ & $f(6)=0$이므로 $f(x)=(x-3)(x-6)(x-\alpha)$이다.

  $\lim_{x\to 3}\dfrac{x(x-3)(x-\alpha+3)}{(x-3)(x-6)(x-\alpha)}=\lim_{x\to 3}\dfrac{x(x-\alpha+3)}{(x-6)(x-\alpha)}$에서

  $\alpha=3$이면 분모가 0으로 향하므로 안된다. (즉, $\alpha\neq 3$)

  $\dfrac{3(6-\alpha)}{3(3-\alpha)}=-2$에서 $\alpha=4$이다.

  최종적으로 $f(x)=(x-3)(x-4)(x-6)$이다.
- $g(5)=\dfrac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)}=20$

유형 07 함수의 연속의 활용

01 2023학년도 수능 14번 정답률 13%

14. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\begin{cases} x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ f(x) & (-1\le x\le 1) \end{cases}$$

함수 $h(x)=\lim\limits_{t\to 0+} g(x+t)\times\lim\limits_{t\to 2+} g(x+t)$에 대하여
<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $h(1)=3$

ㄴ. 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

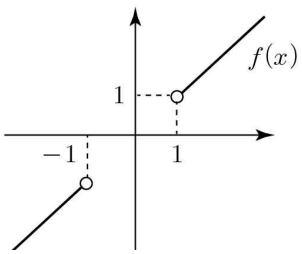
ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1,1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$이면 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

정 답 ①

해 설

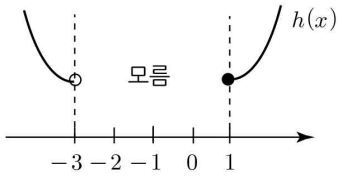
$f(x)$의 상황은 다음과 같다.



STEP1 정의역에 범위에 따른 $h(x)$의 상황을 파악하자.

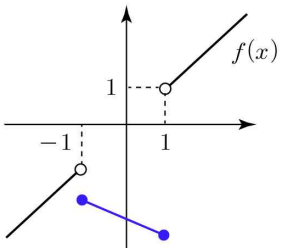
$$h(x)=\begin{cases} x\cdot(x+2) & (x<-3) \\ (-3)\cdot f(-1) & (x=-3) \\ x+(x+2) & (-3<x<-1) \\ f(-1)\cdot 1 & (x=-1) \\ f(x)\cdot(x+2) & (-1<x<1) \\ x\cdot(x+2) & (x\ge 1) \end{cases}$$

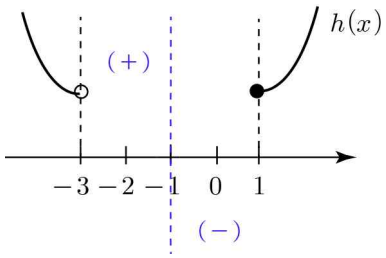
이를 토대로 $h(x)$를 그리면 다음과 같다.



(ㄱ) 맞다. (O)
(ㄴ) 확실히 알지 못하기 때문에 틀린 선지다. (X)

STEP2 ㄷ의 상황은 다음과 같다.





$-3\le x<-1$의 범위에서 $h(x)$는 양수이다.
$-1\le x<-1$의 범위에서 $h(x)$는 음수이다.

분명히 (ㄷ) 상황의 $h(x)$는 정의역 -1 이상 1 미만의 구간에서 음수이지만 $x=1$의 상황에서는 음수로 정의되지 않기 때문에 최솟값이 존재한다고 확정지을 수 없다. 따라서 (ㄷ)은 틀린 선지이다. (X)

PART 2
미분

개념 유형

(1) 미분계수
(2) 도함수
(3) 도함수의 활용
(4) 다항함수 개론

기출 유형

(1) 미분계수
(2) 평균변화율과 미분계수
(3) 미분계수와 극한값
(4) 도함수의 응용
(5) 접선의 방정식
(6) 곡선과 직선 사이의 거리의 최대, 최소
(7) 함수의 증가와 감소
(8) 함수의 극대와 극소
(9) 함수의 그래프
(10) 방정식과 부등식 활용
(11) 방정식과 부등식 활용 - 함수의 결정
(12) 속도와 가속도

THEME

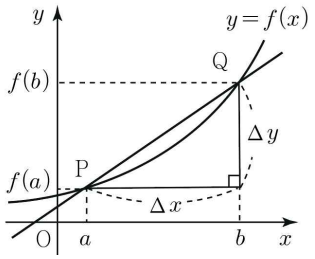
1 미분계수

정리1 평균변화율과 미분계수

개념1 평균변화율

① 평균변화율의 정의

함수 $y=f(x)$에 대하여, 구간 $[a, b]$에서의 평균변화율은 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$로 정의한다.



② 평균변화율의 기하적 의미

이는 구간 $[a, b]$ 위의 곡선 $y=f(x)$에서 두 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$, $\mathrm{Q}(b, f(b))$를 연결하는 기울기와 같다.

개념2 미분계수

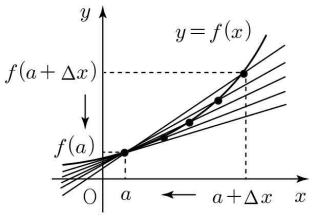
① 미분계수의 정의

주어진 함수 $y=f(x)$가 $x=a$ 부근에서 정의되어 있을 때,

구간 $[a, a+\Delta x]$에서의 평균변화율 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$에서

$\Delta x \to 0$일 때 그 극한 $f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$이 존재하면 미분계수라 하고,

함수 f가 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.



② 미분계수의 기하적 의미

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

정리2 미분가능과 연속

개념1 미분가능과 연속

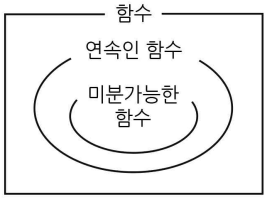
① 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 존재하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

② 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다.
또한 함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 미분가능한 함수라고 한다.

③ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

개념2 쉽게 암기하기

"극한값 존재" / "연속" / "미분가능" 이 3가지를 다음의 그림을 통해 쉽게 이해하자.



예제1 평균변화율

다항함수 $f(x)=x^3-3x+2$에 대해 구간 $[1,2]$에서의 평균변화율을 구하시오.

해설

$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{4-0}{1}=4$이다.

예제2 미분계수

함수 $f(x)=\sqrt{2x+1}$에 대하여, $x=3$에서의 미분계수 $f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$를 정의에 의해 계산하시오.

해설

우선 $f(3)$과 $f(3+\Delta x)$를 정리하면

$f(3)=\sqrt{7}$, $f(3+\Delta x)=\sqrt{7+2\Delta x}$이다.

미분계수 정의식에 대입하면

$$\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{7+2\Delta x}-\sqrt{7}}{\Delta x}$$

유리화를 하면 $\frac{2}{\sqrt{7+2\Delta x}+\sqrt{7}}$이다.

$f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2}{\sqrt{7+2\Delta x}+\sqrt{7}}=\frac{1}{\sqrt{7}}$이다.

THEME

2 — 도함수

정리1 도함수와 미분계수

개념1 도함수

① 함수 $y=f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x에서 미분가능할 때, 정의역의 각 원소 x에 미분계수 $f'(x)$를 대응시키는 함수 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$를 함수 $y=f(x)$의 도함수라고 하고, 이것을 기호로 $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$와 같이 나타낸다.

② 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 함수 $f(x)$에 대하여 미분한다고 하고, 그 계산법을 미분법이라고 한다.

개념2 도함수와 미분계수

① 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 도함수의 정의에 의하여 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$이다.

② 따라서 함수 $f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 도함수 $f'(x)$에 $x=a$를 대입하여 얻은 함숫값이다.

개념3 미분가능성과 연속성

① 미분가능하면 연속이다.

$f'(a)$가 존재하면 자동으로 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$가 성립한다.

② 연속이라고 해도 미분가능은 아니다.

예 예를 들어 $f(x)=|x|$일 때 $f(x)$는 연속이다. 하지만 좌미분은 -1이고, 우미분은 $+1$이므로 미분불가능하다.

정리2 도함수의 기본 연산 법칙

개념1 함수 $y=x^n$ (n은 자연수)와 상수함수의 도함수

① $y=x^n$ ($n\geq 2$인 자연수)와 상수함수의 도함수

② $y=x$이면 $y'=1$

③ $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=0$

개념2 도함수의 기본 연산법칙

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

① 상수배 : $y=cf(x)$ (c는 상수)이면 $y'=cf'(x)$

② 합 : $y=f(x)+g(x)$이면 $y'=f'(x)+g'(x)$

③ 차 : $y=f(x)-g(x)$이면 $y'=f'(x)-g'(x)$

④ 곱 : $y=f(x)g(x)$이면 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

⑤ 몫 : $y=\frac{f(x)}{g(x)}$이면 $y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

⑥ 합성(연쇄법칙) : $y=f(g(x))$이면 $y'=f'(g(x))g'(x)$

THEME

3 도함수의 활용

정리1 접선의 방정식

개념1 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$에서의 접선의 방정식

① 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

② 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

개념2 곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식

① 접점의 좌표를 $(a, f(a))$로 놓고 방정식 $f'(a)=m$을 만족시키는 실수 a의 값을 구한다.

② a의 값을 $y-f(a)=m(x-a)$에 대입한다.

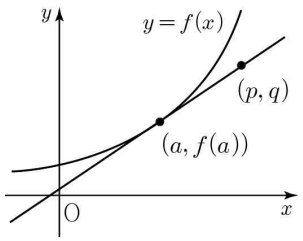
개념3 곡선 $y=f(x)$ 위에 있지 않은 점(p, q)에서 곡선에 그은 접선의 방정식

① 접점의 좌표를 $(a, f(a))$로 놓는다.

② 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$를 구한다.

③ 점 (p, q)는 접선 위의 점이므로 위에서 구한 접선의 방정식에 $x=p$, $y=q$를 대입하여 실수 a의 값을 구한다.

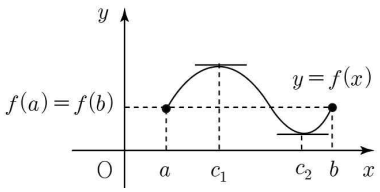
④ 위에서 구한 a의 값을 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.



정리2 롤의 정리와 평균값 정리

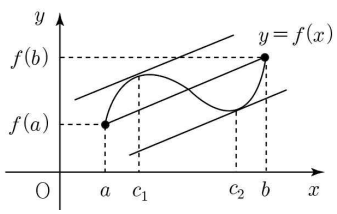
개념1 롤의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.



개념2 평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능할 때, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

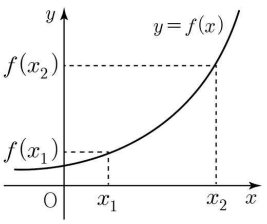


정리3 함수의 증가와 감소

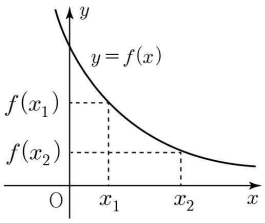
개념1 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

① $x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) < f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다고 한다.
② $x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) > f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다고 한다.



증가



감소

개념2 미분가능한 함수의 증가와 감소의 판정

함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간에 속하는 모든 x에 대하여

① $f'(x) > 0$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.
② $f'(x) < 0$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

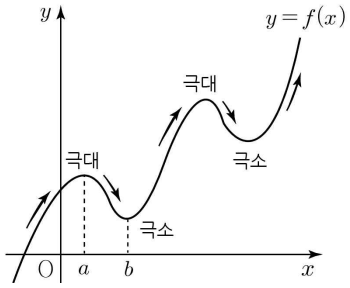
정리4 함수의 극대와 극소

개념1 함수의 극대와 극소

함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

① $f(x) \leq f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하고, $f(a)$를 극댓값이라 한다.
② $f(x) \geq f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소라 하고, $f(a)$를 극솟값이라 한다.

이때 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라 한다.



개념2 극값과 미분계수

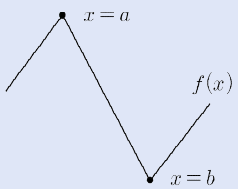
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

개념3 함수의 극대와 극소의 판정

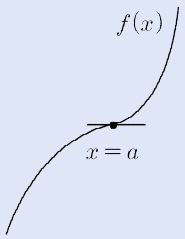
미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

① 양에서 음으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$를 갖는다.
② 음에서 양으로 바뀌면 함수 $f(a)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$를 갖는다.

TIP "$x=a$에서 극대/극소"가 반드시 "$f'(a)=0$"을 의미하지 않는다.
① $f(x)$는 $x=a$에서 미분이 불가능하지만 극대이다.
② $f(x)$는 $x=b$에서 미분이 불가능하지만 극소이다.



TIP "$f'(a)=0$"가 반드시 "$x=a$에서 극대/극소"를 의미하지 않는다.
음에서 양으로 혹은 양에서 음으로, 반드시 부호의 변화가 있는 상황이어야 한다.
$f'(a)=0$이지만 $x=a$에서 극값이 아니다.



정리5 함수의 그래프

개념1 함수의 그래프

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같은 순서로 그린다.

① $f'(x)$를 구한 후 $f'(x)=0$인 x의 값을 구한다.

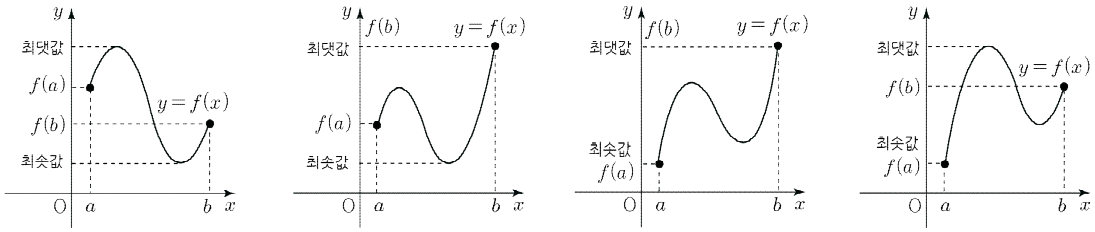
② 위에서 구한 x의 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사한다.

③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 좌표축과의 교점 등을 이용하여 그래프의 개형을 그린다.

개념2 함수의 최댓값과 최솟값

① 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 최대·최소 정리에 의하여 함수 $f(x)$는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

② 이때 닫힌구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$의 극값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.



정리6 방정식과 부등식에의 활용

개념1 방정식의 서로 다른 실근의 개수

① 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수와 같다.

② 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수와 같다.

개념2 삼차방정식의 서로 다른 실근의 개수

삼차함수 $f(x)$에 대하여 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 즉 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, 삼차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 다음과 같다.

① (극댓값) $\times$ (극솟값) <0 $\Leftrightarrow$ 서로 다른 세 실근

② (극댓값) $\times$ (극솟값) $=0$ $\Leftrightarrow$ 한 실근과 중근 (서로 다른 두 실근)

③ (극댓값) $\times$ (극솟값) >0 $\Leftrightarrow$ 한 실근과 두 허근

개념3 부등식에의 활용

① 어떤 구간에서 함수 $f(x)$가 최솟값을 가질 때, 이 구간에서 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립함을 보이려면 이 구간에서 ($f(x)$의 최솟값) ≥ 0임을 보이면 된다.

② 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립함을 보이려면 이 구간에서 $f(x)-g(x)\geq 0$임을 보이면 된다.

정리7 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때

① 시각 t에서의 점 P의 속도: $v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$

② 시각 t에서의 점 P의 가속도: $a=\frac{dv}{dt}$

THEME

4 — 다항함수의 특징

정리1 거리곱(Distance Product)

개념1 거리곱이란?

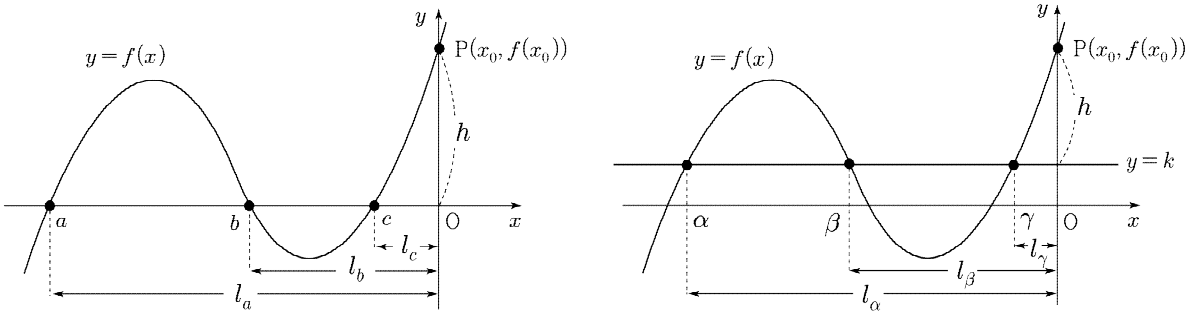
거리곱이란 임의의 함수값을 함수에 대입하지 않고, 거리의 관계를 통해 함수값을 쉽게 구할 수 있는 내용입니다.

개념2 함숫값 거리곱 ($f(x)=k$이 되는 지점을 이용)

함수 $y=f(x)=p(x-a)(x-b)(x-c)\cdots$의 임의의 한 지점 $\mathrm{P}(x_0, f(x_0))$은 다음의 성질을 만족한다.

$$\text{함숫값}(f(x_0)) = |\text{최고차항의 계수}(p)\times\text{거리}(l_a)\times\text{거리}(l_b)\times\text{거리}(l_c)\times\cdots|$$

① 근이 생기는 선을 기준선이라 하며 마음대로 옮길 수 있다.
즉, x축$(y=0)$이 아닌 다른 수평선$(y=k)$을 기준으로도 똑같이 적용할 수 있다.
② 만약에 기준선을 함수가 통과하는 것이 아니라 기준선에 접한다면 거리를 2번 곱해준다.



TIP 증명과정

① 수평선이 $y=0$인 상황

3차 함수는 일반적으로 다음과 같이 표현된다. $f(x)=p(x-a)(x-b)(x-c)$ (a, b, c는 함수 $f(x)$가 x축과 만나는 점)

이 함수를 전개하면 $f(x)=px^3-p(a+b+c)x^2+p(ab+bc+ca)x-pabc$가 된다.

여기서 $f(0)=-pabc$이다. 따라서 $h=|p\times l_a\times l_b\times l_c|$이다.

① 수평선이 $y=k$인 상황

함수 $y=f(x)$와 수평선 $y=k$가 만나는 교점을 α, β, γ라고 정의해보자.

$p(x-a)(x-b)(x-c)=k$에서 $g(x)=px^3-p(a+b+c)x^2+p(ab+bc+ca)x-pabc-k=0$이고,

p로 나누면 $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc-\frac{k}{p}=0$이므로 $g(x)$의 해는 $\alpha\beta\gamma=abc+\frac{k}{p}$를 만족한다. (근과 계수의 관계)

여기서 $p\alpha\beta\gamma=pabc+k$에서 $pabc=p\alpha\beta\gamma-k$이다.

여기서 $g(0)=-pabc-k=p\alpha\beta\gamma$이다. 따라서 $h=|p\times l_\alpha\times l_\beta\times l_\gamma|$이다.

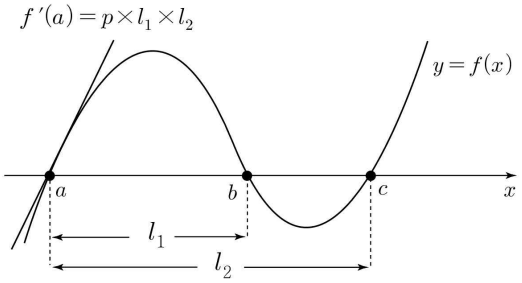
정리2 미분계수

개념1 미분계수와 거리곱 ($f(x)=0$이 되는 지점 + 함숫값이 0이 되는 점을 이용)

미분계수 거리곱은 "다항 함수의 한 근에서의 미분계수는 최고차항의 계수와 그 근에서 다른 모든 근까지의 거리들의 곱과 같다."

예를 들어 최고차항의 계수가 p이고, a, b, c를 세 근으로 갖는 3차 함수 $f(x)=p(x-a)(x-b)(x-c)$로 설정할 수 있습니다.
우리가 여기서 구하려는 값은 이 함수의 한 근인 $x=a$에서의 미분계수, 즉 $f'(a)$입니다.

미분계수의 정의에 따라 $f'(a)=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\dfrac{p(x-a)(x-b)(x-c)-0}{x-a}=\lim_{x\to a}p(x-b)(x-c)$입니다.
따라서 $f'(a)=p(a-b)(a-c)=p\times l_1\times l_2$를 의미합니다.

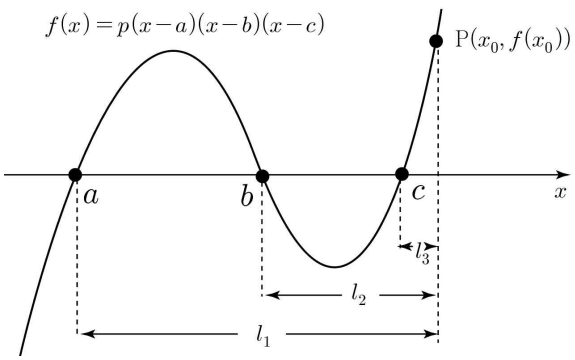


개념2 미분계수와 상대곱 ($f(x)=0$이 되는 지점 + 임의의 점을 이용)

방금 학습했던 미분계수 거리곱은 임의의 점에서 미분계수를 구하는 방법이 아닌, 특수한 해에 대한 미분계수를 구할 수 있는 방법입니다.
이번에 학습할 상대곱은 임의의 지점에 대한 미분계수를 구할 수 있는 방법입니다.

구체적으로 상대곱이란 다항함수 $f(x)$의 근을 알고 있을 때, 특정 지점 $x=x_0$에서의 미분계수 $f'(x_0)$를 쉽게 구하는 방법입니다.

근이 a, b, c이고 최고차항의 계수가 p인 3차 함수는 $f(x)=p(x-a)(x-b)(x-c)$로 표현할 수 있습니다.
이때 이 함수를 미분하면 $f'(x)=p[(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)]$입니다.
이제 위 식에 x_0을 대입하면 $f'(x_0)=p[(x_0-b)(x_0-c)+(x_0-a)(x_0-c)+(x_0-a)(x_0-b)]=p(l_2l_3+l_1l_3+l_1l_2)$입니다.



정리2 미분계수

개념3 도함수 거리곱 ($f'(x)=0$이 되는 지점을 이용)

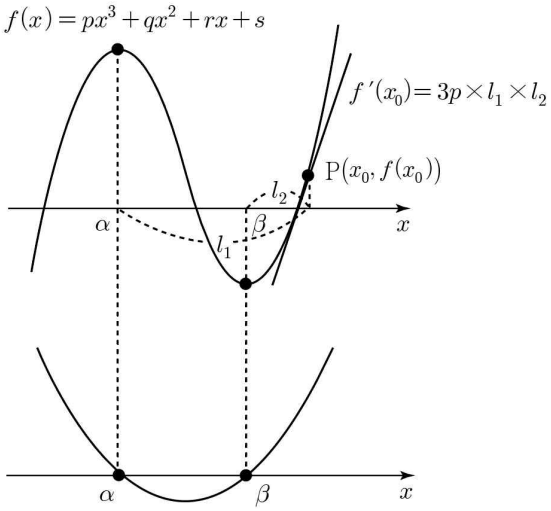
도함수 거리곱은 "어떤 함수의 도함숫값은, 그 도함수의 근(즉, 원래 함수의 극점 x좌표)을 기준으로 한 함숫값 거리곱과 같다."

우선, 최고차항의 계수가 p인 삼차함수 $f(x)$를 다음과 같이 설정한다. $f(x)=px^3+qx^2+rx+s$
이 함수의 도함수 $f'(x)=3px^2+2qx+r$이다.
여기서 중요한 점은 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 이차함수이고, 그 최고차항의 계수는 $3p$라는 것이다.

문제의 조건에서 $x=\alpha$와 $x=\beta$는 함수 $f(x)$의 극값의 x좌표이다.
극값의 정의에 따라, 이 지점들에서 미분계수(접선의 기울기)는 0이 된다. $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$

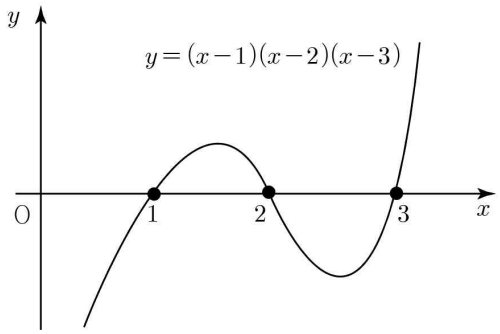
최고차항의 계수가 $3p$이고 두 근이 α, β인 이차함수 $f'(x)$는 다음과 같이 인수분해된 형태로 표현할 수 있다.
$f'(x)=3p(x-\alpha)(x-\beta)$ (함수의 거리곱 참조)

위에서 유도한 도함수 $f'(x)$의 식에 $x=x_0$를 대입하면 $f'(x_0)=3p(x_0-\alpha)(x_0-\beta)=3p\times l_1\times l_2$가 증명된다.



예제1 함숫값 거리곱

함수 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$에 대하여 $f(8)$의 값을 구하시오.

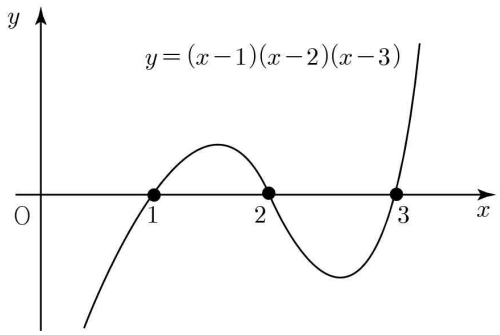


해설

$x=8$과 함수 $f(x)$와 $y=0$이 만나는 지점들 사이의 거리는 각각 7, 6, 5이다.
따라서 $f(8)=7\times6\times5=210$이다.

예제2 미분계수 거리곱

함수 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$에 대하여 $f'(3)$의 값을 구하시오.

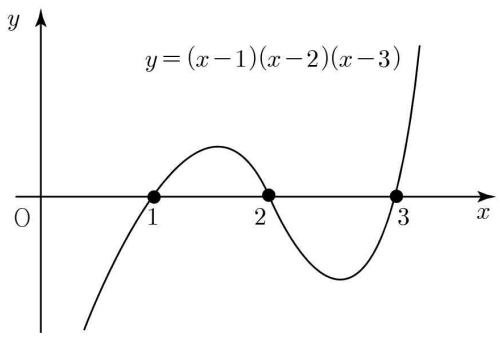


해설

$f'(a)=p(a-b)(a-c)=p\times l_1\times l_2$ 공식에 의하여
$f'(3)=1\times1\times2=2$이다.

예제3 미분계수 상대곱

함수 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$에 대하여 $f'(4)$의 값을 구하시오.

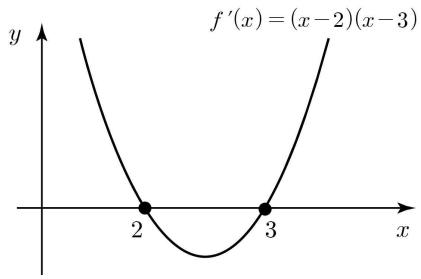


해설

$x=4$로부터 각 점으로부터 떨어진 거리는 3, 2, 1이다.
따라서 $l_2l_3=2$, $l_1l_3=3$, $l_1l_2=6$이다.
$f'(x_0)=p(l_2l_3+l_1l_3+l_1l_2)$의 공식에 의하여
$f'(4)=1\times(2+3+6)=11$이다.

예제4 도함수 거리곱

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x$에 대하여 $f'(4)$의 값을 구하시오.



해설

$f'(x)=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$이므로

함수 $f(x)$가 극값을 갖는 지점은 $x=2$, $x=3$이다.

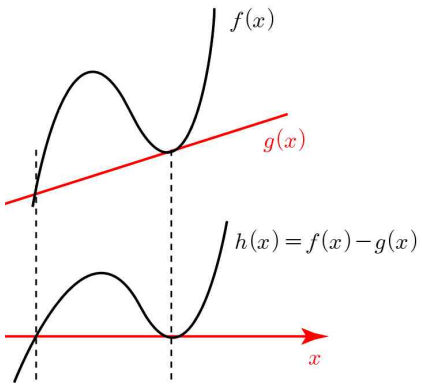
$f'(x_0)=3p(x_0-\alpha)(x_0-\beta)=3p\times l_1\times l_2$ 공식에 의하여

따라서 $f'(4)=\frac{1}{3}3\times2\times1\times=2$이다.

정리3 차평면과 차함수

개념1 차평면과 차함수

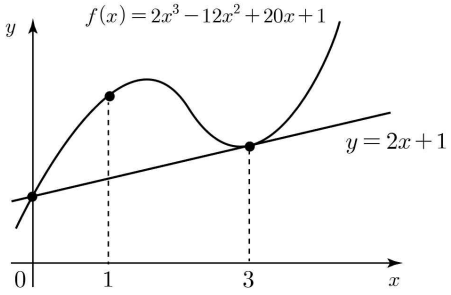
차함수란 이름 그대로 두 함수를 뺀 함수, 즉 $h(x)=f(x)-g(x)$를 말합니다.
곡선 $f(x)$와 $g(x)$가 있을 때, 이 두 함수의 관계를 직접 분석하는 대신, 새로운 함수 $h(x)$를 만들어 분석하는 것입니다.
왜냐하면 두 곡선이 얽혀 있으면 교점, 넓이, 극대/극소 지점 등을 파악하기 어려운데, 이때 차함수를 사용하면 복잡했던 두 곡선의 관계가 하나의 곡선($h(x)$)과 x축의 관계라는 훨씬 간단한 문제로 바뀌게 됩니다.



이렇게 x축과 단일 곡선으로 정의하면 원래 알고 있던 적분 공식, 거리곱에서 사용할 수 있습니다.
또한 이를 발전시키면 차평면을 옮기지 않고 머릿속에서 계산을 할 수 있습니다.

예제5 차평면과 차함수

함수 $f(x)=2x^3-12x^2+20x+1$과 $y=2x+1$이 만나는 두 점의 x좌표는 각각 0, 3이다. 이때 $f(1)$의 값을 구하시오.



해설

$f(1)$의 함숫값을 구할 때 차함수를 사용하여보면
차함수에서 $x'=1$에서의 함숫값 거리곱을 계산하여 보면
$f(1)-g(1)=2\times1\times2^2$이며 (접하므로 거리를 제곱한다.)
이때 기준 함숫값(직선)은 3이므로
함숫값의 차함수 함숫값을 더하면 $f(1)=11$이다.

유형 01 미분계수

01 2022학년도 6월 5번 정답률 88%

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2+3)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

02 2022학년도 9월 2번 정답률 88%

2. 함수 $f(x)=2x^3+4x+5$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

03 2022학년도 수능 2번 정답률 88%

2. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

04 2023학년도 수능 4번 정답률 78%

4. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=x^2f(x)$$

라 하자. $f(2)=1$, $f'(2)=3$일 때, $g'(2)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

05 2024학년도 6월 5번 정답률 76%

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^3+1)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=3$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

06 2024학년도 9월 2번 정답률 82%

2. 함수 $f(x)=2x^2-x$에 대하여 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

07 2024학년도 9월 18번 정답률 75%

18. 함수 $f(x)=(x^2+1)(x^2+ax+3)$에 대하여 $f'(1)=32$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

08 2024학년도 수능 17번 정답률 82%

17. 함수 $f(x)=(x+1)(x^2+3)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

09 2025학년도 6월 5번 정답률 85%

5. 함수 $f(x)=(x^2-1)(x^2+2x+2)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

10 2025학년도 9월 2번 정답률 85%

2. 함수 $f(x)=x^3+3x^2-5$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 값은? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

11 2025학년도 9월 5번 정답률 86%

5. 함수 $f(x)=(x+1)(x^2+x-5)$에 대하여 $f'(2)$의 값은? [3점]

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

12 2025학년도 수능 5번 정답률 86%

5. 함수 $f(x)=(x^2+1)(3x^2-x)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

13 2026학년도 9월 5번 정답률 97%

5. 함수 $f(x)=(x^2+2)(x^2+x-3)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

14 2026학년도 수능 5번 정답률 94%

5. 함수 $f(x)=(x+2)(2x^2-x-2)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

유형 02 평균변화율과 미분계수

01 2022학년도 9월 19번 정답률 55%

19. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율과 $f'(a)$의 값이 같게 되도록 하는 $0<a<4$인 모든 실수 a의 값의 곱은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

유형 03 미분계수와 극한값

01 2023학년도 6월 2번 정답률 80%

2. 함수 $f(x)=x^3+9$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

02 2024학년도 6월 2번 정답률 81%

2. 함수 $f(x)=x^2-2x+3$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

03 2024학년도 수능 2번 정답률 83%

2. 함수 $f(x)=2x^3-5x^2+3$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

04 2025학년도 6월 2번 정답률 82%

2. 함수 $f(x)=x^2+x+2$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

05 2025학년도 수능 2번 정답률 88%

2. 함수 $f(x)=x^3-8x+7$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

유형 04 도함수의 응용

01 2022학년도 수능 22번 정답률 7%

22. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 닫힌구간 $[t, t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t\to a+} g(t)+\lim_{t\to a-} g(t)\le 2$이다.
(나) $g(f(1))=g(f(4))=2$, $g(f(0))=1$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

02 2023학년도 수능 22번 정답률 5%

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.

(나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.

(다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

03 2026학년도 6월 7번 정답률 97%

7. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=5x^2+xf(x)$$

라 하자. $f(3)=2$, $f'(3)=1$일 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

유형 05 접선의 방정식

01 2022학년도 수능 10번 정답률 49%

10. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은? [4점]

① -18 ② -17 ③ -16 ④ -15 ⑤ -14

02 2023학년도 9월 8번 정답률 60%

8. 곡선 $y=x^3-4x+5$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선이 곡선 $y=x^4+3x+a$에 접할 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

03 2023학년도 수능 8번 정답률 64%

8. 점 $(0, 4)$에서 곡선 $y=x^3-x+2$에 그은 접선의 x절편은? [3점]

① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

04 2024학년도 9월 10번 정답률 52%

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, f(-2))$에서의 접선과
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선이
점 $(1, 3)$에서 만날 때, $f(0)$의 값은? [4점]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

05 2024학년도 수능 20번 정답률 15%

20. $a>\sqrt{2}$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=-x^3+ax^2+2x$$

라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0,0)$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 A라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}$의 값을 구하시오. [4점]

06 2025학년도 6월 11번 정답률 57%

11. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{x-a}=3$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 y절편이 4일 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

07 2026학년도 9월 7번 정답률 96%

7. 곡선 $y=x^3-5x^2+6x$ 위의 점 $(3, 0)$에서의 접선이 점 $(5, a)$를 지날 때, a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

08 2026학년도 수능 9번 정답률 82%

9. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3+3ax^2-9a^2x+4$$

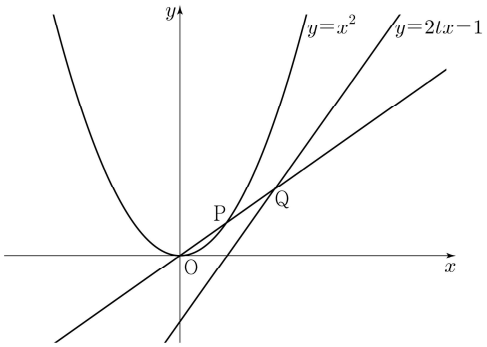
라 하자. 직선 $y=5$가 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

유형 06 곡선과 직선 사이의 거리의 최대, 최소

01 2024학년도 6월 11번 정답률 53%

11. 그림과 같이 실수 $t\,(0<t<1)$에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과의 거리가 최소인 점을 P라 하고, 직선 OP가 직선 $y=2tx-1$과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim\limits_{t\to1-}\dfrac{\overline{PQ}}{1-t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

유형 07 함수의 증가와 감소

01 2023학년도 6월 8번 정답률 55%

8. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최솟값은? [3점]

> (가) $f(1)=3$
> (나) $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 5$이다.

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

02 2022학년도 수능 19번 정답률 51%

19. 함수 $f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오. [3점]

유형 08 함수의 증가와 감소

01 2024학년도 9월 13번 정답률 30%

13. 두 실수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0) \\ \dfrac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고 구간 $[-1, \infty)$에서 증가할 때, $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{2}+3\sqrt{2}$ ② $3+3\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{9}{2}+3\sqrt{2}$

④ $6+3\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{15}{2}+3\sqrt{2}$

유형 09 함수의 극대와 극소

01 2022학년도 6월 17번 정답률 71%

17. 함수 $f(x)=x^3-3x+12$가 $x=a$에서 극소일 때, $a+f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

02 2022학년도 9월 5번 정답률 83%

5. 함수 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$의 극댓값과 극솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [3점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

03 2023학년도 6월 19번 정답률 63%

19. 함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$는 $x=1$에서 극소이다.
함수 $f(x)$의 극댓값이 4일 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 상수이다.) [3점]

04 2023학년도 9월 6번 정답률 78%

6. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+k$의 극댓값이 9일 때,
함수 $f(x)$의 극솟값은? (단, k는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

05 2023학년도 수능 6번 정답률 78%

6. 함수 $f(x)=2x^3-9x^2+ax+5$는 $x=1$에서 극대이고,
$x=b$에서 극소이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

06 2024학년도 6월 18번 정답률 73%

18. 두 상수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx+a$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 -2일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [3점]

07 2024학년도 9월 6번 정답률 84%

6. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$은 $x=-1$에서 극대이고, $x=3$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 0 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

08 2024학년도 수능 7번 정답률 79%

7. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4$가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소일 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, α와 β는 상수이다.) [3점]

① -4 ② -1 ③ 2 ④ 5 ⑤ 8

09 2025학년도 수능 19번 정답률 71%

19. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=2x^3-3ax^2-12a^2x$$

라 하자. 함수 $f(x)$의 극댓값이 $\frac{7}{27}$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [3점]

10 2025학년도 9월 19번 정답률 78%

19. 함수 $f(x)=x^3+ax^2-9x+b$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 28일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

11 2026학년도 6월 19번 정답률 94%

19. 상수 a에 대하여 함수 $f(x)=3x^3-9x^2+a$의 극댓값이 20일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값을 구하시오. [3점]

12 2026학년도 9월 19번 정답률 94%

19. 함수 $f(x)=2x^3-3ax^2+5a$의 극솟값이 a일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

13 2026학년도 수능 19번 정답률 86%

19. $-2 \le x \le 2$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$-k \le 2x^3+3x^2-12x-8 \le k$$

가 성립하도록 하는 양수 k의 최솟값을 구하시오. [3점]

유형 10 함수의 그래프

01 2022학년도 6월 14번 정답률 39%

14. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
> (나) 함수 $g(x)$가 $x-a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

02 2024학년도 6월 22번 정답률 2%

22. 정수 $a\,(a \neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = x^3 - 2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

> 함수 $f(x)$에 대하여
> $$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\} \times \left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\} < 0$$
> 을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

03 2024학년도 수능 14번 정답률 15%

14. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x\le 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

04 2024학년도 수능 22번 정답률 1%

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$에 대하여
> $f(k-1)f(k+1)<0$
> 을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

05 2026학년도 6월 15번 정답률 40%

15. 상수 k와 $f'(0)=6$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+k & (|x|>1) \\ -f(x) & (|x|\le 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $k+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하고 그 값은 0 이하이다.
> (나) x에 대한 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값은 13이다.

① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ $\frac{39}{4}$ ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{63}{4}$

06 2026학년도 6월 21번 정답률 44%

21. 함수 $f(x)=(x-1)(x-2)$와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 a에 대하여
> $\lim_{x\to a}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$의 값과 $\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$의 값이
> 모두 존재한다.

$g(-1)$의 값을 구하시오. [4점]

07 2026학년도 수능 21번 정답률 28%

21. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} -f(x) & (x<t) \\ f(x) & (x\geq t) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}\dfrac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 존재한다.
>
> (나) $\lim_{x\to m+}\dfrac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 음수가 되도록 하는 자연수 m의 집합은 $\left\{g(-1),\ -\dfrac{7}{2}g(1)\right\}$이다.

$g(-5)$의 값을 구하시오. (단, $g(-1)\neq-\dfrac{7}{2}g(1)$) [4점]

유형 11 방정식과 부등식 활용

01 2022학년도 9월 20번 정답률 21%

20. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

02 2022학년도 수능 6번 정답률 78%

6. 방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는? [3점]

① 20 ② 23 ③ 26 ④ 29 ⑤ 32

03 2023학년도 6월 9번 정답률 78%

9. 두 함수

$$f(x)=x^3-x+6,\quad g(x)=x^2+a$$

가 있다. $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x)\geq g(x)$$

가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

04 2023학년도 9월 19번 정답률 66%

19. 방정식 $3x^4-4x^3-12x^2+k=0$이 서로 다른 4개의 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점]

05 2023학년도 수능 19번 정답률 49%

19. 방정식 $2x^3-6x^2+k=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오. [3점]

06 2024학년도 6월 8번 정답률 63%

8. 두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

07 2025학년도 6월 7번 정답률 85%

7. x에 대한 방정식 $x^3-3x^2-9x+k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은? [3점]

① 13 ② 16 ③ 19 ④ 22 ⑤ 25

유형 12 방정식과 부등식 활용 – 함수의 결정

01 2022학년도 6월 22번 정답률 4%

22. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

02 2022학년도 9월 22번 정답률 3%

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

03 2023학년도 9월 22번 정답률 4%

22. 최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x<t) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

04 2025학년도 6월 21번 정답률 17%

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(a) \le 0$인 실수 a의 최댓값은 2이다.
> (나) 집합 $\{x \mid f(x)=k\}$의 원소의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 $\frac{8}{3}$이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=0$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

05 2025학년도 9월 21번 정답률 7%

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여

$$2k-8 \le \frac{f(k+2)-f(k)}{2} \le 4k^2+14k$$

를 만족시킬 때, $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

06 2025학년도 수능 15번 정답률 32%

15. 상수 $a\,(a \neq 3\sqrt{5})$와 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+15x+7 & (x \leq 0) \\ f(x) & (x>0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) x에 대한 방정식 $g'(x) \times g'(x-4)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$g(-2)+g(2)$의 값은? [4점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

07 2026학년도 9월 21번 정답률 22%

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

0이 아닌 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{f'(x)}{2}+x^2-2 \le \frac{f(2x)-f(0)}{2x} \le x^4$$

이다.

유형 13 속도와 가속도

01 2025학년도 9월 11번 정답률 69%

11. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치가 각각

$$x_1 = t^2 + t - 6, \quad x_2 = -t^3 + 7t^2$$

이다. 두 점 P, Q의 위치가 같아지는 순간 두 점 P, Q의 가속도를 각각 p, q라 할 때, $p-q$의 값은? [4점]

① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

02 2025학년도 수능 11번 정답률 77%

11. 시각 $t=0$일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 6t$$

이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에서의 점 P의 가속도는? [4점]

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

유형 01 미분계수

01 2022학년도 6월 5번 정답률 88%

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2+3)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

정 답 ③

해 설

곱의 미분법을 이용하자.

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+3)f'(x)$에서

$g'(1)=2f(1)+4f'(1)=4+4=8$이다.

02 2022학년도 9월 2번 정답률 88%

2. 함수 $f(x)=2x^3+4x+5$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

정 답 ⑤

해 설

$f'(x)=6x^2+4$에서 $f'(1)=10$이다.

03 2022학년도 수능 2번 정답률 88%

2. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

정 답 ⑤

해 설

$f'(x)=3x^2+6x+1$에서 $f'(1)=10$이다.

04 2023학년도 수능 4번 정답률 78%

4. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=x^2f(x)$$

라 하자. $f(2)=1$, $f'(2)=3$일 때, $g'(2)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

정 답 ③

해 설

곱의 미분법을 이용하면 $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$에서
$g'(2)=4f(2)+4f'(2)=4\cdot1+4\cdot3=16$이다.

05 2024학년도 6월 5번 정답률 76%

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^3+1)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=3$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

정 답 ①

해 설

곱의 미분법을 이용하자.
$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+1)f'(x)$
$g'(1)=3f(1)+2f'(1)=3\cdot2+2\cdot3=12$이다.

06 2024학년도 9월 2번 정답률 82%

2. 함수 $f(x)=2x^2-x$에 대하여 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ③

해 설

극한식을 파악해 미분계수의 정의꼴로 변형하자.

- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$의 값이 존재하기 위해서는
  (분모→0)이기 때문에 (분자→0)이어야 한다. (부정형)
  따라서 $f(1)-1=0$이므로 $f(1)=1$이다.
- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$에서
  $f'(x)=4x-1$이고, $f'(1)=3$이다.

07 2024학년도 9월 18번 정답률 75%

18. 함수 $f(x)=(x^2+1)(x^2+ax+3)$에 대하여 $f'(1)=32$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

정 답 5

해 설

곱의 미분법

$f'(x)=2x(x^2+ax+3)+(x^2+1)(2x+a)$

$f'(1)=2(a+4)+2(a+2)=4a+12=32$에서 $a=5$이다.

08 2024학년도 수능 17번 정답률 82%

17. 함수 $f(x)=(x+1)(x^2+3)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 ④

해 설

곱의 미분법

$f'(x)=(x^2+3)+(x+1)2x$

$f'(1)=4+4=8$이다.

09 2025학년도 6월 5번 정답률 85%

5. 함수 $f(x)=(x^2-1)(x^2+2x+2)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

정 답 ⑤

해 설

곱의 미분법을 이용하자.

$f'(x)=2x(x^2+2x+2)+(x^2-1)(2x+2)$

$f'(1)=2\cdot 5+0=10$

10 2025학년도 9월 2번 정답률 85%

2. 함수 $f(x)=x^3+3x^2-5$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 값은? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

정 답 ⑤

해 설

미분 계수의 정의를 이용하자.

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$

$f'(x)=3x^2+6x$에서 $f'(1)=9$이다.

11 2025학년도 9월 5번 정답률 86%

5. 함수 $f(x)=(x+1)(x^2+x-5)$에 대하여 $f'(2)$의 값은? [3점]

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

정 답 ②

해 설

$f'(x)=1(x^2+x-5)+(x+1)(2x+1)$에서

$f'(2)=1(4+2-5)+3\cdot 5=16$

12 2025학년도 수능 5번 정답률 86%

5. 함수 $f(x)=(x^2+1)(3x^2-x)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

정 답 ④

해 설

곱의 미분법을 이용하자.

$f'(x)=2x\cdot(3x^2-x)+(x^2+1)(6x-1)$

$f'(1)=2(3-1)+(1+1)5=4+10=14$

13 2026학년도 9월 5번 정답률 97%

5. 함수 $f(x)=(x^2+2)(x^2+x-3)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

정 답 ②

해 설

$f'(x)=2x(x^2+x-3)+(x^2+2)(2x+1)$이다.
$f'(1)=-2+9=7$이다.

14 2026학년도 수능 5번 정답률 94%

5. 함수 $f(x)=(x+2)(2x^2-x-2)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

정 답 ③

해 설

곱의 미분법을 이용하면 $f'(x)=2x^2-x-2+(x+2)(4x-1)$이다.
따라서, $f'(1)=8$이다.

유형 02 평균변화율과 미분계수

01 2022학년도 9월 19번 정답률 55%

19. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율과 $f'(a)$의 값이 같게 되도록 하는 $0<a<4$인 모든 실수 a의 값의 곱은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

정 답 ②

해 설

STEP1 평균 변화율의 값을 구하자.

두 점 사이의 평균 변화율 = 두 점 사이의 기울기

- $f(0)=0$
- $f(4)=64-96+20=-12$
- $(0,0)$과 $(4,-12)$ 사이의 기울기 : $\frac{-12-0}{4-0}=-3$이다.

STEP2 $f'(a)=-3$이 되는 a의 값을 찾자.

- $f'(x)=3x^2-12x+5$에서 $3x^2-12x+5=-3$을 정리하면 $3x^2-12x+8=0$이고, 근과 계수와의 관계로 a값의 곱은 $\frac{8}{3}$이다.

따라서 $p+q=8+3=11$이다.

유형 03 미분계수와 극한값

01 2023학년도 6월 2번 정답률 80%

2. 함수 $f(x)=x^3+9$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

정 답 ②

해 설

미분 계수의 정의를 이용하자.

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$

$f'(x)=3x^2$에서 $f'(2)=12$이다.

02 2024학년도 6월 2번 정답률 81%

2. 함수 $f(x)=x^2-2x+3$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ④

해 설

미분 계수의 정의를 이용하자.

$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)$

$f'(x)=2x-2$에서 $f'(3)=4$이다.

03 2024학년도 수능 2번 정답률 83%

2. 함수 $f(x)=2x^3-5x^2+3$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ④

해 설

미분 계수의 정의를 이용하자.

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$

$f'(x)=6x^2-10x$에서 $f'(2)=24-20=4$이다.

04 2025학년도 6월 2번 정답률 82%

2. 함수 $f(x)=x^2+x+2$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ⑤

해 설

미분계수의 정의를 이용하자.

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$

$f'(2)=2x+1$에서 $f'(2)=5$이다.

05 2025학년도 수능 2번 정답률 88%

2. 함수 $f(x)=x^3-8x+7$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ④

해 설

- 미분계수의 정의를 이용하자.

  $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$

- $f'(x)=3x^2-8$이므로 $f'(2)=4$이다.

유형 04 도함수의 응용

01 2022학년도 수능 22번 정답률 7%

22. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 닫힌구간 $[t, t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t\to a+} g(t)+\lim_{t\to a-} g(t)\le 2$이다.

(나) $g(f(1))=g(f(4))=2,\ g(f(0))=1$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

정 답 9

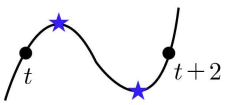
해 설

STEP1 극소 극대의 x값 차이를 기준으로 (가) 조건을 해석하자.

• $g(t)$는 정의역 $[t, t+2]$에 포함되는 극대/극소점의 개수이다.
(다항 함수이기 때문에 극대/극소에서 $f'(x)=0$이므로)

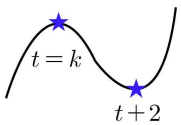
1) 극대/극소의 x값의 차이 <2

$\lim_{t\to a+} g(t)+\lim_{t\to a-} g(t)=4$가 존재한다. (모순)



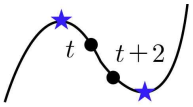
2) 극대/극소의 x값의 차이 $=2$

극댓값의 x좌표를 k라고 할 때, $g(k)$의 값은 2를 만족하지만 문제에서는 $g(x)$의 함숫값이 아닌 극한값을 물어보고 있다.
$g(x)$의 극한값은 항상 1 이하이다. (조건 만족)



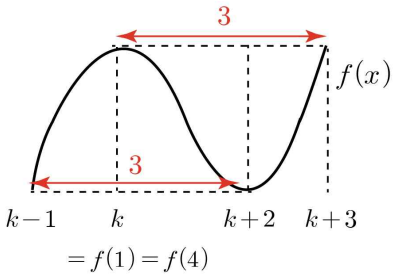
3) 극대/극소의 x값의 차이 >2

모든 t에 대해서 $g(t)\le 1$이다. (조건 만족)



STEP2 (나) 조건 해석해서 $f(x)$의 개형 확정

• $g(f(1))=g(f(4))=2$인 조건을 만족하기 위해서는 STEP1의 개형 2)만이 가능하다. [개형 3)]에서는 g의 값이 2가 나오지 않기 때문이다.)
따라서 $f(x)$의 아래에 대한 정보까지 확정짓는다.



$=f(1)=f(4)$

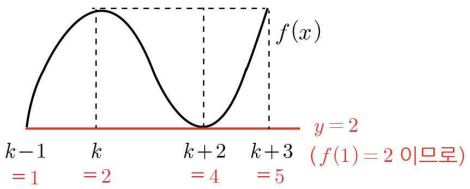
$f(1)=f(4)=k$의 해석이 중요한데 x의 값이 3차이가 나면서 같은 y의 값을 갖는 경우는 아래 2가지 밖에 없다.
(3차 함수의 비율 관계 참고)

• $k-1=1$ / $k+2=4$ … ①

• $k=1$ / $k+3=4$ … ②

STEP3 (나)의 마지막 조건을 활용해 $f(x)$ 개형 최종 확정

①

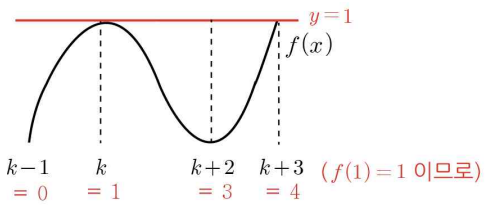


$=f(1)=f(4)$

$f(x)-2=\frac{1}{2}(x-1)\cdot(x-4)^2$

$g(f(0))=g(-6)=0$이므로 모순이다.
(정의역 $[-6, -4]$에 포함되는 극값 없음)

②



$=f(1)=f(4)$

$f(x)-1=\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)$

$g(f(0))=g(-1)=1$이므로 조건을 만족한다.

STEP4 $f(5)$의 값 구하기

$f(5)=\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 1+1=9$이다.

02 2023학년도 수능 22번 정답률 5%

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.
>
> (나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.
>
> (다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

정 답 13

해 설

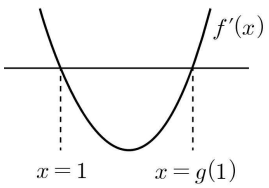
STEP1 (가) 식을 변형해 의미를 알아보자.

(가) 식을 보면 얼핏 평균변화율의 꼴이 눈에 밟히는 것을 알 수 있다. 이를 활용해보면

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(g(x))$ $(x\neq 1)$이다.

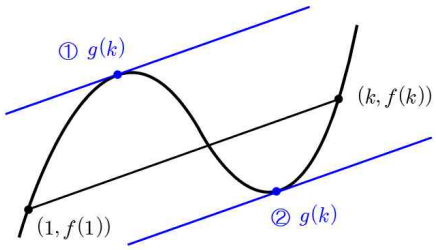
양변에 $\lim_{x\to 1}$을 취해보면 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=f'(g(1))$이다.

이를 해석해보면 $f'(x)$의 그래프가 다음과 같음을 알 수 있다. …①

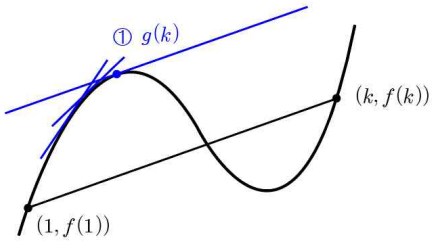


이유: $g(1)$의 값은 (나) 조건에 의해 1보다 작거나 같아질 수 없다.

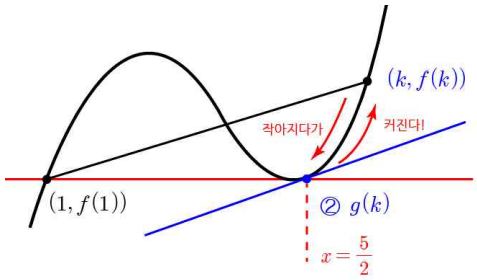
또한 모든 실수 x에 대해 (가) 조건이 만족해야 하므로 $f(x)$의 그래프의 상황을 표현하면 $g(x)$가 될 수 있는 후보는 다음과 같다.



하지만 $g(k)$의 1번 경우는 k의 값이 변동됨에 따라 최솟값이 존재할 수 없이 한없이 작아짐을 알 수 있다. 따라서 2번 경우를 만족해야 한다.



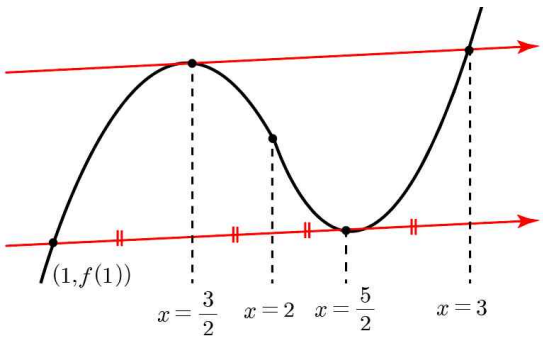
STEP2 (나) 조건을 해석해 그래프에서 의미하는 바를 알아내자



g(k)의 최솟값에 집중해서 g(k)의 변화를 살펴보면 값이 점점 작아지면서 위의 그림과 같이 접하게 되는 순간에 최솟값을 만들어내고 k의 값이 더 작아지더라도 g(k)의 값은 오히려 다시 커지게 됨을 관찰할 수 있다.

STEP3 3차함수의 비율관계를 이용해 f(x)의 식을 쓰자

학생들이 많이 외우는 3차함수의 비율관계는 기울어져 있어도 성립한다!



$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$로 세우고

- $f'(x)$ 식은 $x=2$를 대칭축으로 하는 2차함수
- $f(0)=-3$
- $f(g(1))=f(3)=6$ → ①에 의해 $g(1)=3$이다.

이를 이용하면 $f(x)=x^3-6x^2+12x-3$

$\therefore f(4)=64-96+48-3=13$

03 2026학년도 6월 7번 정답률 97%

7. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=5x^2+xf(x)$$

라 하자. $f(3)=2$, $f'(3)=1$일 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

정 답 ⑤

해 설

$g(x)=5x^2+xf(x)$에서 양변을 미분하면,
$g'(x)=10x+f(x)+xf'(x)$이다.
$g'(3)=10\times3+f(3)+3f'(3)=30+2+3=35$이다.

유형 05 접선의 방정식

01 2022학년도 수능 10번 정답률 49%

10. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은? [4점]

① -18 ② -17 ③ -16 ④ -15 ⑤ -14

정 답 ⑤

해 설

계산을 견뎌야 한다.

- $f(x)$가 $(0,0)$을 지나므로 $f(0)=0$이고, $(0,0)$에서 접선은 $(1,2)$를 지난다.
  따라서, 접선은 $y=2x$이고, $f'(0)=2$이다.
- $y=xf(x)$가 $(1,2)$를 지남 → $f(1)=2$
  $x=1$에서 미분계수가 2이다. → $f(1)+f'(1)=2$
  따라서, $f'(1)=0$이고, $f(x)=ax^3+bx^2+2x$로 둘 수 있다. $f'(1)=0$와 $f(1)=2$를 대입하여 a, b를 구한다.

$\therefore f(x)=-2x^3+2x^2+2x$, $f'(x)=-6x^2+4x+2$
$f'(2)=-24+8+2=-14$이다.

02 2023학년도 9월 8번 정답률 60%

8. 곡선 $y=x^3-4x+5$ 위의 점 $(1,2)$에서의 접선이 곡선 $y=x^4+3x+a$에 접할 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

정 답 ①

해 설

STEP1 삼차함수에서의 접선을 구해보자.

- $f(x)=x^3-4x+5$, $f'(x)=3x^2-4$
- $(1,2)$에서의 접선 :
  $y=f'(1)(x-1)+2=-(x-1)+2=-x+3$

STEP2 사차함수 위 임의의 점에서 그은 접선이 STEP 1에서의 직선의 방정식임을 이용하자.

- $g(x)=x^4+3x+a$, $g'(x)=4x^3+3$
- $(k, g(k))$에서의 접선:
  $y=g'(k)(x-k)+g(k)=(4k^3+3)(x-k)+k^4+3k+a$
  $=(4k^3+3)x-3k^4+a$
- $(4k^3+3)x-3k^4+a=-x+3$
  * $4k^3+3=-1$에서 $k=-1$이다.
  * $-3k^4+a=3$에서 $a=6$이다.

03 2023학년도 수능 8번 정답률 64%

8. 점 $(0, 4)$에서 곡선 $y=x^3-x+2$에 그은 접선의 x절편은? [3점]

① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

정 답 ④

해 설

Tip. 외부의 점에서 긋는 접선의 방정식 : 임의의 접점을 설정하여 외부의 점을 지남을 이용하자.

- 접점 (a, a^3-a+2)에서 그은 접선의 방정식 :
  $y=f'(a)(x-a)+f(a)=(3a^2-1)(x-a)+a^3-a+2$
- 위의 접선의 방정식에 $(0,4)$를 대입하자.
  $4=(3a^2-1)(-a)+a^3-a+2=-2a^3+2$에서 $a=-1$이다.
- 접선의 방정식 : $y=2(x+1)+2=2x+4$에서
  x절편은 -2이다.

04 2024학년도 9월 10번 정답률 52%

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, f(-2))$에서의 접선과
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선이
점 $(1, 3)$에서 만날 때, $f(0)$의 값은? [4점]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

정 답 ③

해 설

$(2,3)$에서의 접선이 $(1,3)$을 지나는 것에 집중하자
$(1,3)$과 $(2,3)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=3$이다.
접선의 방정식이 상수함수이기 위해서는 극대 혹은
극소에서의 접선의 방정식이다
→ $f'(2)=0$

$$\begin{cases} f(x)-3=(x-k)\cdot(x-2)^2 \\ f'(x)=(x-2)^2+(x-k)\cdot 2(x-2) \end{cases}$$

$f(-2)=(-2-k)\cdot 16+3=-16k-29$
$f'(-2)=16+(-2-k)\cdot 2\cdot(-4)=8k+32$

$(-2, f(-2))$에서의 접선의 방정식은
$y=(8k+32)(x+2)-16k-29$
위 식에 $(1,3)$을 대입하면 $k=-8$이다.

$\therefore f(x)=(x+8)(x-2)^2+3$
$f(0)=32+3=35$

05 2024학년도 수능 20번 정답률 15%

20. $a>\sqrt{2}$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=-x^3+ax^2+2x$$

라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0,0)$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 A라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}$의 값을 구하시오. [4점]

정 답 ③

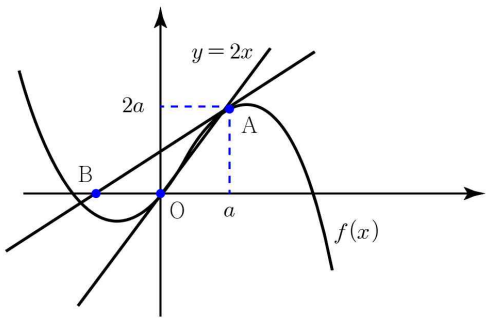
해 설

STEP1 접선의 방정식을 구하고 점 A의 위치를 알아보자

- $f(x)=-x^3+ax^2+2x$
  $f'(x)=-3x^2+2ax+2$
- $(0,0)$에서의 접선의 방정식: $y=f'(0)x+f(0)=2x$이다.
  $f(x)=2x \rightarrow -x^3+ax^2+2x=2x$
  $-x^3+ax^2=0,\ -x^2(x-a)=0$에서 점 $\mathrm{A}(a,2a)$이다.

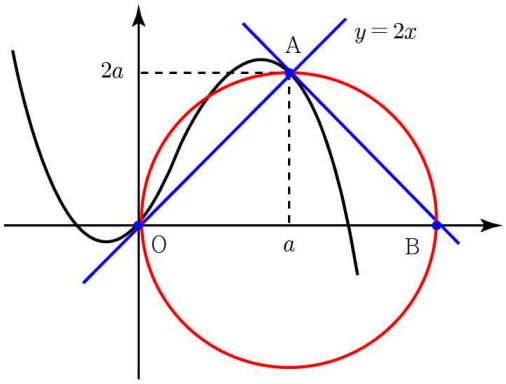
STEP2 점 A에서의 접선의 방정식의 x절편을 살펴보며 정확한 상황을 인식하자.

- 문제의 상황을 대략적으로 그리면 다음과 같다.



- 위의 상황에서 알 수 있듯 점 A가 극대점 왼쪽에서 생기면 선분 OB를 지름으로 하는 원 위에 점 A가 존재할 수 없다.

그러므로 문제의 상황을 그리면 다음과 같다.



- 점 A는 원 위의 점이므로 $y=2x$와 점 A에서의 접선의 방정식은 서로 직교해야 한다.
- $f'(a)=-3a^2+2a^2+2=-a^2+2$
  $(-a^2+2)\times 2=-1$에서 $a^2=\frac{5}{2}$이다.
- 점 A에서의 접선의 방정식 : $y=-\frac{1}{2}(x-a)+2a$를 통해 $\mathrm{B}(5a,0)$이다.
- $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{(a)^2+(2a)^2}=\sqrt{5}a,\ \overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}a$
  $\therefore \overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{5}a\cdot 2\sqrt{5}a=10a^2=10\cdot\frac{5}{2}=25$이다.

06 2025학년도 6월 11번 정답률 57%

11. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{x-a}=3$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 y절편이 4일 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

정 답 ⑤

해 설

STEP1 낯선 극한식 → 꼴 파악

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{x-a}=3$에서 (분모)→0이므로 (분자)→0이다.

따라서 $f(a)=1$이다.

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$에서 $f'(a)=3$이다.

STEP2 주어진 정보를 활용해 접선의 방정식을 작성하자

$y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식

$y=f'(a)(x-a)+f(a)=3(x-a)+1=3x-3a+1$

$\therefore\ a=-1$이다. (y절편 4)

STEP3 $f(x)$ 식을 완성하여 마무리하자.

- $f(x)=x^3+px^2+qx+r$
- $f(0)=0,\ f(-1)=1,\ f'(-1)=3$을 이용하면
- $f(x)=x^3-2x^2-4x$

따라서 $f(1)=1-2-4=-5$이다.

07 2026학년도 9월 7번 정답률 96%

7. 곡선 $y=x^3-5x^2+6x$ 위의 점 $(3, 0)$에서의 접선이 점 $(5, a)$를 지날 때, a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

정 답 ①

해 설

접선의 기울기는 $y'=3x^2-10x+6$이다.

$x=3$을 대입하면, $y'=27-30+6=3$이다.

접선의 방정식은 $y=3(x-3)$이므로 $a=6$이다.

08 2026학년도 수능 9번 정답률 82%

9. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3+3ax^2-9a^2x+4$$

라 하자. 직선 $y=5$가 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

정 답 ④

해 설

직선 $y=5$와 곡선 $y=f(x)$의 접점의 좌표를 $(k,5)$라 하자.

$f(k)=5$이고, $f'(k)=0$이다.

$f(k)=k^3+3ak^2-9a^2k+4=5$이고, $f'(k)=3k^2+6ak-9a^2=0$이다.

$3k^2+6ak-9a^2=3(k-a)(k+3a)=0$이므로 $k=a$ 또는 $k=-3a$이다.

1) $k=a$인 경우

$f(a)=a^3+3a^3-9a^3+4=5$이고, $a<0$이므로 불가능하다.

2) $k=-3a$인 경우

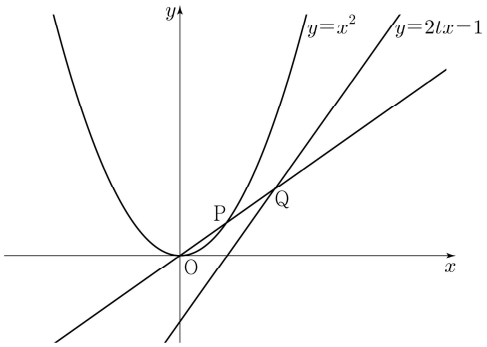
$f(a)=-27a^3+27a^3+27a^3+4=5$이고, $a=\frac{1}{3}$이다.

$f(x)=x^3+x^2-x+4$이므로 $f(2)=14$이다.

유형 06 곡선과 직선 사이의 거리의 최대, 최소

01 2024학년도 6월 11번 정답률 53%

11. 그림과 같이 실수 $t\,(0<t<1)$에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과의 거리가 최소인 점을 P라 하고, 직선 OP가 직선 $y=2tx-1$과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim\limits_{t\to1-}\dfrac{\overline{PQ}}{1-t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

정 답 ③

해 설

다음과 같은 문제의 유형들은 기본적인 도형에 대한 이해가 필요하다. 도형에 대한 이해를 바탕으로 선분의 길이, 혹은 도형의 넓이를 문제에서 제시하는 변수를 이용한 식으로 나타내야 한다.

STEP1 선분 PQ의 길이를 t에 관해 표현한다.

- P의 좌표를 (a,a^2)이라 하고 $2tx-y-1=0$과의 점과 직선 사이의 거리를 이용해 a를 t에 관해 표현하자.
- $\dfrac{|2ta-a^2|}{\sqrt{4t^2+1}}$가 최소가 되기 위해서는 $a=t$ 이어야 한다.
  따라서 $P(a,a^2)=P(t,t^2)$이고,
- 직선 OP는 $y=tx$이므로 $tx=2tx-1$에서 $1=tx$,
  $x=\dfrac{1}{t}$이다. 따라서 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{t},1\right)$이다.
- $\overline{PQ}=\sqrt{(t-\dfrac{1}{t})^2+(t^2-1)^2}$

STEP2 극한식의 계산을 마무리한다.

- $\dfrac{\overline{PQ}}{1-t}=\dfrac{\sqrt{(t-\frac{1}{t})^2+(t^2-1)^2}}{1-t}=\dfrac{(1-t^2)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}{1-t}$
  $=(1+t)\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+1}$
- $\lim\limits_{t\to1-}(1+t)\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+1}=2\sqrt{2}$이다.

원래 이 문제는 STEP 1의 과정을 도함수를 이용해 간결하게 풀 수 있다. 점 P에서의 접선의 기울기가 직선의 방정식의 기울기와 평행한 점을 찾으면 쉽게 $a=t$라는 식을 얻어낼 수 있다. (하지만 도형에 대한 기본적인 이해만으로 풀이가 가능하다는 것을 보이기 위해 위와 같이 풀이했다.)

유형 07 함수의 증가와 감소

01 2023학년도 6월 8번 정답률 55%

8. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최솟값은? [3점]

> (가) $f(1)=3$
> (나) $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 5$이다.

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

정 답 ③

해 설

(나) 조건에 대해 파악하자.

- 미분계수 5이상을 유지하면서 가장 증가가 더디려면 미분계수가 항상 5, 즉, 일차함수이어야 한다.
  즉, $f(x)$는 기울기가 5이고 $(1,3)$을 지나는 직선의 방정식이다.
- $f(x)$: $y=5(x-1)+3=5x-2$, $f(5)=25-2=23$

02 2022학년도 수능 19번 정답률 51%

19. 함수 $f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오. [3점]

정 답 6

해 설

- 실수 전체의 집합에서 증가의 의미를 이해하자.
  실수 전체의 집합에서 증가: 모든 x에서 $f'(x)\geq 0$
- $f'(x)=3x^2+2ax-(a^2-8a)$
- $f'(x)\geq 0 \leftrightarrow f'(x)$의 판별식 $D\leqq 0$

  $\frac{D}{4}$: $a^2+3(a^2-8a)=4a^2-24a$

  $4a^2-24a\leqq 0$, $a(a-6)\leqq 0$, $0\leqq a\leqq 6$

  따라서 실수 a의 최댓값은 6이다.

유형 08 함수의 증가와 감소

01 2024학년도 9월 13번 정답률 30%

13. 두 실수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0) \\ \frac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고 구간 $[-1, \infty)$에서 증가할 때, $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}+3\sqrt{2}$ ② $3+3\sqrt{2}$ ③ $\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$

④ $6+3\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{15}{2}+3\sqrt{2}$

정 답 ③

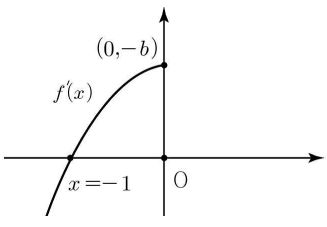
해 설

STEP1 $f'(-1)=0$을 이용해 a,b에 관한 관계식을 끌어내자.

- $x<0$의 범위에서 하나의 다항함수를 따르므로 $x=-1$에서도 미분가능해야 한다. 문제의 증가/감소 상황을 만족하기 위해서는 "$f'(-1)=0$"이다.
- $f'(x)=\begin{cases} -x^2-2ax-b & (x<0) \\ x^2+2ax-b & (x\geq 0) \end{cases}$

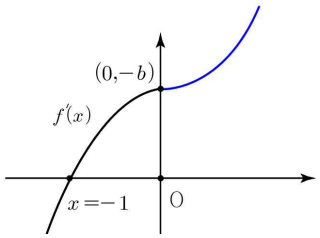
  $f'(-1)=-1+2a-b=0$에서 $b=2a-1$이다.

STEP2 $f'(x)$의 개형을 그래프를 통해 파악해보자.



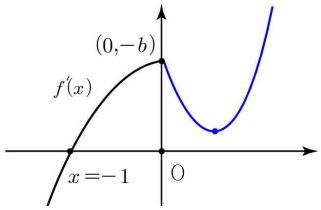
$f'(0)\geq 0$이기 때문에 $-b\geq 0$이므로 $b\leq 0$이다.

CASE ① $x^2+2ax-b$의 대칭축이 음수일 때 ($-a\leq 0$일 때)



$f'(x)$ 그래프가 다음과 같으므로 항상 만족한다.
따라서 $a\geq 0$이면 항상 만족한다.

CASE ② $x^2+2ax-b$의 대칭축이 음수일 때 ($-a>0$일 때)



$x^2+2ax-b=0$의 판별식 $\underline{D\leq 0}$

$\rightarrow \frac{D}{4}=a^2+b\leq 0 \rightarrow a^2+2a-1\leq 0$

$-1-\sqrt{2}\leq a\leq -1+\sqrt{2}$이므로 $-1-\sqrt{2}\leq a<0$이다.

STEP3 $a+b$를 a에 관해 정리하여 마무리하자.

- $a+b=a+(2a-1)=3a-1$
- $b\leq 0 \leftrightarrow a\leq \frac{1}{2}$
- a의 범위를 종합하면 $-1-\sqrt{2}\leq a\leq \frac{1}{2}$
- $M=3\cdot\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}$,

  $m=3(-1-\sqrt{2})-1=-3\sqrt{2}-4$

  $M-m=\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$

유형 09 함수의 극대와 극소

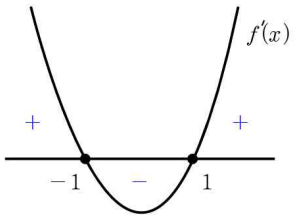
01 2022학년도 6월 17번 정답률 71%

17. 함수 $f(x)=x^3-3x+12$가 $x=a$에서 극소일 때, $a+f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

정 답 11

해 설

- $f'(x)=3x^2-3$



- 극소이기 위해서는 $f'(x)$의 부호가 음수에서 양수로 바뀌어야 한다. 따라서 $x=1$에서 극소이다.
- $a=1$이므로 $f(a)=f(1)=10$이고 $1+10=11$이다.

02 2022학년도 9월 5번 정답률 83%

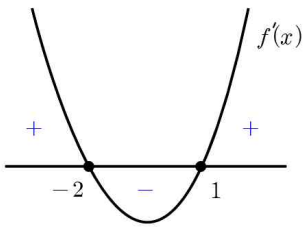
5. 함수 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$의 극댓값과 극솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [3점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

정 답 ③

해 설

- 도함수를 활용해 $f(x)$의 극대/극소를 찾자.
  $f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$



- $f(x)$: $\begin{cases} x=-2\text{에서 극대} \\ x=1\text{에서 극소} \end{cases}$
- $M=f(-2)=21$
  $m=f(1)=-6$이므로 $21-6=15$이다.

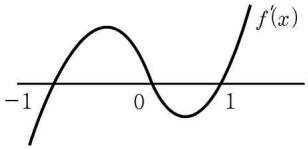
03 2023학년도 6월 19번 정답률 63%

19. 함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$는 $x=1$에서 극소이다.
함수 $f(x)$의 극댓값이 4일 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 상수이다.) [3점]

정 답 2

해 설

- $f'(x)=4x^3+2ax$
  $f'(1)=4+2a=0$에서 $a=-2$이다.
- $f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$



- $f(x)$는 $x=0$에서 극대이다.
- $f(0)=b=4$에서 $b=4$이다. 따라서 $a+b=2$이다.

04 2023학년도 9월 6번 정답률 78%

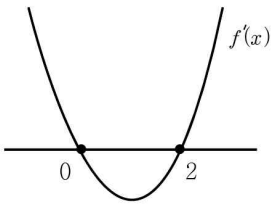
6. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+k$의 극댓값이 9일 때,
함수 $f(x)$의 극솟값은? (단, k는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ⑤

해 설

- $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$



- $f(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=2$에서 극소이다.
- 극댓값: $f(0)=k=9$
  극솟값: $f(2)=8-12+k=5$

05 2023학년도 수능 6번 정답률 78%

6. 함수 $f(x)=2x^3-9x^2+ax+5$는 $x=1$에서 극대이고,
$x=b$에서 극소이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

정 답 ②

해 설

- $f'(x)=6x^2-18x+a$
  $f'(1)=6-18+a=0$에서 $a=12$이다.
  $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$에서 $b=2$이다.
- 따라서 $a+b=14$이다.

06 2024학년도 6월 18번 정답률 73%

18. 두 상수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx+a$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 -2일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [3점]

정 답 6

해 설

STEP1 극값에 대한 정보를 바탕으로 $f(x)$의 정보를 알아내자.

- $x=1$에서 극소 → $f'(1)=0$
  $f'(x)=3ax^2+b$, $f'(1)=3a+b=0$에서 $b=-3a$이다.
- $f(x)$의 극솟값 -2 → $f(1)=-2$
  $f(1)=a+b+a=2a+b=-a=-2$에서 $a=2$, $b=-6$이다.

STEP2 계산을 통해 극댓값을 구한다.

- $f(x)=2x^3-6x+2$
  $f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$
- 극대점은 $x=-1$이고, $f(-1)=-2+6+2=6$이다.

07 2024학년도 9월 6번 정답률 84%

6. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$은 $x=-1$에서 극대이고, $x=3$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 0 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

정 답 ③

해 설

- $f'(x)=3x^2+2ax+b=3(x+1)(x-3)=3x^2-6x-9$
  따라서 $a=-3$, $b=-9$이다.
- $f(x)$의 극댓값은 $f(-1)=-1+a-b+1=6$이다.

08 2024학년도 수능 7번 정답률 79%

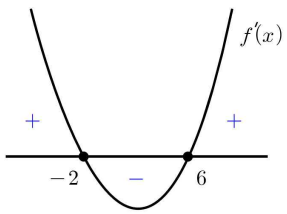
7. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4$가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소일 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, α와 β는 상수이다.) [3점]

① -4 ② -1 ③ 2 ④ 5 ⑤ 8

정 답 ⑤

해 설

$f'(x)=x^2-4x-12=(x-6)(x+2)$



$x=-2$에서 극대, $x=6$에서 극소이다.
따라서 $\beta-\alpha=8$이다.

09 2025학년도 수능 19번 정답률 71%

19. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=2x^3-3ax^2-12a^2x$$

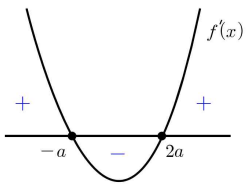
라 하자. 함수 $f(x)$의 극댓값이 $\frac{7}{27}$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 41

해 설

도함수를 관찰해 증감을 파악하자.

- $f'(x)=6x^2-6ax-12a^2=6(x-2a)(x+a)$
  조건에 의하여 $a>0$이므로 아래와 같다.



$x=-a$에서 극대이다.

- $f(-a)=-2a^3-3a^3+12a^3=7a^3=\frac{7}{27}$에서 $a=\frac{1}{3}$이다.
  따라서 $f(3)=54-27a-36a^2=54-9-4=41$이다.

10 2025학년도 9월 19번 정답률 78%

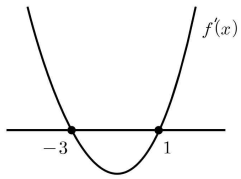
19. 함수 $f(x)=x^3+ax^2-9x+b$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 28일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

정 답 4

해 설

극대/극솟점에서 미분계수는 0임을 이용하자.

- $f'(x)=3x^2+2ax-9$
  $f'(1)=3+2a-9=0$에서 $a=3$이다.
- $f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$



$x=-3$에서 극대이다.

- $f(-3)=-27+9a+27+b=27+b=28$이므로 $b=1$이다.
  따라서 $a+b=4$이다.

11 2026학년도 6월 19번 정답률 94%

19. 상수 a에 대하여 함수 $f(x)=3x^3-9x^2+a$의 극댓값이 20일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값을 구하시오. [3점]

정 답 8

해 설

$f(x)=3x^3-9x^2+a$의 극값을 구하자.
$f'(x)=9x^2-18x$이므로 $x=0, 2$에서 극값을 가진다.
최고차항이 양수인 삼차함수이므로 x 값이 작은 경우가 극댓값을 가지고, x 값이 큰 경우가 극솟값을 가진다.
따라서, 극댓값은 $f(0)=a$이고, $a=20$이다.
극솟값은 $f(2)=24-36+20=8$이다.

12 2026학년도 9월 19번 정답률 94%

19. 함수 $f(x)=2x^3-3ax^2+5a$의 극솟값이 a일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

정 답 8

해 설

극솟값을 구하기 위해 $f(x)$를 미분하자.

$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$이므로 $f(x)$는 $x=0$, $x=a$에서 극값을 가진다.

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로 0, a 중에서 작은 값에서 극대가 되고, 큰 값에서 극소가 된다.

$a<0$이면, 극솟값이 $f(0)=5a$이고, $5a=a$, $a=0$이다.

$a=0$이면 극값이 존재하지 않으므로 모순이다.

$a>0$이면, 극솟값이 $f(a)=2a^3-3a^3+5a$이다.

$f(a)=a$이므로 $-a^3+5a=a$, $a=2, 0, -2$이다.

따라서, $a=2$이다.

극댓값은 $f(0)=5a=10$이다.

13 2026학년도 수능 19번 정답률 86%

19. $-2\le x\le 2$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$-k\le 2x^3+3x^2-12x-8\le k$$

가 성립하도록 하는 양수 k의 최솟값을 구하시오. [3점]

정 답 15

해 설

$-2\le x\le 2$에서 $f(x)=2x^3+3x^2-12x-8$의 최댓값과 최솟값을 구하자.

최댓값과 최솟값은 구간의 양 끝값과 극값 중에 존재한다.

먼저, 구간의 양 끝값을 구하자.

$f(2)=4$, $f(-2)=12$이다.

극값을 구하기 위해 미분하면, 도함수는

$f'(x)=6x^2+6x-12$이다.

인수분해하면, 극값은 $x=1, -2$에서 나온다.

$f(1)=-15$, $f(-2)=12$이다.

따라서, $-2\le x\le 2$에서 $|f(x)|$의 값은 최대 15이다.

k의 최솟값은 15이다.

유형 10 함수의 그래프

01 2022학년도 6월 14번 정답률 39%

14. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
> (나) 함수 $g(x)$가 $x-a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

정 답 ③

해 설

STEP1 x값의 범위에 따라 달라지는 $g(x)$를 관찰하자.

$xg(x)=|x|\cdot|f(x-p)+q|$

$$g(x)\begin{cases}x<0: -|f(x-p)+q| \\ x=0: 0\ (\text{연속이어야 하므로}) \\ x>0: |f(x-p)+q|\end{cases}$$

$g(x)$의 상황을 해석해보면

① $f(x)$의 그래프를 $(0,0)$을 지나도록 (p,q)만큼 평행이동 시키고 → $f(x-p)+q$

② x축을 기준으로 아래 그려지는 함수를 접어올리고 → $|f(x-p)+q|$

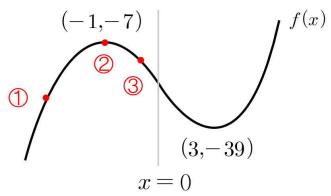
③ $x<0$의 정의역에 해당하는 함수를 x축 대칭시킨다. → $-|f(x-p)+q|$ $(x<0)$

STEP2 $f(x)$를 그려보고 STEP 1의 과정을 거치며 상황을 파악하자.

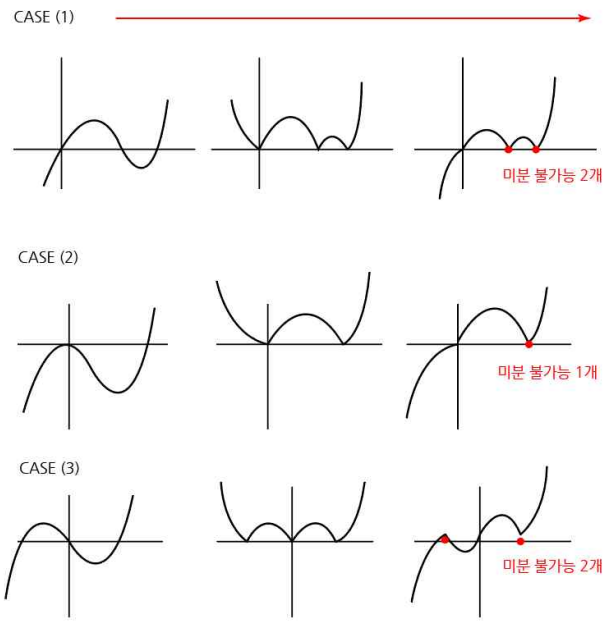
$f(x)=x^3-3x^2-9x-12$

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)=0$

→ $x=-1$에서 극대 / $x=3$에서 극소



1, 2, 3 영역의 점이 $(0,0)$이 되도록 각각 평행이동 후 STEP 1에서의 $g(x)$ 해석 과정을 거쳐보자.
(참고: $x>0$에서의 영역을 제외한 이유는 x,y축의 양의 방향으로만 평행이동해야하기 때문이다.)



즉, x축 방향으로 1, y축 방향으로 7만큼 이동하는 CASE (2)임을 알 수 있다.

$p=1$, $q=7$에서 $1+7=8$이다.

02 2024학년도 6월 22번 정답률 2%

22. 정수 $a\,(a\neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

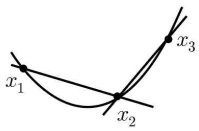
> 함수 $f(x)$에 대하여
> $$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$$
> 을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\,k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

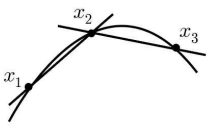
정 답 380

해 설

STEP1 조건을 분석해보자.

아래의 그림에서 알 수 있듯 두 평균변화율의 곱이 음수이기 위해서는 반드시 정의역의 범위 내에서 극값을 가져야함을 알 수 있다.

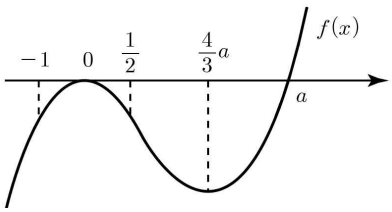




STEP2 a의 부호에 따라 경우를 나눠 접근한다.

1) $a>0$

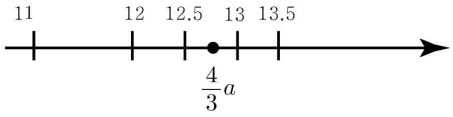
· $f(x)$의 개형은 다음과 같다.



· $x=0$ 부근을 관찰해보면 $k=-1$일 때 구간 $\left(-1,\,\frac{1}{2}\right)$에 $x=0$이 포함되므로 성립한다. $\therefore k=-1$

· 따라서 $x=\frac{4}{3}a$부근에서 ① $k=12$ ② $k=3,4$ 아래 2가지의 경우가 존재한다.

① $k=12$



· $k=12$ 하나만 나오기 위해서는 $12.5\leq\frac{4}{3}a\leq 13$

($12.5>\frac{4}{3}a$이면 $k=11$일 때 성립한다. 하지만 만족하는 정수 a가 없어 모순이다.)

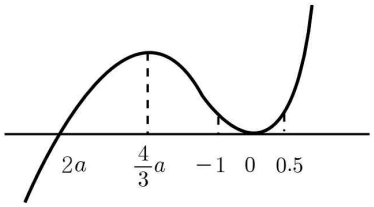
② $k=3,4$

· $k=3,4$를 만족하기 위해서는 $4<\frac{4}{3}a<4.5$이다.

하지만 만족하는 정수 a가 없어 모순이다.

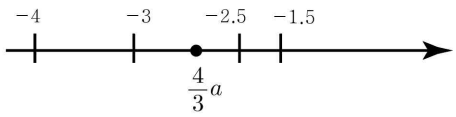
2) $a<0$

· $f(x)$의 개형은 다음과 같다.



· 앞선 풀이와 같은 원리로 $k=-1$은 확정이다.

달라지는 점은 $x=\frac{4}{3}a$ 부근 정수는 음수이기 때문에 단독으로 12를 만들 수 없다. 따라서 $k=-3,-4$이다.



· $k=-3,-4$ 만족을 위해서는 $-3<\frac{4}{3}a<-\frac{5}{2}$이다.

위의 부등식을 만족하는 정수 a는 "-2"이다.

· 따라서 $f(x)=x^2(x+4)$, $f'(x)=3x^2+8x$, $f'(10)=380$

03 2024학년도 수능 14번 정답률 15%

14. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x\le 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a,b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

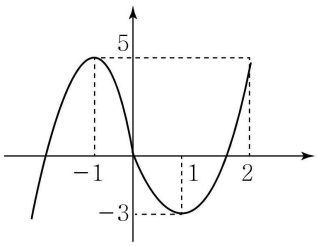
① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

정 답 ①

해 설

STEP1 $x=2$ 이하의 정의역에서 함수 $f(x)$의 개형

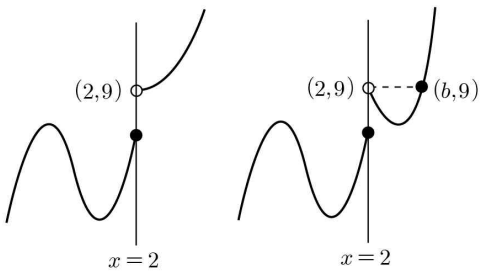
- $f(x)=2x^3-6x+1$
  $f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$이고, $x=-1$에서 극소, $x=1$에서 극대를 갖는다.



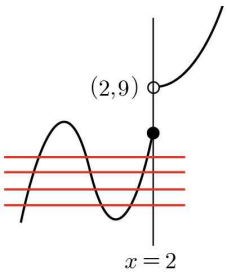
STEP2 $x=2$ 초과의 정의역에서 함수 $f(x)$의 개형

- $x>2$의 범위에 있는 $f(x)$는 $(2,9)$와 $(b,9)$를 지난다. 이를 토대로 $f(x)$의 개형을 추론하면 대칭축의 위치를 기준으로 크게 다음 2가지의 개형이다.

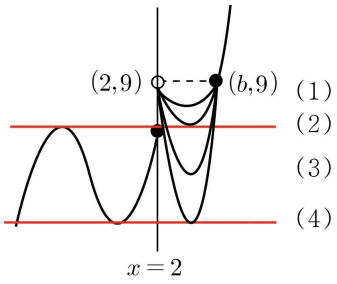
개형① $\underbrace{1+\frac{1}{2}b\le 2}_{\text{(대칭축)}}$ 개형② $1+\frac{1}{2}b>2$ … ㉠



개형①는 무수히 많은 k값에서 준식을 만족한다. (모순)

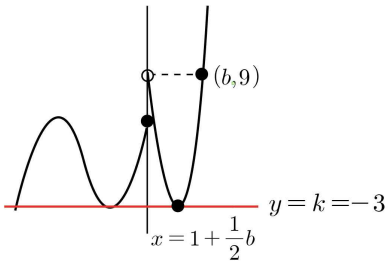


개형②는 다음과 같이 경우가 더 나뉜다.



실전에서는 (2)혹은 (4)와 같은 특수한 경우의 풀이를 먼저 진행하자.

- (1), (2), (3)의 경우는 1과 같은 논리에 의해 모순이다.
  (4)의 경우에는 아래와 같다.



- 위와 같이 k의 값을 설정하면 $g(k)=3$, $\lim_{x\to k-}g(x)=1$, $\lim_{x\to k+}g(x)=5$이므로 준식을 만족한다. 따라서 $k=-3$이다.
- $f(1+\frac{1}{2}b)=a(1-\frac{1}{2}b)(1-\frac{1}{2}b)+9=-3$에서
  $a(b-2)^2=48$이다. …… ㉡
- ㉠, ㉡을 고려해 (a,b)의 순서쌍을 구하면 $(3,6)$, $(12,4)$, $(48,3)$이다. 따라서 $a+b$의 최댓값은 51이다.

04 2024학년도 수능 22번 정답률 1%

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$에 대하여
> $f(k-1)f(k+1)<0$
> 을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

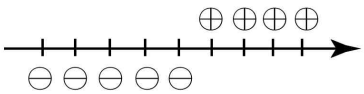
정 답 483

해 설

TIP
① 정수에서만 관찰하자.
② 조건을 반대로 해석해보자. :
모든 정수 k에서 $f(k-1)f(k+1)$의 값이 항상 0 이상

STEP1 $f(x)$는 반드시 근을 가지므로 그 근에 대한 조건을 조사해보자.

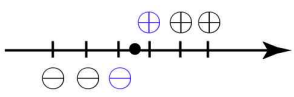
가장 간단하게 떠올릴 수 있는 삼차함수는 단조증가함수이다.
정수근을 가지지 않는다고 가정할 때 (x=정수)에서의 부호만 생각해보면 다음과 같다.



절대 조건을 만족할 수 없다. → $f(x)$는 정수근이 존재한다.

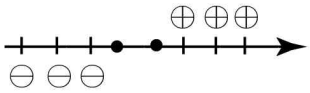
STEP2 정수근의 개수에 따른 $f(x)$의 성립 가능성을 생각해보자.

CASE 1. 정수근 1개

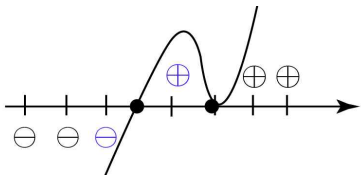


파란색으로 표시한 두 함숫값의 곱이 음수이므로 모순이다.

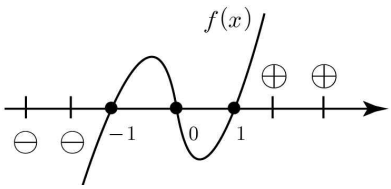
CASE 2. 연속된 정수근 2개 (가능하다.)



(연속되지 않은 2개의 정수근은 쉽게 모순을 찾을 수 있다.)



CASE 3. 연속된 정수근 3개

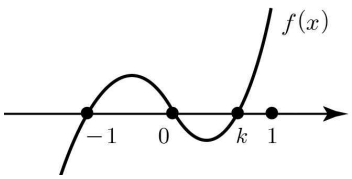


$f'(-\frac{1}{4})=-\frac{1}{4}$ / $f'(\frac{1}{4})<0$을 고려하면 $f'(0)<0$
이므로 $f(x)=(x+1)x(x-1)$이 되어야 한다.
하지만 $f'(-\frac{1}{4})\neq-\frac{1}{4}$이므로 모순이다.

STEP3 CASE 2임을 알았으므로 정확한 $f(x)$식을 구해보자.

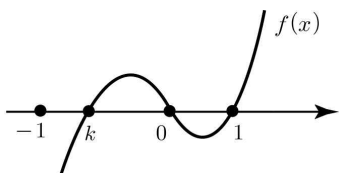
CASE 3을 풀이하며 $f'(0)<0$임을 알았으므로 참고하여 $f(x)$의 개형을 생각해보면 다음 2개와 같다.

①



$f(x)=(x+1)x(x-k)$
$f'(x)=x(x-k)+(x+1)(x-k)+(x+1)x$
$f'(-\frac{1}{4})=(-\frac{1}{4})(-\frac{1}{4}-k)+\frac{3}{4}(-\frac{1}{4}-k)+\frac{3}{4}(-\frac{1}{4})$
$=\frac{-8k-5}{16}=-\frac{1}{4}$에서 $k=-\frac{1}{8}$이다. (모순)

②



$f(x)=(x-k)x(x-1)$ $(k<0)$
$f'(x)=x(x-1)+(x-k)(x-1)+(x-k)x$
$f'(-\frac{1}{4})=(-\frac{1}{4})(-\frac{5}{4})+(-\frac{1}{4}-k)(-\frac{5}{4})+(-\frac{1}{4}-k)(-\frac{1}{4})$
$=\frac{24k+11}{16}=-\frac{1}{4}$에서 $k=-\frac{5}{8}$이다.

따라서 $f(x)=(x+\frac{5}{8})x(x-1)$, $f(8)=\frac{69}{8}\cdot 8\cdot 7=483$

05 2026학년도 6월 15번 정답률 40%

15. 상수 k와 $f'(0)=6$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+k & (|x|>1) \\ -f(x) & (|x|\le 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $k+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하고 그 값은 0 이하이다.

(나) x에 대한 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값은 13이다.

① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ $\frac{39}{4}$ ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{63}{4}$

정 답 ①

해 설

극한값을 이용하여 삼차함수에 대한 조건을 제시하는 전형적인 문항이다.

STEP1 극한값 조건에 대한 분석

(가) 조건에 제시된 극한값이 존재하기 위한 조건을 먼저 분석하자.

$\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 모든 실수 a에 대해 존재한다.

$a=1, -1$에서만 존재성을 확인하면 된다. 이외의 값에서는 연속이기 때문에 극한값이 반드시 존재한다.

$a=1$에서 $\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$의 값이 존재해야 한다.

이 때 $g(x)=f(x)+k$이고, $g(1)=-f(1)$이다.

대입하면 $\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)+k+f(1)}{x-1}$이다.

극한값이 존재하려면, $x=1$을 대입했을 때 분자가 0이 되어야 하므로 $f(1)=-\frac{k}{2}$이다.

$a=-1$에서 $\lim_{x\to -1+}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$의 값이 존재해야 한다.

이 때 $g(x)=-f(x)$이고, $g(-1)=-f(-1)$이다.

대입하면 $\lim_{x\to -1+}\frac{-f(x)+f(-1)}{x+1}$이다.

이 경우 극한값이 존재한다.

이외의 범위에서는 $-1<a<1$에서 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값은 $-f'(a)$이고, $|a|>1$에서 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값은 $f'(a)$이다.

따라서, $|a|>1$에서 $f'(a)\le 0$이고, $-1<a<1$에서 $f'(a)\ge 0$이다.

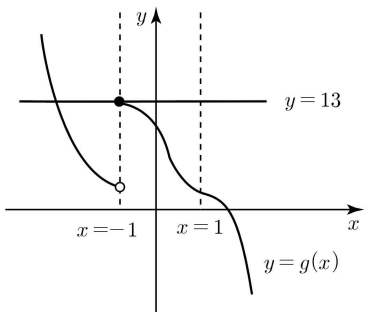
이 조건을 만족하려면, $f(x)$는 최고차항이 음수인 3차함수이고 $x=1, -1$에서 극값을 가진다.

STEP2 그래프를 이용하여 정답 케이스 찾기

$f'(x)=b(x+1)(x-1)$이라 하자.

$f'(0)=6$이므로 $b=-6$이다.

(나)에서 $g(x)=t$의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 t의 최댓값이 13이다.



$y=g(x)$는 위와 같은 그래프가 그려진다.

실근의 개수가 2가 되도록 하는 t의 최댓값이 13이므로 $g(-1)=13$이다.

$g(-1)=-f(-1)$이므로 $f(-1)=-13$이다.

$f'(x)=-6(x-1)(x+1)$이므로 $f(x)=-2x^3+6x+c$라 하자.

$f(-1)=c-4=-13$이므로 $c=-9$이다.

따라서, $f(x)=-2x^3+6x-9$이다.

$f(1)=-5$이므로 $k=10$이고, $f(\frac{1}{2})=-\frac{25}{4}$이다.

답은 $10-\frac{25}{4}=\frac{15}{4}$이다.

06 2026학년도 6월 21번 정답률 44%

21. 함수 $f(x)=(x-1)(x-2)$와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 a에 대하여
> $\lim_{x\to a}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$의 값과 $\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$의 값이
> 모두 존재한다.

$g(-1)$의 값을 구하시오. [4점]

정 답 42

해 설

절댓값을 이용한 미분계수 문항으로, 전형적인 유형이기 때문에 연습을 많이 한 학생들은 어렵지 않게 받아들였을 듯하다. 항상 나오는 유형에 대해서는 지속적인 연습이 필요하다.

굳이 절댓값과 관련하여 미분계수를 암기할 필요는 없고, 상황에 맞게 구간을 나누어서 절댓값을 분석하면 된다.

STEP1 절댓값 조건을 구간별로 분석하기

$\lim_{x\to a}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$에서 분모가 0이 되는 $x=1$, $x=2$를 기준으로 구간을 나누어 분석하자.

기본적으로 분모와 분자가 연속함수이므로 $x=1$과 $x=2$ 주변에서만 분석하면 된다.

$x=1-$에서는 $\frac{|f(x)|}{f(x)}=1$이고, $x=1+$에서는 $\frac{|f(x)|}{f(x)}=-1$이므로 극한값이 존재하려면 $g(1)=0$이다.

마찬가지로 $x=2-$에서는 $\frac{|f(x)|}{f(x)}=-1$이고, $x=2+$에서는 $\frac{|f(x)|}{f(x)}=1$이므로 극한값이 존재하려면 $g(2)=0$이다.

STEP2 2번째 조건도 마찬가지로 분석하기

$\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$에서도 분모가 0이 되는 $x=1,2$를 우선적으로 분석하자.

$g(x)=(x-1)(x-2)h(x)$라 하자. 극한 식에 대입하면,

$\lim_{x\to a}\frac{|(x-1)(x-2)||h(x)-1|}{(x-1)(x-2)h(x)}$이다.

$x=1$의 좌우에서 $\frac{|(x-1)(x-2)|}{(x-1)(x-2)}$의 부호가 다르므로 $x=1$에서 극한값이 존재하려면, $h(1)=1$이어야 한다.

마찬가지로 $x=2$의 좌우에서 $\frac{|(x-1)(x-2)|}{(x-1)(x-2)}$의 부호가 다르므로 $x=2$에서 극한값이 존재하려면, $h(2)=1$이어야 한다.

따라서, $h(x)=(x-1)(x-2)+1$이다.

$g(x)=(x-1)(x-2)\{(x-1)(x-2)+1\}$이다.

$g(-1)=42$이다.

07 2026학년도 수능 21번 정답률 28%

21. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} -f(x) & (x<t) \\ f(x) & (x\geq t) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 존재한다.

(나) $\lim\limits_{x\to m+}\dfrac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 음수가 되도록 하는 자연수 m의 집합은 $\left\{g(-1),\ -\dfrac{7}{2}g(1)\right\}$이다.

$g(-5)$의 값을 구하시오. (단, $g(-1)\neq-\dfrac{7}{2}g(1)$) [4점]

정 답 65

해 설

어려운 문항은 아니며, 특히 삼차함수에서 두 개의 근을 알려주고 시작하기 때문에 어렵지 않게 풀수 있다.

STEP1 (가) 조건에서 $f(x)$ 식 세우기

$g(x)=\begin{cases} -f(x) & (x<t) \\ f(x) & (x\geq t) \end{cases}$에서 $g(x)$가 연속이므로 $f(t)=0$이다.

(가)에서 모든 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 존재한다.

따라서, $g(0)=g(2)=0$이므로 $f(x)$는 $x(x-2)$를 인수로 가져야 한다.

$f(x)=bx(x-2)(x-k)$로 두자.

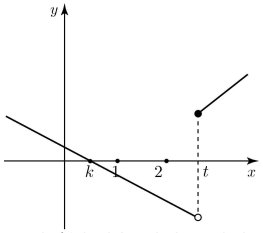
STEP2 (나) 조건에서 경우를 나누어 $f(x)$ 정하기

$\lim\limits_{x\to m+}\dfrac{g(x)}{x(x-2)}$에서 $\dfrac{g(x)}{x(x-2)}=\begin{cases} -b(x-k) & (x<t) \\ b(x-k) & (x\geq t) \end{cases}$이다.

위의 식에서 함숫값이 음수가 되도록 하는 자연수 m의 개수가 2개다.

조건을 만족하는 경우를 찾기 위해 k와 t의 대소관계에 따라 경우를 나누어 분석하자.

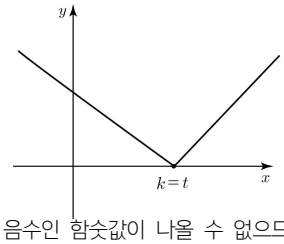
1) $k<t$인 경우



위의 그래프에서 음수인 함숫값을 가지는 자연수 m의 개수가 2이므로 각각 1, 2이다.

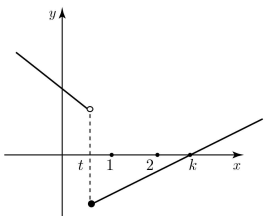
이 때 $g(1)=-f(1)=1-k$이다. $k<1$이므로 $g(1)>0$이고, $-\dfrac{7}{2}g(1)<0$이므로 자연수가 아니어서 불가능하다.

2) $k=t$인 경우



위의 그래프에서 음수인 함숫값이 나올 수 없으므로 불가능하다.

3) $k>t$인 경우



위의 그래프에서 음수인 함숫값을 가지는 자연수 m의 개수가 2이므로 $k\geq 2$이다.

앞에서 $f(t)=0$이었으므로 $t=0$ 또는 $t=2$이다.

3-I) $t=0$인 경우

$g(1)=f(1)$이고, $f(1)=b(k-1)$이다.

이때 $f(1)>0$이므로 $-\dfrac{7}{2}g(1)<0$이 되어 불가능하다.

3-II) $t=2$인 경우

$g(1)=-f(1)$이고, $f(1)=b(k-1)$이다.

$g(-1)=-f(-1)$이고, $f(-1)=-3b(1+k)$이다.

$t=2$이므로 자연수 m은 2, 3이다.

$-\dfrac{7}{2}g(1)=\dfrac{7}{2}b(k-1)$, $g(-1)=3b(1+k)$이다.

$3<k\leq 4$이므로 두 값은 각각 $7b<\dfrac{7}{2}b(k-1)\leq\dfrac{21}{2}b$,

$12b<3b(1+k)\leq 16b$의 범위를 갖는다.

따라서, $\dfrac{7}{2}b(k-1)=2$, $3b(1+k)=3$이다.

따라서, $b=\dfrac{3}{14}$, $k=\dfrac{11}{3}$이다.

$f(x)=\dfrac{3}{14}x(x-2)(x-\dfrac{11}{3})$이다.

$g(-5)=-f(-5)=65$이다.

유형 11 방정식과 부등식 활용

01 2022학년도 9월 20번 정답률 21%

20. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

정 답 21

해 설

STEP1 정확히 파악할 수 있는 함수만 남겨놓고 나머지는 넘기자.

$f(x)+|f(x)+x|-6x=k$

편의상 $g(x)=f(x)+|f(x)+x|-6x$라 하자.

Tip. 절댓값 문제는 절댓값 안이 0이 되는 것을 기준으로 풀이를 시작하자

$$f(x)+x=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+11x=\frac{1}{2}x(x^2-9x+22)$$

$(x^2-9x+22$는 항상 0보다 크다.)

$\therefore x=0$을 기준으로 부호가 변화한다.

$$\therefore |f(x)+x|=\begin{cases}-f(x)-x & (x<0)\\ f(x)+x & (x\geq 0)\end{cases}$$

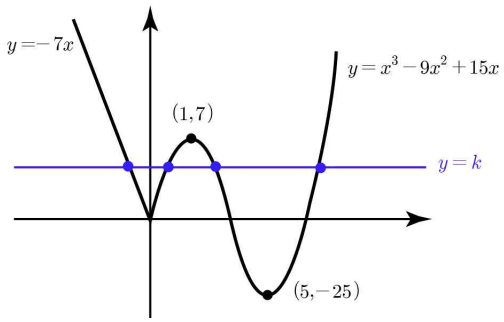
따라서 $g(x)=\begin{cases}-7x & (x<0)\\ 2f(x)-5x=x^3-9x^2+15x & (x\geq 0)\end{cases}$

$g(x)$의 그래프를 그리기 위해 x^3-9x^2+15x를 살펴보면

x^3-9x^2+15x (미분)→ $3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$

$\therefore x=1$에서 극대 / $x=5$에서 극소이다.

STEP2 $g(x)$의 그래프를 그려보자.



$g(x)$와 $y=k$가 4개의 점에서 만나기 위한 상황은 파란색의 경우와 같다.

$\therefore 0<k<7$, $k=1,2,3,4,5,6$이다.

모든 k값의 합은 21이다.

02 2022학년도 수능 6번 정답률 78%

6. 방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는? [3점]

① 20 ② 23 ③ 26 ④ 29 ⑤ 32

정 답 ③

해 설

정확히 파악할 수 있는 함수만 남겨놓고 나머지는 넘기자

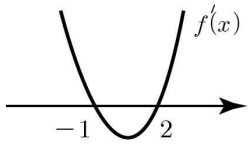
$2x^3-3x^2-12x=-k$

편의상 $f(x)=2x^3-3x^2-12x$라고 설정하자.

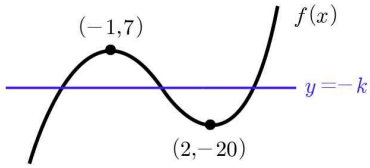
$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$x=-1$에서 극대, $x=2$에서 극소이다.

$f(x)$의 개형은 다음과 같다.



$f(x)$와 $y=-k$가 3개의 점에서 만나기 위한 상황은 파란색의 경우와 같다.



$-20<-k<7$

$-7<k<20$

$k=-6, -5, \cdots, 19$ (총 26개)

03 2023학년도 6월 9번 정답률 78%

9. 두 함수

$$f(x)=x^3-x+6,\quad g(x)=x^2+a$$

가 있다. $x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x) \geq g(x)$$

가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ⑤

해 설

STEP1 $f(x)-g(x)$를 하나의 새로운 함수로 인식하자.

$f(x) \geq g(x)$는 $f(x)-g(x) \geq 0$과 같다.

$f(x)-g(x)=x^3-x+6-x^2-a=x^3-x^2-x+6-a$

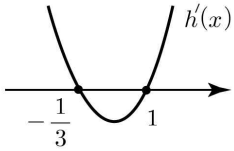
즉, $x \geq 0$에서 $x^3-x^2-x+6-a \geq 0$을 푸는 것과 같다.

STEP2 정확히 파악할 수 있는 함수만 남겨놓고 나머지는 넘기자

$x^3-x^2-x+6 \geq a \ (x \geq 0)$

편의상 $h(x)=x^3-x^2-x+6$라고 하자.

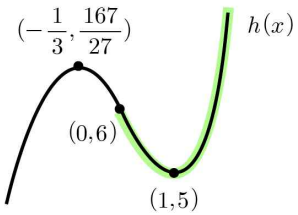
$h'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$



$x=-\frac{1}{3}$에서 극대, $x=1$에서 극소이다.

$h(x)$의 개형은 다음과 같다.

$x \geq 0$이므로 주목해야 하는 $h(x)$를 표시해보면 옆과 같다.



색칠된 $h(x)$에서 $h(x) \geq a$를 만족시킬 수 있는 a의 최댓값은 5이다.

04 2023학년도 9월 19번 정답률 66%

19. 방정식 $3x^4-4x^3-12x^2+k=0$이 서로 다른 4개의 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점]

정 답 4

해 설

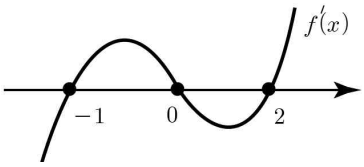
정확하게 파악할 수 있는 함수만 남겨놓고 나머지는 넘기자

$3x^4-4x^3-12x^2=-k$

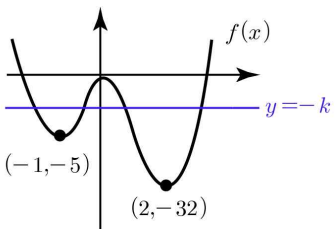
편의상 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$라고 가정하자.

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x^2-x-2)$

$=12x(x+1)(x-2)$



$f(x)$의 개형은 다음과 같다.



$f(x)$와 $y=-k$가 4개의 점에서 만나기 위한 상황은 파란색의 경우와 같다.

$\therefore -5<-k<0,\ 0<k<5$에서 $k=1, 2, 3, 4$이다.

05 2023학년도 수능 19번 정답률 49%

19. 방정식 $2x^3-6x^2+k=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오. [3점]

정 답 ③

해 설

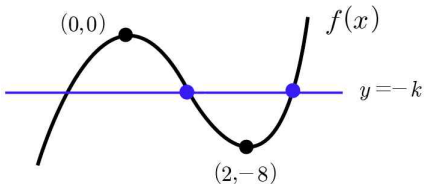
정확하게 파악할 수 있는 함수만 남겨놓고 나머지는 넘기자

$2x^3-6x^2=-k$를 푸는 것과 같다.

$f(x)=2x^3-6x^2$

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

$f(x)$ 그래프를 그려보면



2개의 양의 실근이 존재하기 위해서는

$-8<-k<0$을 만족하는 k값이어야 한다.

따라서 k는 7개이다.

06 2024학년도 6월 8번 정답률 63%

8. 두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ③

해 설

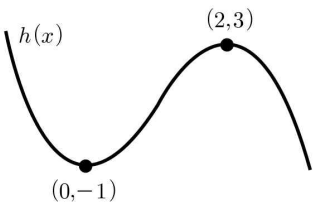
STEP1 $f(x)=g(x)$ 식을 푸는 것임을 이해하자.

본 문제와 같은 유형에서는 하나의 식으로 표현하고 정확히 파악되지 않은 항만 이항한 후 진행하면 이해가 수월하다

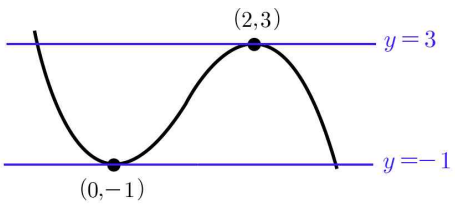
$2x^2-1=x^3-x^2+k$, $-x^3+3x^2-1=k$

편의상 $h(x)=-x^3+3x^2-1$으로 가정한다.

$h'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$



STEP2 $h(x)$그래프와 두 점에서 만나는 양수 k를 구하자.



∴ k는 양수이므로 3이다.

07 2025학년도 6월 7번 정답률 85%

7. x에 대한 방정식 $x^3-3x^2-9x+k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은? [3점]

① 13 ② 16 ③ 19 ④ 22 ⑤ 25

정 답 ④

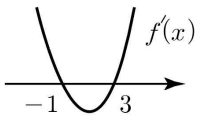
해 설

정확히 파악할 수 있는 함수만 남겨놓고 나머지는 넘기자

$x^3-3x^2-9x=-k$

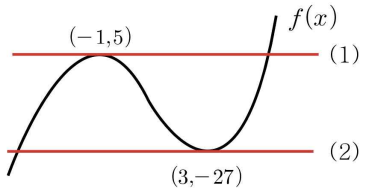
편의상 $f(x)=x^3-3x^2-9x$라고 설정하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$이다.



$f'(x)$는 $x=-1$에서 극대, $x=3$에서 극소

$f(x)$의 개형은 다음과 같다.



$f(x)$의 그래프와 $y=-k$가 두 점에서 만나기 위해서는 위의 1, 2번 경우에서 가능하다.

1. $y=-k=5$
2. $y=-k=-27$

$k=-5, 27$이므로 모든 실수 k의 값의 합은 22이다.

유형 12 방정식과 부등식 활용 – 함수의 결정

01 2022학년도 6월 22번 정답률 4%

22. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

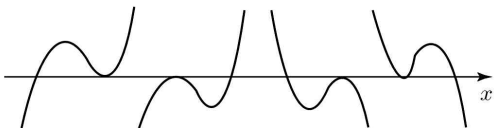
> (가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정 답 3

해 설

STEP1 (가) 조건을 만족하는 $f(x)$의 개형에 대해 생각하자.
실근의 개수가 2개인 삼차함수의 개형은 아래 4개와 같다.

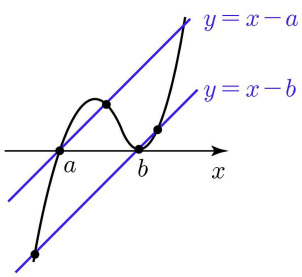


STEP2 위에서 생각한 4개의 개형 중 (나) 조건과 나머지 조건에 부합하는 개형을 찾자.

$f(x)=0$의 근을 $x=a$, $x=b$라고 할 때 $f(x-f(x))=0$의 방정식을 푸는 것은
- $x-f(x)=a \leftrightarrow f(x)=x-a$
- $x-f(x)=b \leftrightarrow f(x)=x-b$

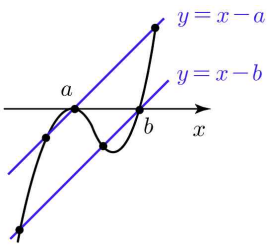
위 2개 방정식의 근을 찾는 것과 같다.

①



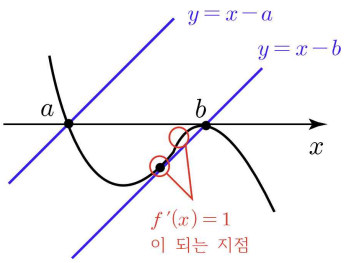
- $f(x)=x-a$: 실근 최소 2개
  (2개가 될 때: $f(x)$와 $y=x-a$가 접할 때)
- $f(x)=x-b$: 실근 3개 → 실근 3개를 만족할 수 없다.

②



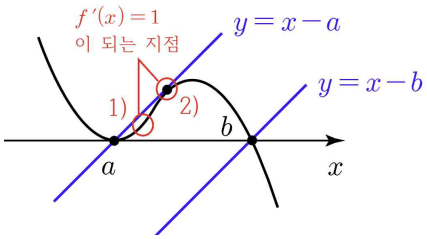
- $f(x)=x-a$: 실근 3개
- $f(x)=x-b$: 실근 최소 2개 → 실근 3개를 만족할 수 없다
  (2개가 될 때: $f(x)$와 $y=x-a$가 접할 때)

③



다음과 같이 3개의 실근이 나오도록 설정할 수 있다.
하지만 미분계수가 1인 두 x좌표의 y값이 모두 음수이므로
$f(1)=4$, $f'(1)=1$을 모두 만족할 수 없다.

④



다음과 같이 3개의 실근이 나오도록 설정할 수 있다.
미분 계수가 1을 만족해 $(1,4)$가 될 수 있는 점은 빨간색 표시 부분 2개가 있는데 $f'(0)>1$을 만족하기 위해서는 2번 점이 $(1,4)$가 되어야 한다.
1번 점이 $(1,4)$가 되어버리면 $f'(0)>1$을 만족시킬 수 있는 가능성조차 사라진다.

STEP3 $f(x)$식을 완성시키자.
$(a,0)$과 $(1,4)$는 기울기가 1인 같은 직선 위에 있으므로
$a=-3$이다.

따라서 $f(x)$그래프와 $y=x+3$ 그래프의 차를 이용해 함수 식을 작성하면

$f(x)-(x+3)=p(x+3)(x-1)^2$

$f(x)=p(x+3)(x-1)^2+(x+3)$

$f'(x)=p(x-1)^2+p(x+3)\cdot 2(x-1)+1$

$f'(-3)=16p+1=0$에서 $p=-\frac{1}{16}$이다.

$f(0)=\frac{45}{16}$이므로 $45+16=61$이다.

02 2022학년도 9월 22번 정답률 3%

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

정 답 108

해 설

STEP1 극한식에 대한 이해가 가장 먼저 필요하다.

$f(x-3)$은 모든 실수에서 연속이기 때문에

극한식의 불연속이 언제 발생하는지 알아야 한다

① $f(x)>0$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

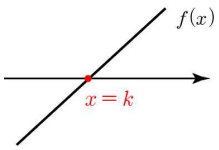
$=2f'(x)$ … 연속

② $f(x)<0$

①의 과정을 반복 → $-2f'(x)$ … 연속

③ $f(x)=0$ (개형에 따라 분류 다시 필요)

1) 뚫을 때

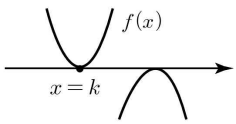


$x>k$에서는 ①의 경우이기 때문에 $2f'(k)$

$x<k$에서는 ②의 경우이기 때문에 $-2f'(k)$

$f'(k)\neq 0$이므로 불연속이다.

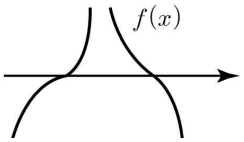
2) 접할 때



$f'(k)=0$이기 때문에

①, ② 어느 경우에도 0이다. → 연속

iii) 접하면서 뚫을 때

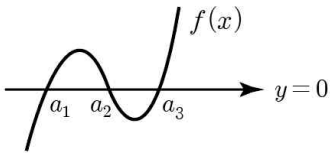


$f'(k)=0$이기 때문에

①, ② 어느 경우에도 0이다. → 연속

STEP2 $f(x)$ 개형의 경우를 나눠 생각해보자.

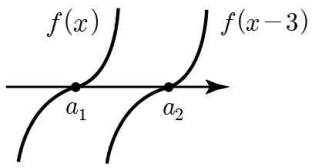
①



STEP 1 에서 증명했듯이 극한식은 x=a1, a2, a3에서 불연속이다.
이를 연속으로 만들기 위해서는 f(x-3)가 x=a1, a2, a3에서
0이어야 하는데 그것은 불가능하다. → 모순

추가로 f(x)=0의 첫 번째 근은 반드시 중근이어야 함을 알 수 있다.
위의 경우와 같이 x=a1에서 뚫는 개형은 f(x-3)에 의해 연속으로
만들어질 가능성이 없기 때문이다.

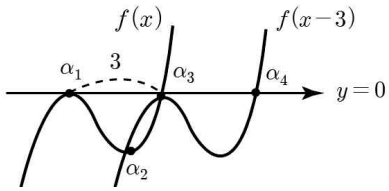
②



실근 2개 => 모순

(a1이 근이 되는 이유는 극한식을 다시 살펴보면 알 수 있다.
극한식을 살펴보면 f'(x)=0을 만드는 x값 또한 실근임을 알 수 있다)

③



조건을 모두 만족

STEP3 삼차함수의 비율 관계를 통해 계산을 마무리하자.

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$

$=\alpha_1+(\alpha_1+2)+(\alpha_1+3)+(\alpha_1+6)=4\alpha_1+11=7$

따라서 $\alpha_1=-1$이다.

$f(x)=(x-\alpha_1)^2(x-d_3)=(x+1)^2(x-2)$

$\therefore f(5)=36\cdot 3=108$

03 2023학년도 9월 22번 정답률 4%

22. 최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x<t) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

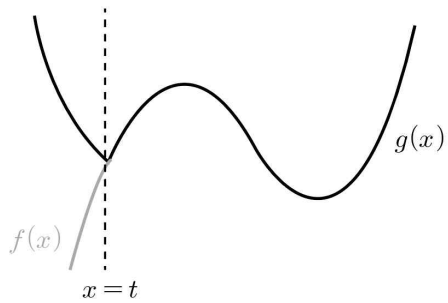
정 답 58

해 설

STEP1 $g(x)$가 의미하는 바를 알아내자.

"$-f(x)+2f(t)$" 다음의 식은 기출을 풀다 보면 꽤 자주 접하는 식인데 이는 $y=f(t)$라는 상수함수를 긋고 그것을 기준으로 삼아 데칼코마니처럼 접으라는 의미다.
(차근차근 접근하면 이유를 이해하기 쉽다.
먼저 f(x)를 x축에 대하여 대칭이동한 다음 원래의 (t,f(t))에 닿도록 평행이동을 하라는 것인데 해당 과정을 한 번 거쳐보면 y=f(t)의 상수함수를 기준으로 바로 접은 것이라는 것을 바로 알 수 있다)

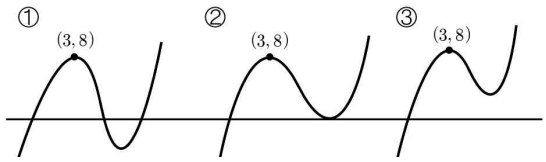
그러므로 g(x)를 그래프로 그려보면 다음과 같다.



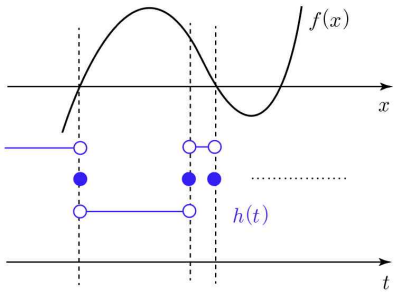
STEP2 $f(x)$의 케이스를 나누고 $h(t)$를 관찰해보자.

본 문제는 실근의 개수를 찾는 문제이기 때문에 기본적으로 f(x) 자체가 근을 몇 개 가지냐부터의 케이스를 나눠 접근해야 한다. 당연히 시험장에선 가장 특별한 경우인 y=0에 접해서 실근 2개를 가지는 상황부터 접근한다.
추가로 본 문제에서는 STEP 1의 발상처럼 f(x)를 접는 것도 생각해야 하기 때문에 접어서 y=0에 접하는 상황도 유력한 정답 후보로 생각해보는 습관을 기르면 도움이 된다.

$f(x)$의 개형은 크게 3가지를 생각할 수 있다.

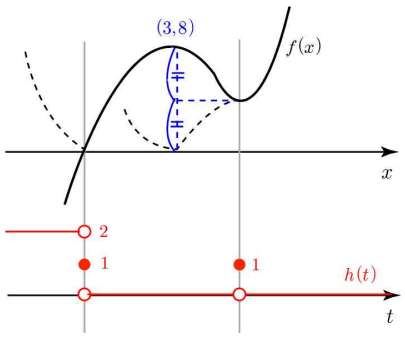


①의 경우 $h(t)$를 살펴보면



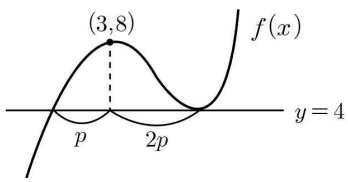
이외 불연속이 3개 등장해서 모순이다.

②의 경우도 같은 과정을 거치면 모순임을 알 수 있다.
③의 경우에서는 가장 특별한 상황인 접은 함수가 $y=0$에 접하는 상황을 살펴보면



$h(t)$의 그래프가 위와 같으므로 불연속점이 2개 있다.

STEP3 $f(x)$의 식을 완성하자.



$f(x)-4=(x-3+p)(x-3-2p)^2$
$(3,8)$을 대입하면 $p=1$이다.
$f(x)=(x-2)(x-5)^2+4 \quad \therefore f(8)=58$

04 2025학년도 6월 21번 정답률 17%

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(a) \le 0$인 실수 a의 최댓값은 2이다.
> (나) 집합 $\{x \mid f(x)=k\}$의 원소의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 $\frac{8}{3}$이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=0$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

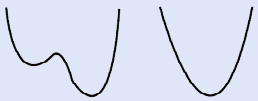
정 답 15

해 설

TIP 사차함수의 개형에 따른 조건의 상황 분석

최고차항의 계수가 양수인 사차함수의 개형에는 여러가지가 있는데 극값을 기준으로 생각하면

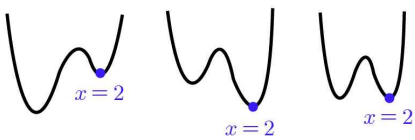
① 극소만 존재하는 경우



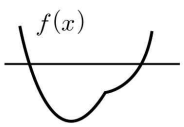
② 극소-극대-극소가 존재하는 경우
위와 같은 2가지의 경우가 존재한다.



(가)의 조건을 해석해보면 어떠한 사차함수의 개형이던 가장 오른쪽에 있는 극솟값의 x좌표가 2임을 의미한다.

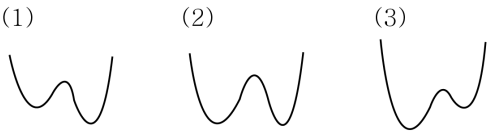


(나) 조건을 해석해보면 일단 $f(x)=k$의 근이 3개 이상이기 위해서 사차함수의 개형은 "극소만 존재하는 경우"가 되어서는 안 된다.

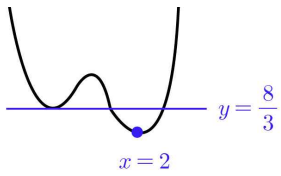


: 실근 3개 이상 불가

"극소-극대-극소가 존재하는 경우"의 개형은 아래 3개와 같다

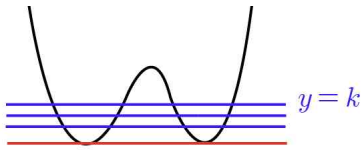


CASE (1). (가), (나) 조건을 고려하면 다음과 같다.



하지만 이 개형의 함수는 어떠한 경우에도 문제에서 제시하는 $(0,0)$을 지나게 만들 수 없다. → 모순

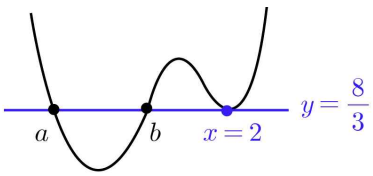
CASE (2). (가), (나) 조건을 고려하면 다음과 같다.



접하는 것은 불가능하다. (실근 2개)

$f(x)$의 그래프와 $y=k$가 만나는 실근의 개수가 3개인 상황은 무수히 많이 만들 수 있지만 k가 한없이 극소에 다다르게만 할 뿐 "최솟값"은 존재할 수 없다.

CASE (3). (가), (나) 조건을 고려하면 다음과 같다.



$f(x)-\frac{8}{3}=(x-a)(x-b)(x-2)^2$

$f(0)=0$, $f'(1)=0$을 이용하면

$f(x)=\{x^2-(a+b)x+ab\}\cdot(x-2)^2+\frac{8}{3}$

$f'(x)=\{2x-(a+b)\}(x-2)^2+\{x^2-(a+b)x+ab\}\cdot 2(x-2)$

$f(0)=4ab+\frac{8}{3}=0$에서 $ab=-\frac{2}{3}$이다.

$f'(1)=\{2-(a+b)\}\cdot 1+\{1-(a+b)-\frac{2}{3}\}\cdot 2\cdot 8-11=0$

에서 $a+b=-\frac{4}{3}$이다.

$f(3)=\{9-3(a+b)+ab\}\cdot 1+\frac{8}{3}$

$=(9+3\cdot\frac{4}{3}-\frac{2}{3})+\frac{8}{3}=\frac{45}{3}=15$

05 2025학년도 9월 21번 정답률 7%

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여

$$2k-8 \le \frac{f(k+2)-f(k)}{2} \le 4k^2+14k$$

를 만족시킬 때, $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

정 답 31

해 설

TIP

샌드위치 정리와 비슷한 느낌을 주는 부등식이다.
하지만 샌드위치 정리를 쓰면 이 문제는 풀기 어렵다.
(샌드위치 정리는 극한을 보내는 것인데 중간에 있는 항은 k에 어떠한 행위를 해도 미분계수의 꼴로 만들어내기 힘들다) 다만 샌드위치 정리에서 영감을 얻을 수 있는 부분은 샌드위치 정리와 마찬가지로 모든 항이 같아지는 상황에 주목해야 한다는 것이다.

STEP1 모든 항의 값이 같아지는 상황에 집중해보자.

$2k-8=4k^2+14k$

$4k^2+12k+8=0$

$4(k+1)(k+2)=0,\ k=-1,-2$

① $k=-2$

$-12 \le \frac{f(0)-f(-2)}{2} \le -12$

$\therefore f(0)-f(-2)=-24$

② $k=-1$

$-10 \le \frac{f(1)-f(-1)}{2} \le -10$

$\therefore f(1)-f(-1)=-20$

STEP2 계산을 열심히..

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$로 설정하고
위의 관계식 2개를 이용하자.

미지수는 3개이지만 관계식은 2개다.
즉, 모든 미지수를 완벽히 알 수는 없다.
그러나 구하고자 하는 답을 보면 미분을 한 번 거친 순간이다. c의 값을 구하지 않아도 된다는 것을 의미한다.

계산을 진행하면 $a=\frac{5}{2}$, $b=-11$이다.

$\therefore f(x)=x^3+\frac{5}{2}x^2-11x+c$

$f'(x)=3x^2+5x-11$

$f'(3)=27+15-11=31$

06 2025학년도 수능 15번 정답률 32%

15. 상수 $a\,(a \neq 3\sqrt{5})$와 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+15x+7 & (x \leq 0) \\ f(x) & (x>0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) x에 대한 방정식 $g'(x)\times g'(x-4)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$g(-2)+g(2)$의 값은? [4점]

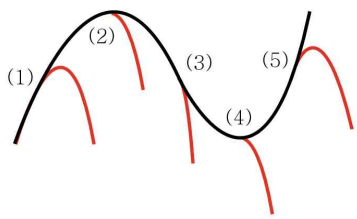
① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

정 답 ②

해 설

STEP1 함수의 개형으로 접근해보자

$x^3+ax^2+15x+7$의 일반적인 개형은 다음과 같이 생각할 것이다.



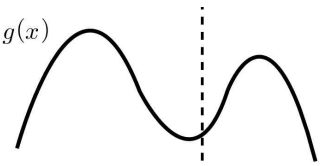
$x=0$이 존재할 수 있는 영역은 위와 같이 크게 5개의 영역이 있고 각각의 상황에서 $f(x)$를 미분가능하도록 그려보면 빨간색과 같다.

(1), (2), (3)번의 경우 $g'(x)=0$의 실근이 1개이므로 $g'(x)\times g'(x-4)=0$의 실근 4개를 만족할 수 없다.

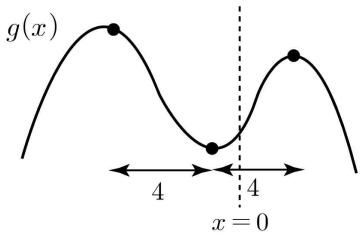
(4)번의 경우 삼차함수의 입장에서 극소에서 이어지는 것이기 때문에 $g'(0)=0$이 된다.
하지만 식에 따르면 $g'(0)=15$가 되어야 하므로 모순이다.

따라서, (5)번 경우임을 알 수 있다.

STEP2 (나) 조건을 활용해 함수를 확정한다.
(5)번 케이스는 다음과 같다.

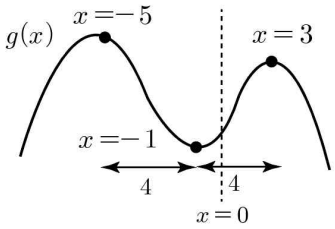


이미 $g'(x)=0$의 근이 3개이기 때문에 (나) 조건을 만족하기 위해서는 $g'(x-3)=0$의 근과 2개가 겹쳐야 한다. 즉, $g'(x)=0$의 실근들이 정확히 4씩 차이나면 된다.



$x \leqq 0$에서 $g(x)=x^3+ax^2+15x+7$
$g'(x)=3x^2+2ax+15$
$g'(x)=0$의 두 근을 α, β라 했을 때
① $d<0$, $\beta<0$ ② $\alpha\times\beta=5$ ③ $|\alpha-\beta|=4$
를 고려해 두 실근이 -1, -5임을 알 수 있다.

$\alpha+\beta=-\frac{2}{3}a=-6$이므로 $a=9$이다.



$$g(x)=\begin{cases} x^3+9x^2+15x+7 & (x \leqq 0) \\ p(x-3)^2+q & (x>0) \end{cases}$$
($x=3$에서 대칭이므로)

① $x=0$ 연속 : $7=9p+q$
② $x=0$ 미분가능 : $15=-6p$
두 식을 연립하면 $p=-\frac{5}{2}$, $q=\frac{59}{2}$이다.

$g(-2)=-8+36-30+7=5$
$g(2)=(-\frac{5}{2})(-11)^2+\frac{59}{2}=27$
$\therefore 5+27=32$

07 2026학년도 9월 21번 정답률 22%

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

> 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여
>
> $$\frac{f'(x)}{2}+x^2-2 \le \frac{f(2x)-f(0)}{2x} \le x^4$$
>
> 이다.

정 답 296

해 설

언뜻 봐서는 사잇값 정리나 미분계수를 이용할 것 같지만 $f(x)$에 대한 정보가 전혀 없기 때문에 접근이 쉽지 않다. $f(x)$의 계수를 미지수로 잡고 대입하여 푸는 방법이 가장 빠르고 쉬운 문항이다.

STEP1 $f(x)$를 대입하여 식 정리하기

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하자.

$\dfrac{f(2x)-f(0)}{2x}=4x^2+2ax+b$,

$\dfrac{f'(x)}{2}+x^2-2=\dfrac{3x^2+2ax+b}{2}+x^2-2$이다.

정리하면, $\dfrac{3}{2}x^2+2+ax+\dfrac{b}{2}\ge 0$이고, $4x^2-x^4+2ax+b\le 0$이다.

STEP2 정리한 식에서 공통 부분을 찾아내어 활용하기

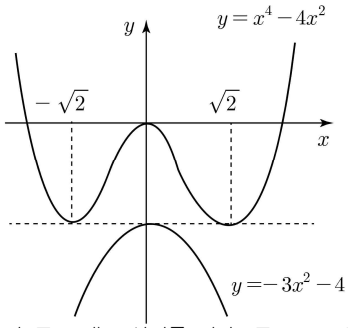
정리한 식을 잘 보면, 공통적으로 $2ax+b$의 항을 가지고 있다.

항상 문항을 풀 때에는 아는 값과 모르는 값을 분리하는 것이 중요한데, 이 문항은 공교롭게도 모르는 항이 두 식에서 공통이다.

따라서 공통 부분을 기준으로 정리하면, 다음과 같은 식이 나온다.

$-3x^2-4\le 2ax+b\le x^4-4x^2$

양쪽의 항을 그래프로 그리면 다음과 같다. (직접 미분해서 극값을 찾아 그려보세요.)



$y=2ax+b$가 두 그래프 사이를 지나므로 $y=-4$만 가능하다.

따라서, $a=0$, $b=-4$이고, $f'(10)=300-4=296$이다.

유형 13 속도와 가속도

01 2025학년도 9월 11번 정답률 69%

11. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치가 각각

$$x_1 = t^2 + t - 6, \quad x_2 = -t^3 + 7t^2$$

이다. 두 점 P, Q의 위치가 같아지는 순간 두 점 P, Q의 가속도를 각각 p, q라 할 때, $p-q$의 값은? [4점]

① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

정 답 ①

해 설

STEP1 위치가 같아질 때의 t를 구하자.

$t^2 + t - 6 = -t^3 + 7t^2$

$t^3 - 6t^2 + t - 6 = t^2(t-6) + (t-6) = (t-6)(t^2+1) = 0$

따라서 $t = 6$이다.

STEP2 위치를 미분하면 속도, 속도를 미분하면 가속도

$v_P(t) = 2t + 1$ $\quad v_Q(t) = -3t^2 + 14t$

$a_P(t) = 2$ $\quad a_Q(t) = -6t + 14$

$a_Q(6) = -22$

따라서 $2 + 22 = 24$이다.

02 2025학년도 수능 11번 정답률 77%

11. 시각 $t=0$일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 6t$$

이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에서의 점 P의 가속도는? [4점]

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

정 답 ②

해 설

TIP 운동 방향의 변화 = 속도의 변화

속도가 단순히 0이 되어서는 안된다.

부호가 바뀌는 0이어야 한다.

- $v(t) = 3t^2 - 3t - 6 = 3(t-2)(t+1)$

  $t = 2$에서 부호 변화가 일어난다.

  (시간이 음수일 수는 없으니 $t = -1$은 불가능하다.)
- $a(t) = 6t - 3$, $a(2) = 6 \cdot 2 - 3 = 9$이다.

PART 3
적분

개념 유형

(1) 부정적분
(2) 다항함수의 적분 공식

기출 유형

(1) 부정적분의 계산
(2) 정적분의 계산
(3) f(x+p)=f(x)를 만족시키는 함수의 정적분
(4) 정적분의 응용
(5) 정적분으로 정의된 함수의 미분
(6) 정적분을 포함한 등식
(7) 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이
(8) 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이
(9) 곡선과 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이
(10) 정적분과 넓이의 관계
(11) 위치와 위치 변화량
(12) 속도와 가속도

THEME

1 부정적분

정리1 부정적분

개념1 부정적분의 정의

① 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$, 즉 $F'(x)=f(x)$일 때 $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분이라고 하고, 함수 $f(x)$의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$를 적분한다고 한다. (미분의 역과정이라 생각하자)

② 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 함수 $f(x)$의 모든 부정적분은 $F(x)+C$ (단, C는 상수)로 나타낼 수 있고, 이것을 기호로 $\int f(x)dx$와 같이 나타낸다.

TIP

"부정적분으로 나타내어진 함수에 대한 이해"는 킬러 문제의 단골소재다.
해당 문제들에서는 아래와 같은 표현방식이 자주 등장한다.

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt$$

이러한 식을 보면 다음 2가지는 이용하지 않더라도 무조건 해놓고 문제풀이를 진행하자.

① 대입 : $x=a$ 대입 $\rightarrow$ $g(a)=0$

② 미분 : $g'(x)=f(x)$

개념2 함수 $y=x^n$ (단, n은 양의 정수)와 함수 $y=1$의 부정적분

① n이 양의 정수일 때, $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (단, C는 적분상수)

② $\int 1dx=x+C$ (단, C는 적분상수)

개념3 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 부정적분이 각각 존재할 때

① $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 0이 아닌 상수)

② $\int\{f(x)+g(x)\}=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

③ $\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

정리2 정적분

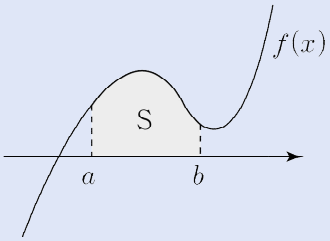
개념1 정적분의 정의

두 실수 a, b를 포함하는 구간에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, $F(b)-F(a)$를 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

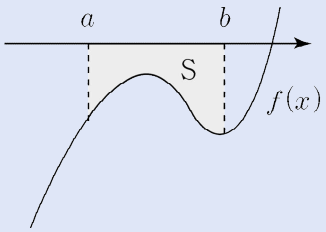
TIP

쉬운 문제의 정적분은 단순 계산으로 해결 가능하다.
하지만 문제의 난이도가 올라갈수록 정적분을 "넓이" 자체로 인식하는 것이 필요하다.
정적분의 넓이에는 부호가 존재하는데 이를 결정하는 것에는 2가지가 있다.
① 적분대상의 값
② 적분 방향 (x축 방향을 양수라고 생각하자)



$\int_a^b f(x)dx =$ (+) × (+) = S

$f(x)$의 $[a,b]$에서 부호 적분 방향



$\int_a^b f(x)dx =$ (−) × (+) = −S

$f(x)$의 $[a,b]$에서 부호 적분 방향

정리3 정적분의 성질

개념1 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때

① $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

② $\int_a^b \{f(x)+g(x)\} = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

③ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

개념2 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때

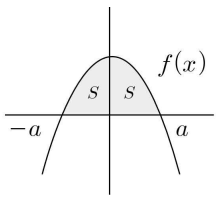
$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

정리4 다항함수의 성질을 이용한 정적분

다항함수의 성질을 이용한 정적분 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

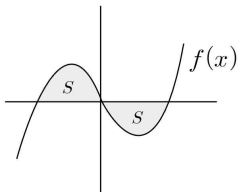
① $f(-x)=f(x)$를 만족시킬 때, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

② $f(-x)=-f(x)$를 만족시킬 때, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$



$f(-x)=f(x)$

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$



$f(-x)=-f(x)$

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

TIP

우함수/기함수의 적분에 대한 성질은 미적분에서도 많이 이용하므로 잘 알아두자.
이는 마지막 계산에서 유용하게 쓰일 수 있는데 적분 구간이 대칭일 때는 기함수 적분 값을 미리 0으로 보내 계산을 조금 더 간결하게 할 수 있다.

정리5 다양한 함수의 조건들

함수 $f(x)$가 실수 a를 포함하는 열린구간에서 연속일 때

① $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)dt = f(a)$

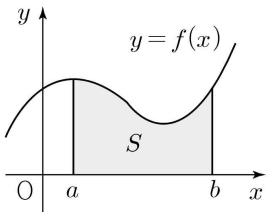
② $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^{x} f(t)dt = f(a)$

정리6 정적분의 활용

개념1 곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

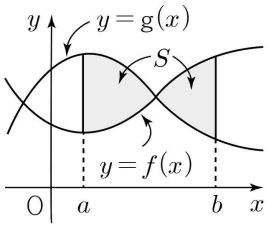
$S=\int_a^b |f(x)|dx$



개념2 두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$



개념3 속도와 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 할 때

① 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면 $x(t)=x(a)+\int_a^t v(s)ds$ 이다.

② 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a\leq b)$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$ 이다.

③ 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a\leq b)$까지 점 P가 움직인 거리 s는 $s=\int_a^b |v(t)|dt$ 이다.

TIP

의외로 학생들이 가장 많이 개념과 문제풀이 사이에서 괴리를 많이 느끼는 부분인 것 같다.
개념 자체는 어렵지 않으나 문제별로 표현방식이 조금씩 달라서 그러지 않을까 생각한다.
① 위치의 변화량 = 마지막 위치 − 처음 위치 (오직 저 두 위치만 생각하기)
② 이동거리 = 처음 위치에서 마지막 위치에 올 때까지의 모든 경로를 더한다고 생각하기 (거리에는 음수가 없다는 것을 절대 잊지 말자!!)

유형 01 부정적분의 계산

01 2022학년도 6월 2번 정답률 88%

2. 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x^2-2x,\quad f(1)=1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

02 2022학년도 9월 17번 정답률 89%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3-12x^2+7$이고 $f(0)=3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

03 2022학년도 수능 17번 정답률 86%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+2x$이고 $f(0)=2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

04 2023학년도 6월 17번 정답률 84%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3+6x^2$이고 $f(0)=-1$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [3점]

05 2023학년도 9월 17번 정답률 85%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2-4x+3$이고 $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

06 2022학년도 9월 17번 정답률 89%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3-12x^2+7$이고 $f(0)=3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

07 2022학년도 수능 17번 정답률 86%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+2x$이고 $f(0)=2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

08 2023학년도 6월 17번 정답률 84%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3+6x^2$이고 $f(0)=-1$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [3점]

09 2023학년도 9월 17번 정답률 85%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2-4x+3$이고 $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

10 2023학년도 수능 17번 정답률 82%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=4x^3-2x$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

11 2024학년도 6월 17번 정답률 85%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3-1$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

12 2024학년도 9월 8번 정답률 87%

8. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=6x^2-2f(1)x, \quad f(0)=4$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

13 2024학년도 수능 5번 정답률 89%

5. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x(x-2),\quad f(1)=6$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

14 2026학년도 6월 17번 정답률 97%

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+4x$이고 $f(0)=3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

15 2026학년도 9월 9번 정답률 90%

9. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고, 함수 $2f(x)+1$의 한 부정적분을 $G(x)$라 하자. $G(3)=2F(3)$일 때, $G(5)-2F(5)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

16 2026학년도 9월 17번 정답률 97%

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+2x+1$이고 $f(1)=6$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

17 2026학년도 수능 17번 정답률 94%

17. 함수 $f(x)=4x^3-2x$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(0)=4$일 때, $F(2)$의 값을 구하시오. [3점]

유형 02 정적분의 계산

01 2024학년도 9월 8번 정답률 87%

8. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=6x^2-2f(1)x,\quad f(0)=4$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

02 2024학년도 수능 5번 정답률 89%

5. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x(x-2),\quad f(1)=6$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

03 2024학년도 수능 8번 정답률 71%

8. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$$

를 만족시킬 때, $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$의 값은? [3점]

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

04 2025학년도 6월 17번 정답률 87%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2+2$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

05 2025학년도 9월 9번 정답률 85%

9. 함수 $f(x)=x^2+x$에 대하여

$$5\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 \{5x+f(x)\}\,dx$$

의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

06 2025학년도 9월 17번 정답률 91%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2+2x+1$이고 $f(0)=1$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

07 2025학년도 수능 7번 정답률 87%

7. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)\,dt = 3x^3 + 2x$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

08 2025학년도 수능 9번 정답률 81%

9. 함수 $f(x) = 3x^2 - 16x - 20$에 대하여

$$\int_{-2}^{a} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx$$

일 때, 양수 a의 값은? [4점]

① 16 ② 14 ③ 12 ④ 10 ⑤ 8

09 2025학년도 수능 17번 정답률 85%

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 9x^2 + 4x$이고 $f(1) = 6$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

10 2026학년도 6월 5번 정답률 97%

5. $\int_0^2 (6x^2-2x+1)dx$ 의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

유형 03 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 함수의 정적분

01 2022학년도 6월 11번 정답률 51%

11. 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad \int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$의 값은? [4점]

(가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0\le x\le 1) \end{cases}$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

유형 04 정적분의 응용

01 2022학년도 9월 14번 정답률 53%

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 p에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-f(0) & (x\le 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x>0) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $p=1$일 때, $g'(1)=0$이다.

ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다.

ㄷ. $p\ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)dx\ge 0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

02 2022학년도 수능 20번 정답률 10%

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x)=x$이다.
>
> (나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$이다.

$60\times\int_1^2 f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

03 2023학년도 9월 14번 정답률 45%

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_t^{t+1} f(x)\,dx-\int_0^1 |f(x)|\,dx$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이다.

ㄴ. $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다.

ㄷ. $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 05 정적분으로 정의된 함수의 미분

01 2022학년도 6월 20번 정답률 21%

20. 실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

02 2023학년도 6월 14번 정답률 39%

14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & (x<0) \\ \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & (x\geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(0)=0$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 2023학년도 6월 20번 정답률 12%

20. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

04 2024학년도 6월 20번 정답률 12%

20. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오. [4점]

$x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq g(4)$이고 $\lvert g(x)\rvert \geq \lvert g(3)\rvert$이다.

05 2025학년도 9월 15번 정답률 37%

15. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^x tf(t)dt + \int_{-1}^x tg(t)dt = 3x^4 + 8x^3 - 3x^2$

(나) $f(x) = xg'(x)$

$\int_0^3 g(x)dx$의 값은? [4점]

① 72 ② 76 ③ 80 ④ 84 ⑤ 88

06 2026학년도 9월 15번 정답률 42%

15. 최고차항의 계수가 양수이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x (|f(t)|-|t|)\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $g'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=2$, $x=6$에서 극값을 갖는다.

$f(6)\times g(2)<0$일 때, $f(8)$의 값은? [4점]

① 16 ② 22 ③ 28 ④ 34 ⑤ 40

07 2026학년도 수능 15번 정답률 37%

15. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & (x<0) \\ x^2-x & (x\geq 0) \end{cases}$$

이고, 양수 a에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} ax+a & (x<-1) \\ 0 & (-1\leq x<1) \\ ax-a & (x\geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)=\int_0^x \{g(t)-f(t)\}dt$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값을 k라 하자. $a=k$일 때, $k+h(3)$의 값은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

유형 06 정적분을 포함한 등식

01 2022학년도 9월 11번 정답률 66%

11. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)\,dt$$

를 만족시킨다. $f(1)=\int_0^1 f(t)\,dt$일 때, $a+f(3)$의 값은?
(단, a는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

02 2024학년도 9월 22번 정답률 11%

22. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^x f(t)\,dt = xf(x) - 2x^2 - 1$

(나) $f(x)G(x) + F(x)g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 1$

$\int_1^3 g(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

03 2022학년도 6월 20번 정답률 21%

20. 실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

04 2026학년도 6월 9번 정답률 93%

9. 함수 $f(x)=x^2+ax$에 대하여

$$\int_{-3}^{3}(x+1)f(x)\,dx=36+\int_{-3}^{3}f(x)\,dx$$

일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

유형 07 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이

01 2024학년도 6월 10번 정답률 61%

10. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

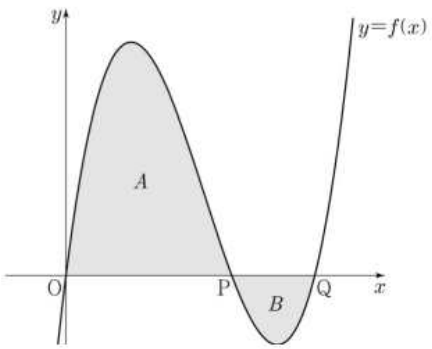
$$f(x)=kx(x-2)(x-3)$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 원점 O와 두 점 P, Q($\overline{OP}<\overline{OQ}$)에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

$$(A\text{의 넓이})-(B\text{의 넓이})=3$$

일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



02 2024학년도 수능 12번 정답률 60%

12. 함수 $f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$와 실수 $t\,(0<t<6)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ -(x-t)+f(t) & (x\geq t) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은? [4점]

① $\frac{125}{4}$ ② $\frac{127}{4}$ ③ $\frac{129}{4}$ ④ $\frac{131}{4}$ ⑤ $\frac{133}{4}$

유형 08 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이

01 2022학년도 6월 6번 정답률 79%

6. 곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

02 2022학년도 수능 8번 정답률 61%

8. 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

03 2023학년도 9월 20번 정답률 25%

20. 상수 $k(k<0)$에 대하여 두 함수

$$f(x)=x^3+x^2-x,\quad g(x)=4|x|+k$$

의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때,
두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자.
$30\times S$의 값을 구하시오. [4점]

04 2026학년도 수능 13번 정답률 54%

13. 함수 $f(x)=x^2-4x-3$에 대하여
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ -6)$에서의 접선을 l이라 하고,
함수 $g(x)=(x^3-2x)f(x)$에 대하여
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,\ 6)$에서의 접선을 m이라 하자.
두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]

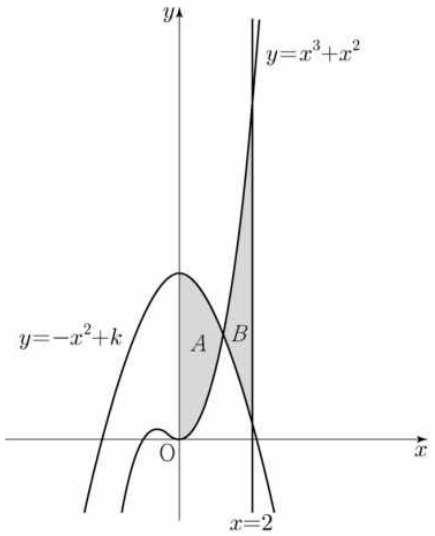
① 21 ② 28 ③ 35 ④ 42 ⑤ 49

유형 09 곡선과 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이

01 2023학년도 수능 10번 정답률 63%

10. 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=B$일 때, 상수 k의 값은? (단, $4<k<5$) [4점]

① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$



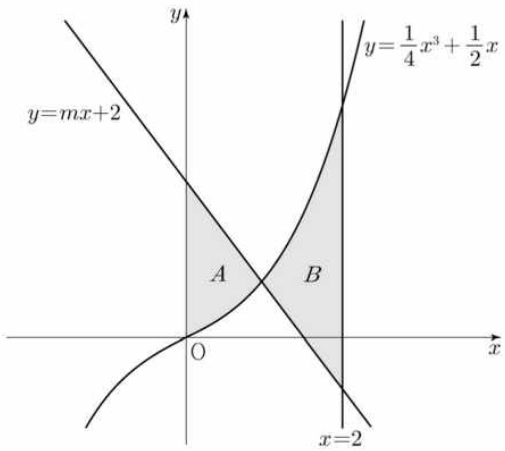
02 2024학년도 9월 19번 정답률 69%

19. 두 곡선 $y=3x^3-7x^2$과 $y=-x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]

03 2025학년도 6월 13번 정답률 39%

13. 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 직선 $y=mx+2$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 두 직선 $y=mx+2$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $B-A=\frac{2}{3}$일 때, 상수 m의 값은? (단, $m<-1$) [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{17}{12}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{5}{4}$ ⑤ $-\frac{7}{6}$



04 2025학년도 9월 13번 정답률 58%

13. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-2x+6 & (x<0) \\ -x^2+2x+6 & (x\geq 0) \end{cases}$$

의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점을 P, Q라 하고, 상수 $k\,(k>4)$에 대하여 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 R이라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=k$ 및 선분 QR로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=2B$일 때, k의 값은? (단, 점 P의 x좌표는 음수이다.) [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

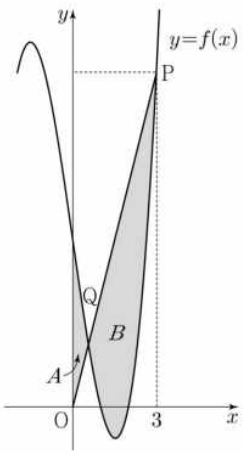
05 2025학년도 수능 13번 정답률 51%

13. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$f(1)=f(2)=0,\quad f'(0)=-7$$

을 만족시킨다. 원점 O와 점 $\mathrm{P}(3, f(3))$에 대하여 선분 OP가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자.
곡선 $y=f(x)$와 y축 및 선분 OQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A,
곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 할 때,
$B-A$의 값은? [4점]

① $\frac{37}{4}$ ② $\frac{39}{4}$ ③ $\frac{41}{4}$ ④ $\frac{43}{4}$ ⑤ $\frac{45}{4}$

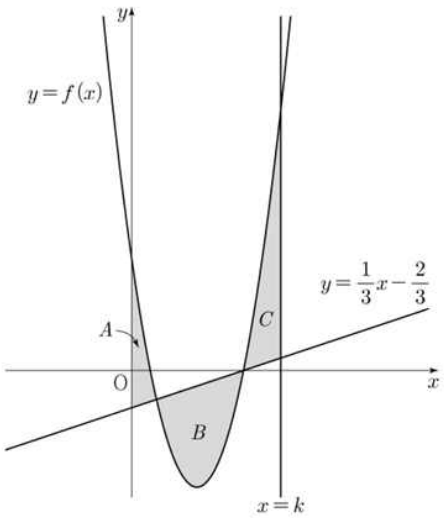


06 2026학년도 6월 13번 정답률 93%

13. 그림과 같이 함수 $f(x)=3x^2-7x+2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$ 및 y축으로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$로 둘러싸인 영역을 B, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$, $x=k(k>2)$로 둘러싸인 영역을 C라 하자.

$$(A\text{의 넓이})+(C\text{의 넓이})=(B\text{의 넓이})$$

일 때, 상수 k의 값은? [4점]

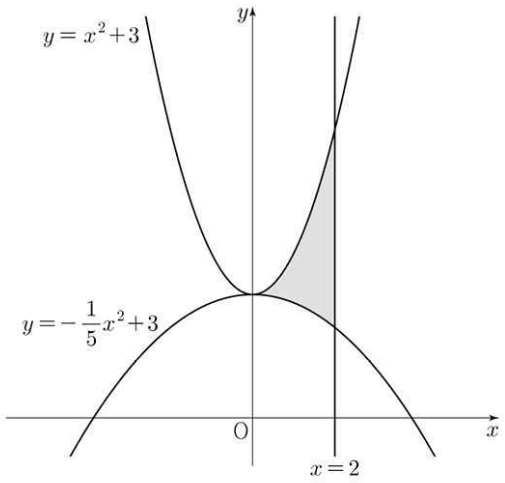


① $\frac{29}{12}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{31}{12}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

07 2026학년도 수능 7번 정답률 89%

7. 두 곡선 $y=x^2+3$, $y=-\frac{1}{5}x^2+3$과 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{18}{5}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{17}{5}$ ④ $\frac{33}{10}$ ⑤ $\frac{16}{5}$



유형 10 정적분과 넓이의 관계

01 2023학년도 수능 12번 정답률 36%

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $n-1 \le x < n$일 때, $|f(x)| = |6(x-n+1)(x-n)|$이다.
> (단, n은 자연수이다.)

열린구간 $(0, 4)$에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \int_x^4 f(t)\,dt$$

가 $x=2$에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

02 2025학년도 6월 15번 정답률 44%

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 $k\,(k \geq 0)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} 2x-k & (x \leq k) \\ f(x) & (x>k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여
> $\int_0^x g(t)\left\{|t(t-1)|+t(t-1)\right\}dt \geq 0$이고
> $\int_3^x g(t)\left\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\right\}dt \geq 0$이다.

$g(k+1)$의 최솟값은? [4점]

① $4-\sqrt{6}$ ② $5-\sqrt{6}$ ③ $6-\sqrt{6}$
④ $7-\sqrt{6}$ ⑤ $8-\sqrt{6}$

유형 11 위치와 위치 변화량

01 2022학년도 6월 19번 정답률 57%

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k$$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

02 2023학년도 9월 10번 정답률 67%

10. 수직선 위의 점 A(6)과 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 이 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 점 P의 속도 $v(t)$를

$$v(t) = 3t^2 + at \quad (a > 0)$$

이라 하자. 시각 $t=2$에서 점 P와 점 A 사이의 거리가 10일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

03 2024학년도 6월 14번 정답률 42%

14. 실수 $a\,(a \geq 0)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$를

$$v(t) = -t(t-1)(t-a)(t-2a)$$

라 하자. 점 P가 시각 $t=0$일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

04 2026학년도 수능 14번 정답률 54%

11. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 실수 k에 대하여 시각이 $t\,(t \geq 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = t^2 - kt + 4$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $k=0$이면, 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 $\frac{13}{3}$이다.

ㄴ. $k=3$이면, 출발한 후 점 P의 운동 방향이 한 번 바뀐다.

ㄷ. $k=5$이면, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 3이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 12 속도와 가속도

01 2022학년도 9월 9번 정답률 84%

9. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=-4t^3+12t^2$$

이다. 시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 12일 때, 시각 $t=3k$에서 $t=4k$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, k는 상수이다.) [4점]

① 23 ② 25 ③ 27 ④ 29 ⑤ 31

02 2022학년도 수능 14번 정답률 24%

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t(t-1)(at+b) \quad (a\neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1 |v(t)|\,dt=2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 v(t)\,dt=0$

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0,1)$에 존재한다.

ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0,1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 2023학년도 6월 11번 정답률 66%

11. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=2-t,\quad v_2(t)=3t$$

이다. 출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

04 2023학년도 수능 20번 정답률 34%

20. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0\leq t\leq 2$일 때, $v(t)=2t^3-8t$이다.
(나) $t\geq 2$일 때, $a(t)=6t+4$이다.

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [4점]

05 2024학년도 9월 11번 정답률 34%

11. 두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 A(1)과 점 B(8)에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도는 각각

$$v_1(t)=3t^2+4t-7, \quad v_2(t)=2t+4$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 4가 될 때까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 10 ② 14 ③ 19 ④ 25 ⑤ 32

06 2024학년도 수능 10번 정답률 51%

10. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=t^2-6t+5,\quad v_2(t)=2t-7$$

이다. 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$는 구간 $[0, a]$에서 증가하고, 구간 $[a, b]$에서 감소하고, 구간 $[b, \infty)$에서 증가한다. 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 Q가 움직인 거리는? (단, $0<a<b$) [4점]

① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{17}{2}$ ③ $\frac{19}{2}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{23}{2}$

07 2025학년도 6월 19번 정답률 19%

19. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=\begin{cases} -t^2+t+2 & (0\leq t\leq 3) \\ k(t-3)-4 & (t>3) \end{cases}$$

이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각에서의 점 P의 위치가 1일 때, 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

08 2026학년도 6월 11번 정답률 95%

11. 시각 $t=0$일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각이 $t\,(t\geq 0)$일 때 점 P의 위치 x가

$$x=t^3-t^2-t+1$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 1이다.
ㄴ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 속도는 0이다.
ㄷ. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에 점 P의 가속도는 4이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

09 2026학년도 9월 11번 정답률 84%

11. 시각 $t=0$일 때 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각이 $t\,(t\geq 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-10t+7$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다.
ㄴ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 3이다.
ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 01 부정적분의 계산

01 2022학년도 6월 2번 정답률 88%

2. 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x^2-2x,\quad f(1)=1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ⑤

해 설

$f(x)=x^3-x^2+C$

$f(1)=1$을 적용하면 $C=1$이다.

$f(x)=x^3-x^2+1$에서 $f(2)=8-4+1=5$이다.

02 2022학년도 9월 17번 정답률 89%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3-12x^2+7$이고 $f(0)=3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 8

해 설

$f(x)=2x^4-4x^3+7x+C$

$f(0)=3$을 대입하면 $C=3$이다.

$f(x)=2x^4-4x^3+7x+3$

$f(1)=2-4+7+3=8$이다.

03 2022학년도 수능 17번 정답률 86%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+2x$이고 $f(0)=2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 4

해 설

$f(x)=x^3+x^2+C$

$f(0)=2$를 적용하면 $C=2$이다.

$f(x)=x^3+x^2+2$에서 $f(1)=4$이다.

04 2023학년도 6월 17번 정답률 84%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3+6x^2$이고 $f(0)=-1$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 15

해 설

$f(x)=2x^4+2x^3+C$

$f(0)=-1$을 적용하면 $C=-1$이다.

$f(x)=2x^4+2x^3-1$에서 $f(-2)=32-16-1=15$이다.

05 2023학년도 9월 17번 정답률 85%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2-4x+3$이고 $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 16

해 설

$f(x)=2x^3-2x^2+3x+C$

$f(1)=5$를 적용하면 $C=2$이다.

$f(x)=2x^3-2x^2+3x+2$에서

$f(2)=16-8+6+2=16$이다.

06 2022학년도 9월 17번 정답률 89%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3-12x^2+7$이고 $f(0)=3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 8

해 설

$f(x)=2x^4-4x^3+7x+C$

$f(0)=3$을 대입하면 $C=3$이다.

$f(x)=2x^4-4x^3+7x+3$

$f(1)=2-4+7+3=8$이다.

07 2022학년도 수능 17번 정답률 86%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+2x$이고 $f(0)=2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 4

해 설

$f(x)=x^3+x^2+C$

$f(0)=2$를 적용하면 $C=2$이다.

$f(x)=x^3+x^2+2$에서 $f(1)=4$이다.

08 2023학년도 6월 17번 정답률 84%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3+6x^2$이고 $f(0)=-1$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 15

해 설

$f(x)=2x^4+2x^3+C$

$f(0)=-1$을 적용하면 $C=-1$이다.

$f(x)=2x^4+2x^3-1$에서 $f(-2)=32-16-1=15$이다.

09 2023학년도 9월 17번 정답률 85%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2-4x+3$이고 $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 16

해 설

$f(x)=2x^3-2x^2+3x+C$

$f(1)=5$를 적용하면 $C=2$이다.

$f(x)=2x^3-2x^2+3x+2$에서

$f(2)=16-8+6+2=16$이다.

10 2023학년도 수능 17번 정답률 82%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=4x^3-2x$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 15

해 설

$f(x)=x^4-x^2+C$

$f(0)=3$을 적용하면 $C=3$이다.

$f(x)=x^4-x^2+3$에서 $f(2)=16-4+3=15$이다.

11 2024학년도 6월 17번 정답률 85%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3-1$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 33

해 설

$f(x)=2x^4-x+C$

$f(0)=3$을 적용하면 $C=3$이다.

$f(x)=2x^4-x+3$

$f(2)=32-2+3=33$

12 2024학년도 9월 8번 정답률 87%

8. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=6x^2-2f(1)x,\quad f(0)=4$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

정 답 ④

해 설

$f(x)=2x^3-f(1)x^2+C$

$f(0)=4$를 적용하면 $C=4$이다.

$f(x)=2x^3-f(1)x^2+4$

$x=1$를 대입하면 $f(1)=2-f(1)+4$에서 $f(1)=3$이다.

$f(x)=2x^3-3x^2+4$

$f(2)=16-12+4=8$

13 2024학년도 수능 5번 정답률 89%

5. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x(x-2),\quad f(1)=6$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ④

해 설

$f'(x)=3x^2-6x$

$f(x)=x^3-3x^2+C$

$f(1)=6$을 적용하면 $C=8$이다.

$f(x)=x^3-3x^2+8$

$f(2)=8-12+8=4$

14 2026학년도 6월 17번 정답률 97%

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+4x$이고 $f(0)=3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 6

해 설

함수 $f(x)$를 부정적분을 통해 구하자.

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+4x)dx=x^3+2x^2+C$ 이다.

$f(0)=3$이므로 $C=3$이다.

$f(1)=1+2+C=6$이다.

15 2026학년도 9월 9번 정답률 90%

9. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고, 함수 $2f(x)+1$의 한 부정적분을 $G(x)$라 하자. $G(3)=2F(3)$일 때, $G(5)-2F(5)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ②

해 설

$G(x)-2F(x)=H(x)$라 하자.

$H(3)=0$이고, $G'(x)-2F'(x)=2f(x)+1-2f(x)=1$이다.

$H(5)=H(3)+\int_3^5 H'(x)dx=H(3)+\int_3^5 1dx=0+2=2$이다.

16 2026학년도 9월 17번 정답률 97%

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+2x+1$이고 $f(1)=6$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 17

해 설

$f'(x)$를 부정적분하여 $f(x)$를 구하자.

$f(x)=\int f'(x)dx+C=\int(3x^2+2x+1)dx+C=x^3+x^2+x+C$

이다.

$f(1)=6$이므로 $C=3$, $f(2)=17$이다.

17 2026학년도 수능 17번 정답률 94%

17. 함수 $f(x)=4x^3-2x$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(0)=4$일 때, $F(2)$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 16

해 설

$f(x)$의 부정적분은 x^4-x^2+C이다.

$F(0)=4$이므로 $C=4$이다.

따라서, $F(x)=x^4-x^2+4$, $F(2)=16$이다.

유형 02 정적분의 계산

01 2024학년도 9월 8번 정답률 87%

8. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=6x^2-2f(1)x,\quad f(0)=4$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

정 답 ④

해 설

$f(x)=2x^3-f(1)x^2+C$

$f(0)=4$를 적용하면 $C=4$이다.

$f(x)=2x^3-f(1)x^2+4$

$x=1$를 대입하면 $f(1)=2-f(1)+4$에서 $f(1)=3$이다.

$f(x)=2x^3-3x^2+4$

$f(2)=16-12+4=8$

02 2024학년도 수능 5번 정답률 89%

5. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x(x-2),\quad f(1)=6$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ④

해 설

$f'(x)=3x^2-6x$

$f(x)=x^3-3x^2+C$

$f(1)=6$을 적용하면 $C=8$이다.

$f(x)=x^3-3x^2+8$

$f(2)=8-12+8=4$

03 2024학년도 수능 8번 정답률 71%

8. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$$

를 만족시킬 때, $\int_{-2}^{2}f(x)dx$의 값은? [3점]

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

정 답 ②

해 설

$(x-1)f(x)=3x(x-1)(x^2+x+1)$

$f(x)=3x(x^2+x+1)=3x^3+3x^2+3x$

$\int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{2}(3x^3+3x^2+3x)dx$

적분구간이 대칭일 때는 기함수의 적분값은 0으로 미리 보내자!

$=2\int_{0}^{2}3x^2dx=2[x^3]_0^2=16$

04 2025학년도 6월 17번 정답률 87%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2+2$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 23

해 설

$f(x)=2x^3+2x+C$

$f(0)=3$을 적용하면 $C=3$이다.

$f(x)=2x^3+2x+3$

$f(2)=16+4+3=23$

05 2025학년도 9월 9번 정답률 85%

9. 함수 $f(x)=x^2+x$에 대하여

$$5\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 \{5x+f(x)\}\,dx$$

의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

정 답 ⑤

해 설

$\int_0^1 f(x)dx=[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2]_0^1=\frac{5}{6}$

$5\int_0^1 f(x)dx-5\int_0^1 xdx-\int_0^1 f(x)dx$

$=4\int_0^1 f(x)dx-5[\frac{1}{2}x^2]_0^1=\frac{10}{3}-\frac{5}{2}=\frac{5}{6}$

06 2025학년도 9월 17번 정답률 91%

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2+2x+1$이고 $f(0)=1$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 5

해 설

$f(x)=2x^3+x^2+x+C$

$f(0)=1$을 적용하면 $C=1$이다.

따라서 $f(x)=2x^3+x^2+x+1$에서 $f(1)=5$이다.

07 2025학년도 수능 7번 정답률 87%

7. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)\,dt = 3x^3 + 2x$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

정 답 ③

해 설

1. $x=0$ 대입 : $0=0$

2. 미분 : $f(x)=9x^2+2$

따라서 $f(1)=11$이다.

TIP 부정적분 식을 보면

1. 대입

2. 미분

위 2가지는 필수적으로 하자!

08 2025학년도 수능 9번 정답률 81%

9. 함수 $f(x)=3x^2-16x-20$에 대하여

$$\int_{-2}^{a} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx$$

일 때, 양수 a의 값은? [4점]

① 16 ② 14 ③ 12 ④ 10 ⑤ 8

정 답 ④

해 설

$$\int_{-2}^{a} f(x)dx - \int_{-2}^{0} f(x)dx = 0$$

$$\int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

$$\int_{0}^{a} (3x^2-16x-20)dx = [x^3-8x^2-20x]_0^a = a^3-8a^2-20a$$

$$= a(a+2)(a-10) = 0$$에서 $a=10$이다.

09 2025학년도 수능 17번 정답률 85%

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=9x^2+4x$이고 $f(1)=6$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 33

해 설

$f(x)=3x^3+2x^2+c$에서 $f(1)=6$을 적용하면 $c=1$이다.

따라서 $f(x)=3x^3+2x^2+1$을 만족하고,

$f(2)=24+8+1=33$이다.

10 2026학년도 6월 5번 정답률 97%

5. $\int_0^2 (6x^2-2x+1)dx$ 의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

정 답 ②

해 설

$\int_0^2 (6x^2-2x+1)dx = [2x^3-x^2+x]_0^2 = 16-4+2 = 14$

유형 03 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 함수의 정적분

01 2022학년도 6월 11번 정답률 51%

11. 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)dx$의 값은? [4점]

(가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0\le x\le 1) \end{cases}$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

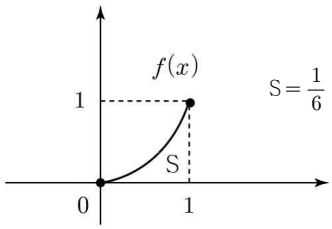
① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

정 답 ②

해 설

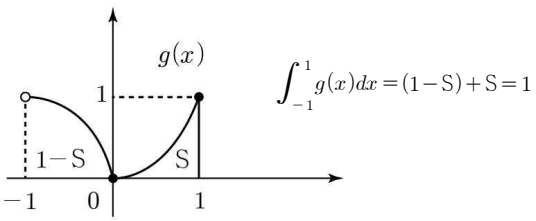
TIP
정적분(넓이) 관련 문제는 쉽게 이해할 수 있도록 그림을 대략적으로라도 그려서 접근하자.

$f(x)$에 대한 정보를 대략적으로 그래프 상에서 나타내면 다음과 같다.



STEP1 $-1\le x\le 1$에서 $g(x)$의 상황을 알아보자.
$-f(x+1)+1$ 식은 $f(x)$를
1. x축 방향으로 -1만큼 평행이동하고
2. x축에 대하여 대칭시킨 후
3. y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

위의 과정을 거쳐 $-1\le x\le 1$에서의 $g(x)$를 그리면 다음과 같다.



STEP2 $g(x)$의 주기성을 이용해 답을 구해보자.

$$\int_{-3}^{2} g(x)dx=\int_{-3}^{-1} g(x)dx+\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{1}^{2} g(x)dx$$
$$=1+1+\int_{-1}^{0} g(x)dx=2+(1-S)=3-S=\frac{17}{6}$$

유형 04 정적분의 응용

01 2022학년도 9월 14번 정답률 53%

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 p에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-f(0) & (x\le 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x>0) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $p=1$일 때, $g'(1)=0$이다.

ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다.

ㄷ. $p\ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)dx\ge 0$이다.

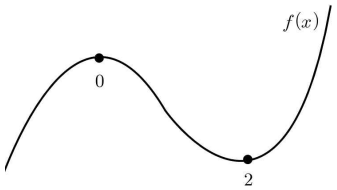
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정 답 ⑤

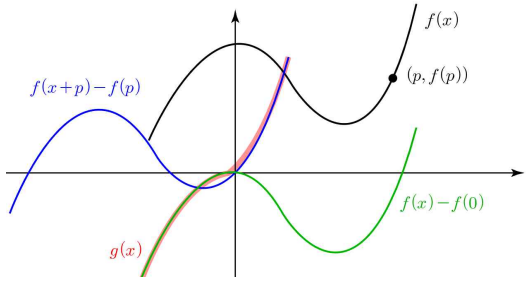
해 설

$f(x)$와 $g(x)$의 상황을 인식하자

$f'(0)=f'(2)=0$임을 이용해 삼차함수의 개형을 그리면 다음과 같다.



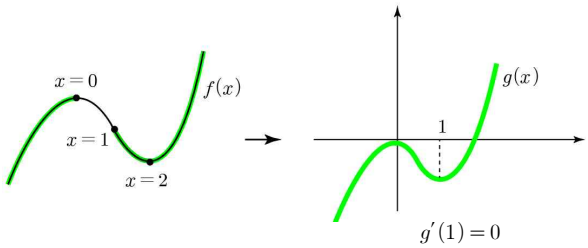
$f(x)$의 개형을 토대로 $g(x)$의 개형을 그려보자



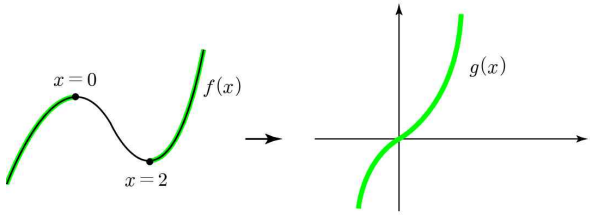
이를 해석해보면

- $x<0$의 상황을 보면 $(0,f(0))$에서 시작해 왼편의 $f(x)$를 $(0,0)$에서 시작하도록 잘라와서 붙인 것이다.
- $x<0$의 상황을 보면 $(p,f(p))$에서 시작해 오른편의 $f(x)$를 $(0,0)$에서 시작할 수 있도록 잘라와서 붙인 것이다.

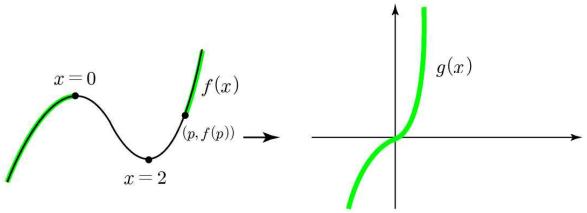
ㄱ. $f(x)$는 다음과 같고 표시한 부분을 $(0,0)$에서 이어지도록 붙이면 $p=1$ 상황의 $g(x)$이다.



ㄴ. $g(x)$의 $x=0$에서의 좌미분계수는 0으로 고정이므로 우미분계수도 0이기 위해서는 $p=2$일수 밖에 없다.



ㄷ. $p\ge 2$일 때 $g(x)$는 다음과 같다.



$x>0$에서 $g(x)$가 압도적으로 빨리 증가하므로

$\int_{-1}^{1} g(x)dx\ge 0$이다.

02 2022학년도 수능 20번 정답률 10%

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x)=x$이다.

(나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$이다.

$60\times\int_1^2 f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

정 답 110

해 설

TIP

특정 구간에서의 함수만 제시하고 다른 범위의 함수식을 물어본다면 주어진 구간을 치환해 구하고자 하는 구간으로 옮겨버리자!

STEP1 $1<x<2$에서의 $f(x)$식을 미분가능성을 이용해 조사

- $0\leqq x\leqq 1$에서 $f(x+1)=xf(x)+ax+b=x^2+ax+b$
- $x=0$을 대입하면 $f(1)=b=1$, $b=1$이다.
- 이 식을 미분하면 $f'(x+1)=2x+a$이다.
  $x=0$을 대입하면 $f'(1)=a=1$이다.
- 그러므로 $0\leqq x\leqq 1$에서 $f(x+1)=x^2+x+1$이다.

STEP2 $1\leqq x\leqq 2$에서의 $f(x)$식을 구한 후 적분 계산하자.

$(0\leqq x\leqq 1)$ $f(x+1)=x^2+x+1$

$x+1=t$로 치환하면

$(1\leqq t\leqq 2)$ $f(t)=(t-1)^2+(t-1)+1=t^2-t+1$

$\therefore$ $(1\leqq x\leqq 2)$ $f(x)=x^2-x+1$

$$\int_1^2 f(x)=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2=\frac{11}{6}$$

$$\therefore 60\times\frac{11}{6}=110$$

03 2023학년도 9월 14번 정답률 45%

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_t^{t+1} f(x)dx-\int_0^1 |f(x)|dx$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이다.

ㄴ. $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다.

ㄷ. $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이다.

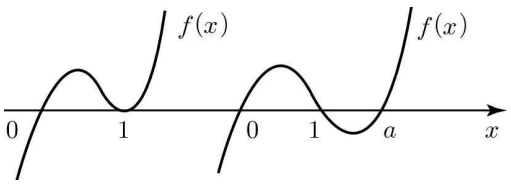
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정 답 ⑤

해 설

ㄱ. $g(0)=0 \rightarrow \int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 |f(t)|dt$

이를 만족하기 위해서 $(0,1)$에서 $f(x)$는 0이상이고 이를 만족하는 $f(x)$는 아래와 같은 경우 중 하나이다.

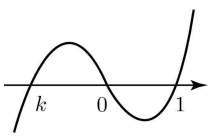


위 두 가지 경우 중 어떠한 경우라도 $g(-1)$은 (음수)-(양수)꼴이 되어 만족한다.

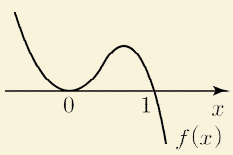
ㄴ. $g(-1)>0$은 다음을 의미한다.

$\int_{-1}^0 f(t)dt>\int_0^1 |f(t)|dt$

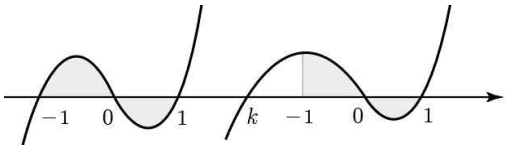
최고차항의 계수가 양수임을 유지하면서 위 조건을 만족시키기 위한 그래프의 개형은 아래밖에 없다.



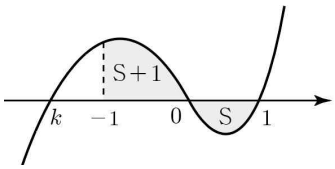
만약 최고차항의 계수가 음수였다면 이러한 개형도 가능했을 것이다.



삼차함수의 특성을 고려해보면 $k=-1$일 때 넓이는 동일해질 것이고 $k<-1$이 되는 순간 문제의 조건에 부합하는 상황이 연출된다.



ㄷ. $g(-1)=1$이 되는 $f(x)$의 그래프를 생각해보면 아래와 같다.



이 때를 만족하는 k값을 찾아보자.

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1 \{x^3-(k+1)x^2+kx\}dx=1$$

$$=-\frac{2}{3}(k+1)=1 \text{에서 } k=-\frac{5}{2}\text{이다.}$$

TIP

구간이 대칭인 정적분은 기함수들을 미리미리 0으로 보내버리자!

따라서 $g(-1)>1$의 의미는 $k<-\frac{5}{2}$임을 의미할 것이다.

$$g(0)=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 |f(x)|dx=2\int_0^1 f(x)dx$$

$$=2\int_0^1 \{x^3-(k+1)x^2+kx\}dx$$

$$=2[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(k+1)x^3+\frac{1}{2}kx^2]_0^2$$

$$=2(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}(k+1)+\frac{1}{2}k)=2(\frac{1}{6}k-\frac{1}{12})=\frac{1}{6}(2k-1)$$

$k<-\frac{5}{2}$였으므로 $\frac{1}{6}(2k-1)<-1$이다. (정답)

유형 05 정적분으로 정의된 함수의 미분

01 2022학년도 6월 20번 정답률 21%

20. 실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

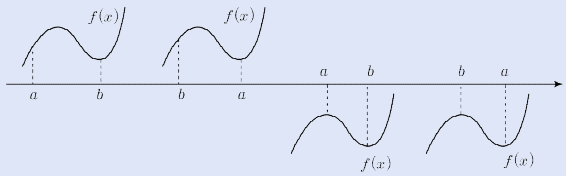
정 답 8

해 설

TIP
적분 기호 안에 문자가 여러개일 때는 적분할 문자가 무엇인지 확실히 체크하고 다른 변수는 상수취급한다

TIP 정적분의 부호를 결정하는 요소는 2가지다.
- 적분하고자 하는 대상의 부호
- 적분하는 방향 (x축방향을 + 라고 생각하자)

예시를 들면 다음과 같다.



$\int_a^b f(x)dx$: ⊕ $\int_a^b f(x)dx$: ⊖ $\int_a^b f(x)dx$: ⊖ $\int_a^b f(x)dx$: ⊕

STEP1 $g(x)$ 식을 변형하여 미분해보자.

$$g(x)=\int_a^x [f(x)\cdot\{f(t)\}^4[\{f(t)\}^5]dt$$

$$=f(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt-\int_a^x \{f(t)\}^5 dt$$

$$g'(x)=f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt+\{f(x)\}^5-\{f(x)\}^5$$

$$=f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$$

STEP2 $g(x)$가 오직 하나의 극값을 가지기 위해서 $g'(x)$식이 어떻게 돼야 하는지 알아보자.

$$g'(x)=f'(x)\underline{\int_a^x \{f(t)\}^4 dt}$$

이 식은 적분하고자 하는 대상이 네제곱이므로 항상 양수이다.
그러므로 양의 방향으로 적분을 하게 되면 항상 (+), 음의 방향으로 적분을 하게 되면 항상 (−)이다.
따라서 이 식은 $x=a$ 에서 부호가 한 번 바뀌는, "$(x-a)$ 인수를 1개 가지는" 상황이다.

STEP3 $f'(x)$의 상황을 파악해 a의 값들을 구하자.

$f'(x)=3x^2-24x+45=3(x-3)(x-5)$

그러므로 $g'(x)=f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$에는

$(x-3)(x-5)(x-a)$의 인수가 있다.

$g(x)$가 오직 하나의 극값을 가지기 위해서는 $g'(x)$의 부호가 한 번만 바뀌어야 한다. 따라서 $a=3, 5$ 중 하나이다.

$\therefore 3+5=8$

02 2023학년도 6월 14번 정답률 39%

14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & (x<0) \\ \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & (x\geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(0)=0$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정 답 ④

해 설

STEP1 $g(x)$를 미분해서 $f(x)$와의 연관성을 살펴보자

$g'(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<0)\\ f(x) & (x>0)\end{cases}$

$g(x)$는 삼차함수이므로 당연히 미분가능하다

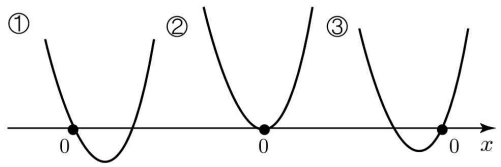
$\therefore -f(0)=f(0)$을 통해 $f(0)=0$이다. … ㉠

STEP2 $g'(x)$의 개형을 통해 $f(x)$의 개형을 추론해보자

• $g'(x)$: 최고차항의 계수가 3인 이차함수

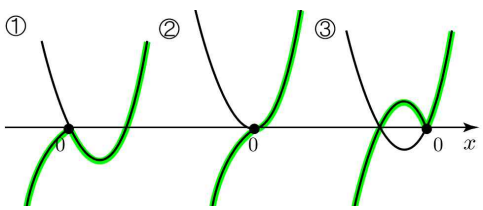
• $g'(0)=f(0)=0$

위 조건들을 종합해보면 $g'(x)$의 개형은 크게 3가지이다.



$g'(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<0)\\ f(x) & (x>0)\end{cases}$

이므로 $f(x)$의 개형을 각각의 $g(x)$일 때 추론해보면



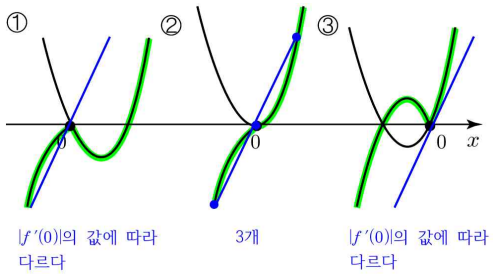
STEP3 ㄷ풀이

$g'(x)=3x(x-a)$

$g'(1)=f(1)=3(1-a)$

$2<f(1)<4 \rightarrow 2<3-3a<4 \rightarrow -\frac{1}{3}<a<\frac{1}{3}$ … ㉡

$f(x)=x$가 의미하는 바는 $f(x)$와 $y=x$가 만나는 점의 개수이다.



$|f'(0)|$의 값에 따라 다르다 | 3개 | $|f'(0)|$의 값에 따라 다르다

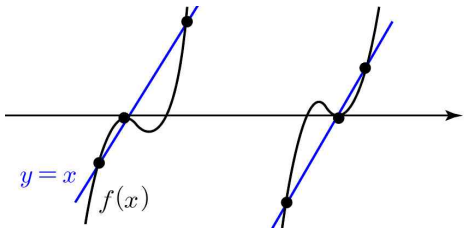
$g'(x)=f(x)=3x(x-a)$를 미분하면

$f'(x)=6x-3a$이다.

$f'(0)=-3a$

㉡을 이용하면 $\therefore -1<f'(0)<1$

따라서 ①, ③의 경우가 다음과 같아진다.



그러므로 ①, ②, ③ 모두에서 실근의 개수가 3이다.

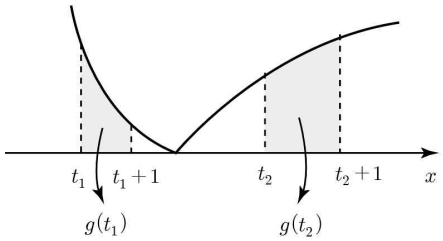
03 2023학년도 6월 20번 정답률 12%

20. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

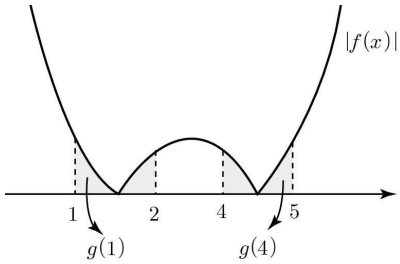
정 답 13

해 설

STEP1 $g(x)$는 간격을 1로 고정시켜놓고 이동해가며 넓이를 관찰하는 것임을 이해하자.



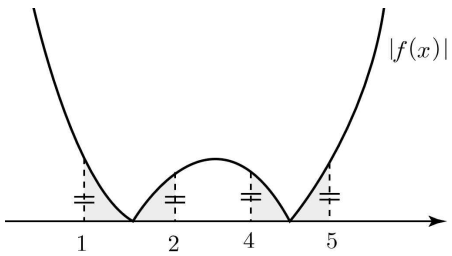
STEP2 $x=1, 4$에서 극소인 상황을 이해해보자.



어떠한 원리에 의해 이때가 가장 작은 순간인 것인지 정적분은 기본적으로 모든 y값들의 합이라는 것에 집중해서 생각해보자.

x가 진행하는 순간을 왼쪽에서는 넓이가 조금 사라진 것이고 오른쪽에서는 넓이가 조금 추가된 것이다.
- 사라진 넓이 > 추가된 넓이 => 전체 감소
- 사라진 넓이 < 추가된 넓이 => 전체 증가

즉, 사라진 넓이와 추가된 넓이가 같아 서로의 대소가 바뀌는 순간이 극소 혹은 극대인것이다. 따라서 $t=1, 2, 3, 4, 5$에서의 모든 함숫값은 동일하다



STEP3 이차함수의 대칭성을 이용해 계산을 마무리하자.
$f(x)$는 $x=3$에 대해서 대칭이므로 $f(x)=2(x-3)^2+p$
$f(1)+f(2)=0$ … 이것을 이용하면
$(8+p)+(2+p)=0$에서 $p=-5$이다.
$f(0)=18+p=13$이다.

04 2024학년도 6월 20번 정답률 12%

20. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오. [4점]

> $x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여
> $g(x)\geq g(4)$이고 $|g(x)|\geq |g(3)|$이다.

정 답 39

해 설

STEP1 부정적분 식에서는 대입과 미분을 해보자

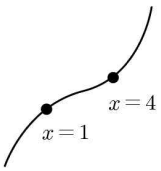
- $g(x)=\int_0^x f(t)dt$
- $g(0)=0,\ g'(x)=f(x)$

STEP2 문제의 조건이 의미하는 바를 해석하자.

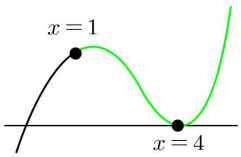
① $x.=1$에서 $g(x)\geq g(4)$

$g(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 3차 함수이므로 크게 2개의 모양이 있다.

CASE 1.
단조 증가의 개형에서는 조건을 만족할 수 없다.



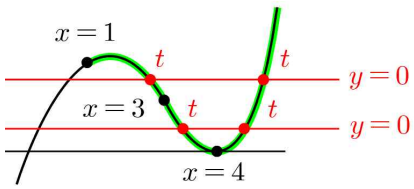
CASE 2.
극대 극소가 존재하는 개형에서는 다음과 같이 성립할 수 있다.
($x=1$에서의 함숫값은 $x=4$에서의 함숫값보다 작으면 X)



② $x\geq 1$에서 $|g(x)|\geq |g(3)|$

TIP 절댓값이 포함되어 있으므로 x축의 위치에 집중

$g(3)\neq 0$이라면 아래의 그림과 같이 $x\neq 3$인 순간에서 $|g(x)|$의 값이 0이 되는 $x=t$가 존재한다.
$g(3)\neq 0$이므로 $|g(t)|<|g(3)|$이다. ← 모순



따라서 $g(3)=0$이다.

STEP3 나온 조건을 종합해 $g(x)$의 식을 써보자.

$g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수이므로

$g(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x-k)$

$g'(x)=\frac{1}{3}\{(x-3)(x-k)+x(x-k)+x(x-3)\}$

$g'(4)=0$에서 $k=\frac{24}{5}$이다.

$f(9)=g'(9)=\frac{1}{3}(6\cdot\frac{21}{5}+9\cdot\frac{21}{5}+9\cdot 6)=39$

05 2025학년도 9월 15번 정답률 37%

15. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^x tf(t)dt + \int_{-1}^x tg(t)dt = 3x^4+8x^3-3x^2$

(나) $f(x) = xg'(x)$

$\int_0^3 g(x)dx$의 값은? [4점]

① 72 ② 76 ③ 80 ④ 84 ⑤ 88

정 답 ①

해 설

STEP1 (가) 식을 미분해보자.

$xf(x)+xg(x) = 12x^3+24x^2-6x$

$f(x)+g(x) = 12x^2+24x-6$

$f(x) = xg'(x)$ ((나) 조건)

$xg'(x)+g(x) = 12x^2+24x-6$

$\{xg(x)\}' = 12x^2+24x-6$

$xg(x) = 4x^3+12x^2-6x+C$

$x=0$을 대입하면 $0=C$이다.

따라서 $g(x) = 4x^2+12x-6$이다.

STEP2 적분 계산 마무리

$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (4x^2+12x-6)dx = [\frac{4}{3}x^3+6x^2-6x]_0^3 = 72$

06 2026학년도 9월 15번 정답률 42%

15. 최고차항의 계수가 양수이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x(|f(t)|-|t|)dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $g'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=2$, $x=6$에서 극값을 갖는다.

$f(6)\times g(2)<0$일 때, $f(8)$의 값은? [4점]

① 16 ② 22 ③ 28 ④ 34 ⑤ 40

정 답 ⑤

해 설

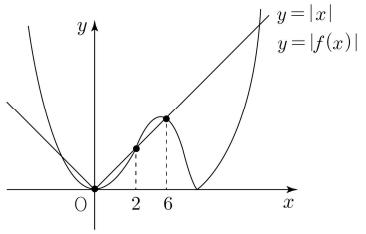
미분을 활용하여 조건을 찾은 뒤 조건을 따라가는 문항이다.
전형적인 개형 찾기 문항으로, 숨겨진 조건을 찾아내기 까다로워 난이도가 높은 문항이다.

STEP1 미분을 통해 (가), (나)조건 활용하기

(가)에서 $g'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
$g'(x)=|f(t)|-|t|$이다.
따라서, $|f(x)|=|x|$의 근의 개수가 4이다.
함수 $g(x)$가 극값을 가지려면, $g'(x)=0$이다.
따라서, $y=|f(x)|$와 $y=|x|$이 $x=2$, $x=6$에서 만난다.

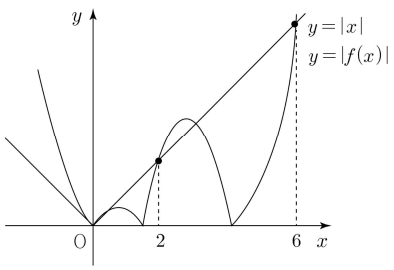
STEP2 그래프를 활용하여 함수 구하기

$f(6)\times g(2)<0$의 조건을 활용하여 그래프 개형을 확정하자.
$f(6)<0$이라면, 가능한 개형은 다음과 같다.



이 경우, $g(2)=\int_0^2(|f(t)|-|t|)dt<0$이므로 불가능하다.

$f(6)>0$이면 $g(2)<0$이므로 다음의 개형이 가능하다.



$x=2$와 $x=6$에서는 접점이 생기면 안되고, 교점이 4개이므로 $x=0$에서 $f'(0)=1$이어야 한다. (그래프를 그려보면서 가능한 케이스를 확인해보면 $f'(0)=1$만 가능하다.)
이 경우 $f(2)=-2$, $f(6)=6$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$이다.
$f(x)=ax^3+bx^2+x$로 두자.
$f(2)=8a+4b+2=-2$, $f(6)=216a+36b+6=6$이다.
연립하면, $a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{3}{2}$이다.
따라서, $f(8)=128-96+8=40$이다.

07 2026학년도 수능 15번 정답률 37%

15. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & (x<0) \\ x^2-x & (x\geq 0) \end{cases}$$

이고, 양수 a에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} ax+a & (x<-1) \\ 0 & (-1\leq x<1) \\ ax-a & (x\geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)=\int_0^x (g(t)-f(t))dt$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값을 k라 하자. $a=k$일 때, $k+h(3)$의 값은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

정 답 ②

해 설

구간별로 정의된 함수와 정적분에 관한 문항으로, 전형적으로 많이 연습했을 만한 유형이다.

극값에 대한 조건을 활용하여 각 구간에서 함수가 어떻게 나타나야 하는지를 조사하면 된다.

STEP1 $h(x)$가 극값을 갖기 위한 조건을 분석하기

$h(x)=\int_0^x (g(t)-f(t))dt$가 극값을 가지기 위한 조건을 보자.

$g(t)-f(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (모르겠으면 개념을 다시 읽어보세요!)

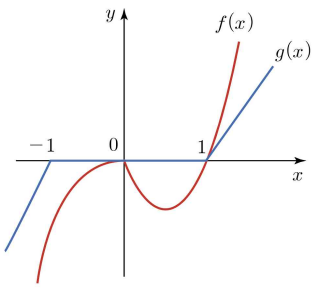
따라서, $h'(x)=g(x)-f(x)$이므로 $h(x)$가 극값을 가지려면 $g(x)=f(x)$이어야 한다.

$y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점에서 극값이 나옴을 알 수 있는데, 만약 두 곡선이 접하면 극값이 나오지 않는다. ($\because h'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로)

STEP2 위의 내용을 이용하여 a의 최댓값 찾기

극값이 1개가 되기 위한 a의 조건을 찾자. 극값은 두 곡선의 교점 중 접하는 것이 아닌 교차되는 점의 수를 세면 된다.

두 곡선을 함께 그려보면 아래와 같다.



$x<-1$에서 교점이 나오기 위한 조건은 $-x^2=ax+a$에서 교점이 나타나야 하므로 판별식인 $a^2-4a\geq 0$, $a\geq 4$이다.

따라서, $x<-1$에서는 $a>4$이면 극값이 2개 생기고, $a=4$일 때는 극값이 생기지 않고, $a<4$일 때도 극값이 생기지 않는다.

$x\geq 1$에서 교점이 나타나기 위한 조건은 a의 값이 $y=f(x)$의 $x=1$에서의 접선의 기울기보다 커야한다.

$f'(1)=1$이므로 $a>1$일 때 $x>1$에서 교점이 나타난다.

따라서, $x\geq 1$에서는 $a>1$일 때 극값이 1개 생기며, $a\leq 1$일 때도 극값이 1개 생긴다.

$-1\leq x<1$에서는 극값이 생길 수 없다.

종합해보면 극값의 수는 범위에 따라 다음과 같이 나타난다.

$a\leq 4$: 1개, $a>4$: 2개다.

따라서, $k=4$이다.

$$h(3)=\int_0^3 g(t)dt-\int_0^3 f(t)dt=\int_1^3 (3t-3)dt-\int_0^3 (t^2-t)dt$$

$=6-\frac{9}{2}=\frac{3}{2}$이다.

유형 06 정적분을 포함한 등식

01 2022학년도 9월 11번 정답률 66%

11. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)\,dt$$

를 만족시킨다. $f(1)=\int_0^1 f(t)\,dt$일 때, $a+f(3)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

정 답 ④

해 설

TIP 부정적분 식을 보면
1. 대입
2. 미분
위 2가지는 필수적으로 하자!

STEP1 $x=1$ 대입

$1\cdot f(1)=2+a+3a$

$\therefore f(1)=4a+2=\int_0^1 f(t)dt$ ($\because$ 조건)

STEP2 $x=0$ 대입 ($\because$ 조건에 $\int_0^1 f(t)dt$ 정보가 있으므로)

$3a-\int_0^1 f(t)dt=0$

$3a=\int_0^1 f(t)dt=4a+2$에서 $a=-2$이다.

STEP3 미분

$f(x)+xf'(x)=6x^2-4x+f(x)$

$xf'(x)=6x^2-4x$

$f'(x)=6x-4$

$f(x)=3x^2-4x+C$

$f(1)=-6$을 대입하면 $C=-5$이다.

(① 참조)

$f(x)=3x^2-4x-5$에서 $f(3)=27-12-5=10$이다.

$\therefore a+f(3)=(-2)+10=8$

02 2024학년도 9월 22번 정답률 11%

22. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^x f(t)\,dt = xf(x) - 2x^2 - 1$

(나) $f(x)G(x) + F(x)g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 1$

$\int_1^3 g(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

정 답 10

해 설

STEP1 (가) 조건 해석

· $x=1$을 대입

$0 = f(1) - 3$에서 $f(1) = 3$이다.

· 양변 미분

$f(x) = f(x) + xf'(x) - 4x$에서 $xf'(x) = 4x$이고, $f'(x) = 4$이다.

STEP2 (나) 조건 해석

· $f(x) = F'(x)$, $g(x) = G'(x)$를 이용하면

$f(x)G(x) + F(x)g(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$

$= \{F(x)G(x)\}'$을 만족한다.

따라서 $F(x)G(x) = 2x^4 + x^3 + x + C_1$이다.

· $f'(x) = 4$를 적분하면 $f(x) = 4x - 1$이다. ($f(1) = 3$ 이용)

다시 적분하면 $F(x) = 2x^2 - x + C_2$이다.

· $F(x)G(x) = 2x^4 + x^3 + x + C_1 = (2x^2 - x + C_2)G(x)$

$G(x)$는 이차식이며 계속 비교를 통해 상수항을 제외한 항들을 확정할 수 있다.

$\therefore G(x) = x^2 + x + C$ (단, C는 적분상수)

$\therefore \int_1^3 g(x)dx = G(3) - G(1) = (9+3+C) - (1+1+C) = 10$

03 2022학년도 6월 20번 정답률 21%

20. 실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

정 답 8

해 설

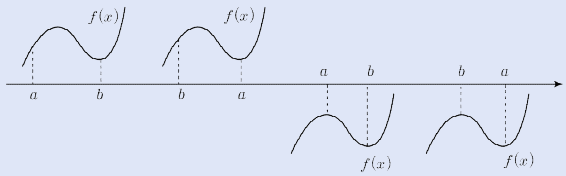
TIP

적분 기호 안에 문자가 여러개일 때는 적분할 문자가 무엇인지 확실히 체크하고 다른 변수는 상수취급한다

TIP 정적분의 부호를 결정하는 요소는 2가지다.

- 적분하고자 하는 대상의 부호
- 적분하는 방향 (x축방향을 + 라고 생각하자)

예시를 들면 다음과 같다.



$\int_a^b f(x)dx$: ⊕ $\int_a^b f(x)dx$: ⊖ $\int_a^b f(x)dx$: ⊖ $\int_a^b f(x)dx$: ⊕

STEP1 $g(x)$ 식을 변형하여 미분해보자.

$$g(x)=\int_a^x [f(x)\cdot\{f(t)\}^4[\{f(t)\}^5]dt$$

$$=f(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt-\int_a^x \{f(t)\}^5 dt$$

$$g'(x)=f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt+\{f(x)\}^5-\{f(x)\}^5$$

$$=f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$$

STEP2 $g(x)$가 오직 하나의 극값을 가지기 위해서 $g'(x)$식이 어떻게 돼야 하는지 알아보자.

$$g'(x)=f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$$

이 식은 적분하고자 하는 대상이 네제곱이므로 항상 양수이다. 그러므로 양의 방향으로 적분을 하게 되면 항상 (+), 음의 방향으로 적분을 하게 되면 항상 (−)이다.
따라서 이 식은 $x=a$ 에서 부호가 한 번 바뀌는, "$(x-a)$ 인수를 1개 가지는" 상황이다.

STEP3 $f'(x)$의 상황을 파악해 a의 값들을 구하자.

$f'(x)=3x^2-24x+45=3(x-3)(x-5)$

그러므로 $g'(x)=f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$에는

$(x-3)(x-5)(x-a)$의 인수가 있다.

$g(x)$가 오직 하나의 극값을 가지기 위해서는 $g'(x)$의 부호가 한 번만 바뀌어야 한다. 따라서 $a=3, 5$ 중 하나이다.

$\therefore 3+5=8$

04 2026학년도 6월 9번 정답률 93%

9. 함수 $f(x)=x^2+ax$에 대하여

$$\int_{-3}^{3}(x+1)f(x)\,dx=36+\int_{-3}^{3}f(x)\,dx$$

일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ②

해 설

$\int_{-3}^{3}(x+1)f(x)dx=\int_{-3}^{3}xf(x)dx+\int_{-3}^{3}f(x)dx$이다.

$\int_{-3}^{3}(x+1)f(x)dx=\int_{-3}^{3}f(x)dx+36$ 이므로,

$\int_{-3}^{3}xf(x)dx=36$이다.

$\int_{-3}^{3}xf(x)dx=\int_{-3}^{3}x^3+ax^2dx$

$=[\frac{x^4}{4}+\frac{a}{3}x^3]_{-3}^{3}=18a=36$

따라서, $a=2$이다.

유형 07 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이

01 2024학년도 6월 10번 정답률 61%

10. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

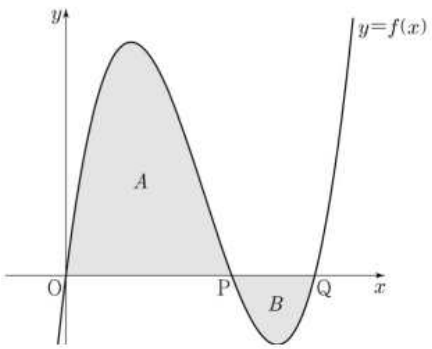
$$f(x)=kx(x-2)(x-3)$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 원점 O와 두 점 P, Q($\overline{OP}<\overline{OQ}$)에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

$$(A\text{의 넓이})-(B\text{의 넓이})=3$$

일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



정 답 ②

해 설

$A-B$의 넓이를 적분으로 이해하자.

$$A-B=\int_0^3 f(x)dx$$

$$=\int_0^3 kx(x-2)(x-3)dx$$

$$=\int_0^3 (kx^3-5kx^2+6kx)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}kx^4-\frac{5}{3}kx^3+3kx^2\right]_0^3=\frac{81}{4}k-45k+27k$$

$$=\frac{9}{4}k=3\text{에서 } k=\frac{4}{3}\text{이다.}$$

02 2024학년도 수능 12번 정답률 60%

12. 함수 $f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$와 실수 $t\,(0<t<6)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ -(x-t)+f(t) & (x\geq t) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은? [4점]

① $\frac{125}{4}$ ② $\frac{127}{4}$ ③ $\frac{129}{4}$ ④ $\frac{131}{4}$ ⑤ $\frac{133}{4}$

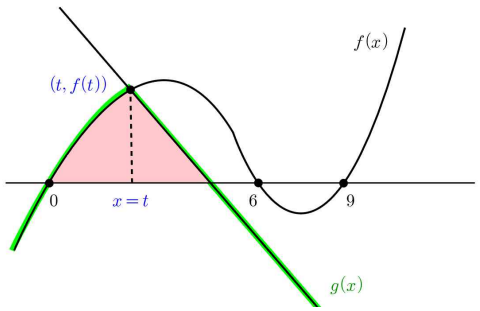
정 답 ③

해 설

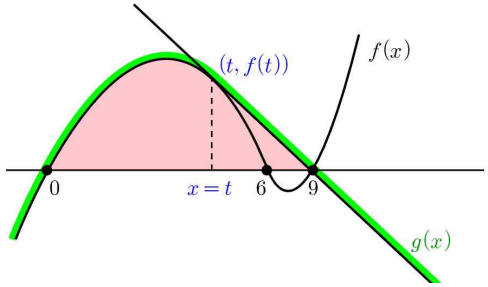
STEP1 $g(x)$에 대해 이해해보자.

1. $-(x-t)+f(t)$: 기울기가 -1
2. $(t, f(t))$를 지나는 직선의 방정식

상황을 관찰하기 위해 $g(x)$ 위의 임의의 점 $(t, f(t))$를 잡아보면 다음과 같다.



위 그림에서 문제에서 물어본 영역의 넓이는 빨간 부분이다. 해당 영역이 가장 넓어지기 위해서는 아래와 같이 $f(x)$와 직선이 접하는 순간이다.



STEP2 접선의 기울기가 -1이 되는 x값을 구해 계산을 마무리하자.

$f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)=\frac{1}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+6x$

$f'(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{10}{3}x+6$

$f'(x)=-1$에서 $\frac{1}{3}x^2-\frac{10}{3}x+6=-1$이고,

$x^2-10x+21=(x-3)(x-7)=0$에서 $x=3$이다.

(앞의 상황에서 살펴보면 접점의 x좌표는 6보다 작다.)

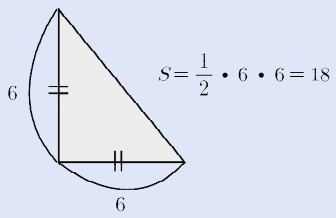
$f(3)=\frac{1}{9}\cdot 3\cdot(-3)\cdot(-6)=6$이므로

직선의 방정식은 $y=-(x-3)+6=-x+9$이다.

$\therefore$ 넓이$=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^9(-x+9)dx=\frac{57}{4}+18=\frac{129}{4}$이다.

TIP

직선의 적분값은 기울기가 -1임을 이용해 삼각형의 넓이로 인식해서 계산하면 편하다.



유형 08 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이

01 2022학년도 6월 6번 정답률 79%

6. 곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ④

해 설

교점은 $3x^2-x=5x$, $3x^2-6x=0$에서 $x=0, 2$이다.

$$\int_0^2 \{5x-(3x^2-x)\}dx=\int_0^2 (6x-3x^2)dx$$

$$=\frac{3}{6}\cdot(2-0)^3=4$$

02 2022학년도 수능 8번 정답률 61%

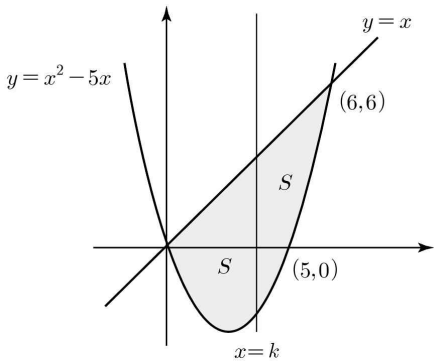
8. 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

정 답 ①

해 설

문제의 상황을 그래프에 표현해보자.



$2S$의 넓이는 다음과 같다.

$$\int_0^6 \{x-(x^2-5x)\}dx=\int_0^6 (6x-x^2)dx$$

$$=\frac{1}{6}(6-0)^3=36 \text{ (이차함수 적분 넓이공식을 이용함)}$$

따라서 S의 넓이는 18이어야 한다.

$$\int_0^k \{x-(x^2-5x)\}dx$$

$$=\int_0^k (6x-x^2)dx=[3x^2-\frac{1}{3}x^3]_0^k=3k^2-\frac{1}{3}k^3=18$$

$$-\frac{1}{3}k^3+3k^2=18 \text{에서 } k=3\text{이다.}$$

03 2023학년도 9월 20번 정답률 25%

20. 상수 $k(k<0)$에 대하여 두 함수

$$f(x)=x^3+x^2-x,\quad g(x)=4|x|+k$$

의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때,
두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자.
$30\times S$의 값을 구하시오. [4점]

정 답 80

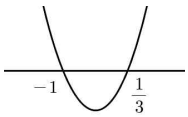
해 설

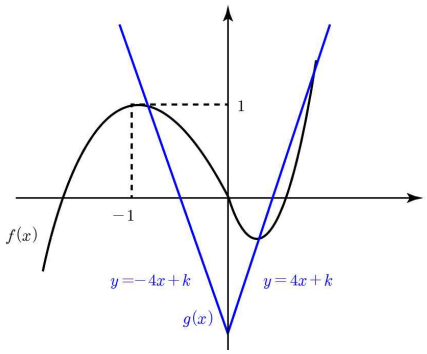
문제의 상황을 그림으로 대략적으로 표현해보자.

$f(x)=x^3+x^2-x$

$f'(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$

$x=-1$에서 극대, $x=\frac{1}{3}$에서 극소이다.





위와 같은 상황이면 총 3개의 교점이 생긴다.

2개의 교점만 있기 위해서는 $x>0$에서 $f(x)$와 $g(x)$가 한 점에서 만나 접해야 한다. 그 때의 k값을 구해보자.

$f'(x)=3x^2+2x-1$

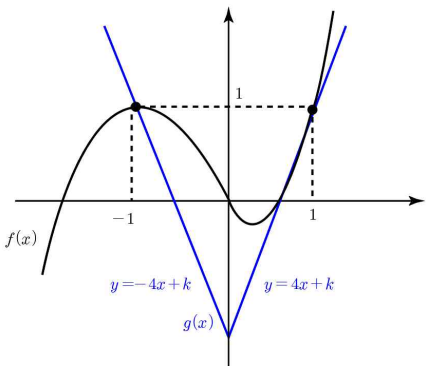
$3x^2+2x-1=4,\ 3x^2+2x-5=(3x+5)(x-1)=0$

따라서 접점의 x좌표는 1이다.

$f(1)=1$이므로 $y=4x+k$ 또한 $(1,1)$을 지나야 한다.

$4+k=1$에서 $k=-3$이다.

계산을 통해 구한 상황을 그래프로 표현하면 다음과 같다.



$$S=\int_{-1}^{0}\{(x^3+x^2-x)-(-4x-3)\}dx$$
$$+\int_{0}^{1}\{(x^3+x^2-x)-(4x-3)\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x+3x\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{8}{3}$$

따라서 $30\times S=\frac{8}{3}\cdot 30=80$이다.

04 2026학년도 수능 13번 정답률 54%

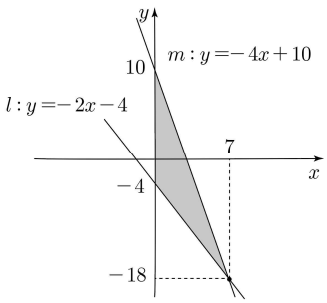
13. 함수 $f(x)=x^2-4x-3$에 대하여
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,-6)$에서의 접선을 l이라 하고,
함수 $g(x)=(x^3-2x)f(x)$에 대하여
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,6)$에서의 접선을 m이라 하자.
두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]

① 21 ② 28 ③ 35 ④ 42 ⑤ 49

정 답 ⑤

해 설

접선 l은 $y=f(x)$의 $(1,-6)$에서의 접선이므로
$l: y=f'(1)(x-1)-6$이다.
$f'(x)=2x-4$이므로 $l: y=-2(x-1)-6$이다.
접선 m은 $y=g(x)$의 $(1,6)$에서의 접선이므로
$m: y=g'(1)(x-1)+6$이다.
$g'(x)=(3x^2-2)f(x)+(x^3-2x)f'(x)$이므로
$g'(1)=f(1)-f'(1)=-4$이다.
따라서 $m: y=-4(x-1)+6$이다.
두 직선의 그래프를 그리면 아래와 같다.



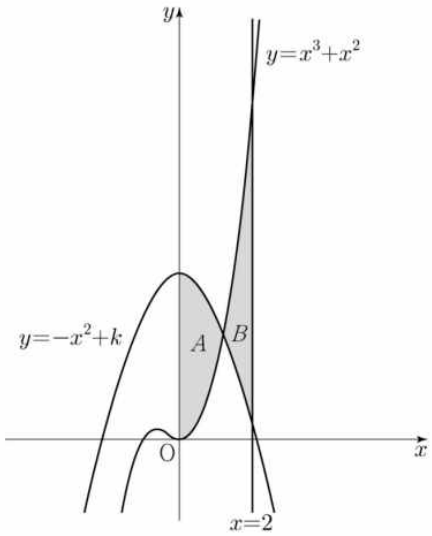
두 직선의 교점은 $(7,-18)$이고, l, m의 y절편은 각각 $(0,-4)$, $(0,10)$이다.
따라서, 두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는 49이다.

유형 09 곡선과 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이

01 2023학년도 수능 10번 정답률 63%

10. 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=B$일 때, 상수 k의 값은? (단, $4<k<5$) [4점]

① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$



정 답 ④

해 설

$f(x)=x^3+x^2$, $g(x)=-x^2+k$라고 하면

"A = B"의 의미는 $\int_0^2\{f(x)-g(x)\}dx=0$임을 의미한다.

$$\int_0^2\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^2(x^3+2x^2-k)dx$$

$$=[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-kx]_0^2$$

$$=4+\frac{16}{3}-2k=\frac{28}{3}-2k=0\text{에서 } k=\frac{14}{3}\text{이다.}$$

02 2024학년도 9월 19번 정답률 69%

19. 두 곡선 $y=3x^3-7x^2$과 $y=-x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]

정 답 4

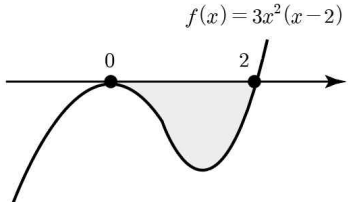
해 설

두 곡선을 연립해서 새로운 함수로 인식한 후 적분한다.

$3x^3-7x^2=-x^2$, $3x^3-6x^2=0$

편의상 $f(x)=3x^3-6x^2$라고 가정하자.

$f(x)$의 개형은 다음과 같고, 구하고자 하는 넓이는 표시된 부분과 같다.



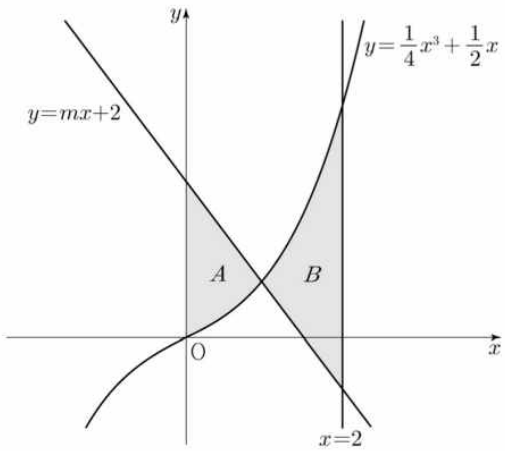
$$\int_0^2(3x^3-6x^2)dx=[\frac{3}{4}x^4-2x^3]_0^2=12-16=-4$$

적분하고자 하는 함수가 음수였고 양의 방향으로 적분했으니 적분값은 음수가 나오는 것이 맞다.
그러나 넓이는 음수가 될 수 없기에 절댓값을 씌우자!!

03 2025학년도 6월 13번 정답률 39%

13. 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 직선 $y=mx+2$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 두 직선 $y=mx+2$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $B-A=\frac{2}{3}$일 때, 상수 m의 값은? (단, $m<-1$) [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{17}{12}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{5}{4}$ ⑤ $-\frac{7}{6}$



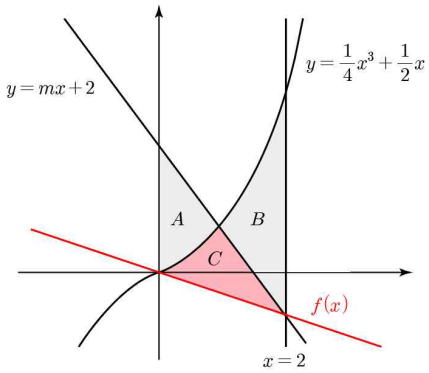
정 답 ③

해 설

TIP

이 문제는 곡선과 직선의 교점을 구하는 것에 집중하는 순간 너무도 복잡한 길을 걷게 된다. 직접 구하기 힘들어 보이는 정적분의 넓이는 주변 넓이를 잘 활용해보자

STEP1 주변의 넓이를 이용해 넓이를 쉽게 나타내보자.



$B-A=(B+C)-(A+C)$

$=\int_0^2\{\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x-f(x)\}fx-\int_0^2\{mx+2-f(x)\}dx$

STEP2 적분 계산 마무리

$\int_0^2(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x-mx-2)dx$

$=[\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}mx^2-2x]_0^2$

$=1+1-2m-4=\frac{2}{3}$ → $m=-\frac{4}{3}$이다.

04 2025학년도 9월 13번 정답률 58%

13. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-2x+6 & (x<0) \\ -x^2+2x+6 & (x\geq 0) \end{cases}$$

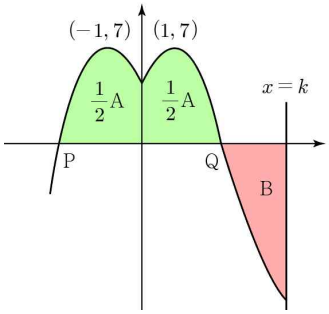
의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점을 P, Q라 하고, 상수 $k(k>4)$에 대하여 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 R이라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=k$ 및 선분 QR로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=2B$일 때, k의 값은? (단, 점 P의 x좌표는 음수이다.) [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

정 답 ④

해 설

문제의 상황을 좌표평면에 나타내자.



$f(x)$는 우함수이므로

$x<0$, $x>0$의 부분의 정적분 넓이가 $\frac{1}{2}A$로 서로 같다.

$A=2B \rightarrow \frac{1}{2}A-B=0$

$$\int_0^k f(x)dx=\int_0^k(-x^2+2x+6)dx$$

$$=[-\frac{1}{3}x^3+x^2+6x]_0^k=-\frac{1}{3}k^3+k^2+6k$$

$$=-\frac{1}{3}k(k+3)(k-6)=0$$

따라서 $k=6$이다. (k는 양수)

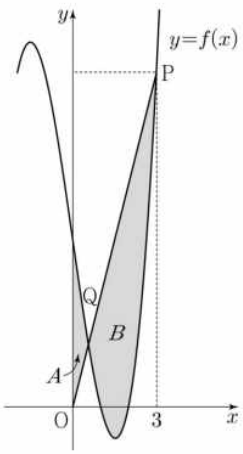
05 2025학년도 수능 13번 정답률 51%

13. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$f(1)=f(2)=0,\quad f'(0)=-7$$

을 만족시킨다. 원점 O와 점 $\mathrm{P}(3, f(3))$에 대하여 선분 OP가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 선분 OQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 할 때, $B-A$의 값은? [4점]

① $\frac{37}{4}$ ② $\frac{39}{4}$ ③ $\frac{41}{4}$ ④ $\frac{43}{4}$ ⑤ $\frac{45}{4}$



정 답 ⑤

해 설

STEP1 $f(x)$의 식을 구하자.

- $f(1)=f(2)=0$을 이용하면
  $f(x)=(x-1)(x-2)(x-k)$
- $f'(0)=7$을 이용하면
  $f'(x)=(x-2)(x-k)+(x-1)(x-k)+(x-1)(x-2)$
  $f'(0)=2k+k+2=3k+2=-7$에서 $k=-3$이다.
- 따라서 $f(x)=(x+3)(x-1)(x-2)$이다.
- P의 좌표는 $(3,12)$이고,
  직선 OP 직선의 방정식은 $y=4x$이다.

STEP2 $B-A$가 의미하는 바를 알아보자.

직선 OP를 $g(x)$라 하고
$y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표를 k라 하면

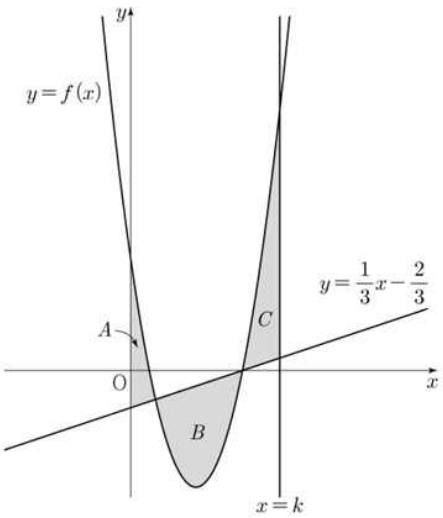
- $A=\int_0^k\{f(x)-g(x)\}dx$
- $B=\int_k^3\{g(x)-f(x)\}dx$
- $B-A=\int_k^3\{g(x)-f(x)\}dx-\int_0^k\{f(x)-g(x)\}dx$
  $=\int_0^3 g(x)dx-\int_0^3 f(x)dx$
  $=\int_0^3\{g(x)-f(x)\,dx$
- $\int_0^3\{g(x)-f(x)\}dx=\int_0^3\{4x-(x+3)(x-1)(x-2)\}dx$
  $=\int_0^3(-x^3+11x-6)dx=\frac{45}{4}$

06 2026학년도 6월 13번 정답률 93%

13. 그림과 같이 함수 $f(x)=3x^2-7x+2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$ 및 y축으로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$로 둘러싸인 영역을 B, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$, $x=k(k>2)$로 둘러싸인 영역을 C라 하자.

$$(A\text{의 넓이})+(C\text{의 넓이})=(B\text{의 넓이})$$

일 때, 상수 k의 값은? [4점]



① $\frac{29}{12}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{31}{12}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

정 답 ④

해 설

정적분과 도형의 넓이 문항에서 가장 대표적으로 출제되는 유형이다. 도형의 넓이로 제시된 조건을 정적분으로 연관지으면 문항의 풀이 방법이 보인다.

$(A\text{의 넓이})+(C\text{의 넓이})=(B\text{의 넓이})$이므로

$\int_0^k f(x)-(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3})dx=0$이다.

$f(x)=3x^2-7x+2$이므로 $\int_0^k 3x^2-\frac{22}{3}x+\frac{8}{3}dx=0$이다.

$\int_0^k 3x^2-\frac{22}{3}x+\frac{8}{3}dx=[x^3-\frac{11}{3}x^2+\frac{8}{3}x]_0^k=k^3-\frac{11}{3}k^2+\frac{8}{3}k$

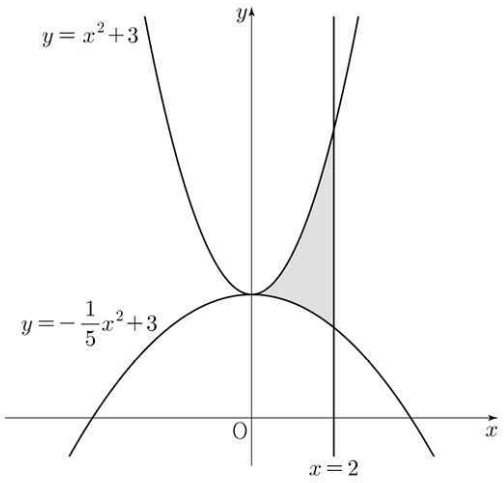
$k^3-\frac{11}{3}k^2+\frac{8}{3}k=k(k-\frac{8}{3})(k-1)=0$이므로

$k=\frac{8}{3}$이다.($\because k>2$)

07 2026학년도 수능 7번 정답률 89%

7. 두 곡선 $y=x^2+3$, $y=-\frac{1}{5}x^2+3$과 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{18}{5}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{17}{5}$ ④ $\frac{33}{10}$ ⑤ $\frac{16}{5}$



정 답 ⑤

해 설

둘러싸인 부분의 넓이를 정적분을 통해 구하자.

색칠된 부분의 넓이는 아래와 같다.

$\int_0^2 (x^2+3)-(-\frac{1}{5}x^2+3)dx=\int_0^2 \frac{6}{5}x^2dx=[\frac{2}{5}x^3]_0^2=\frac{16}{5}$이다.

유형 10 정적분과 넓이의 관계

01 2023학년도 수능 12번 정답률 36%

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $n-1 \le x < n$일 때, $|f(x)| = |6(x-n+1)(x-n)|$이다.
> (단, n은 자연수이다.)

열린구간 $(0, 4)$에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \int_x^4 f(t)\,dt$$

가 $x=2$에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)\,dx$의 값은? [4점]

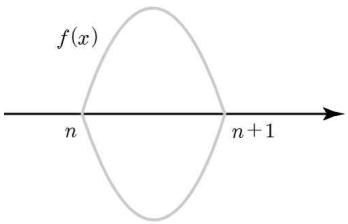
① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

정 답 ②

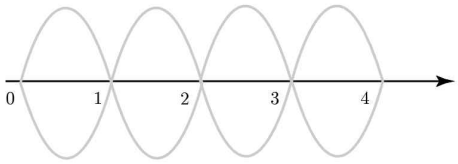
해 설

STEP1 $0 < x < 4$에서의 $f(x)$의 상황을 파악해보자.

- $(n-1 \le x < n)$ $f(x) = \pm 6(x-n+1)(x-n)$
- 이를 통해 $n < x < n+1$에서 $f(x)$의 후보군을 그래프로 그려보면 다음과 같다.



- 구간 $(0,4)$에서의 $f(x)$는 다음과 같을 것이다.



STEP2 $g(x)$의 정보를 이용해 $f(x)$를 확정해보자.

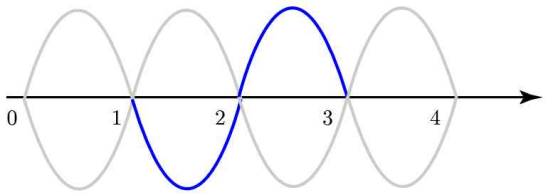
$g(x)$가 $x=2$에서 최소이므로 $g'(2)=0$이다.

$g'(x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$

따라서 $f(2)=0$이다.

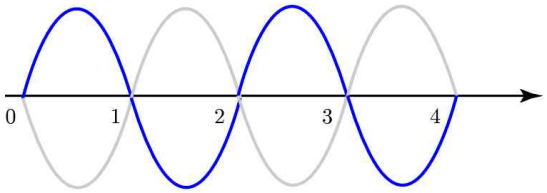
극소이므로 도함수의 값은 음에서 양으로 뚫는 0이어야 한다.

위의 정보를 바탕으로 $1 < x < 3$에서의 $f(x)$는 아래와 같이 확정할 수 있다.

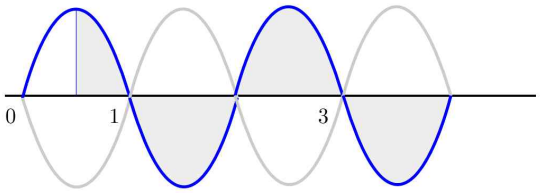


$g(2)=0$이라는 정보는 $0 < x < 2$의 $f(x)$ 적분값과 $2 < x < 4$의 $f(x)$ 적분값이 같음을 의미한다.

이를 통해 $f(x)$를 완전히 확정하면 아래와 같다.



STEP3 마지막 계산을 마무리하자.

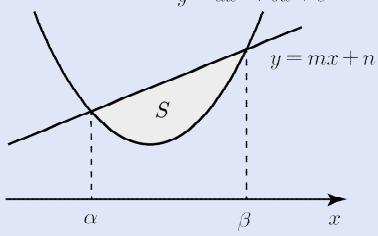


표시된 부분의 넓이의 합은 $-\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt$와 같다.

이차함수의 넓이 공식을 이용해 마무리하면

TIP 이차함수의 넓이 공식

$S = \frac{|\alpha|(\beta-\alpha)^3}{6}$



면적은 $-\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{6} \cdot (1-0)^3 = -\frac{1}{2}$이다.

02 2025학년도 6월 15번 정답률 44%

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 $k(k \geq 0)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} 2x-k & (x \leq k) \\ f(x) & (x>k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여
> $\int_0^x g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}\,dt \geq 0$이고
> $\int_3^x g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}\,dt \geq 0$이다.

$g(k+1)$의 최솟값은? [4점]

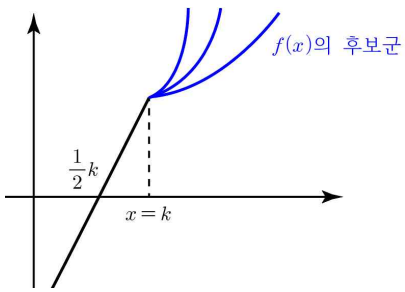
① $4-\sqrt{6}$ ② $5-\sqrt{6}$ ③ $6-\sqrt{6}$
④ $7-\sqrt{6}$ ⑤ $8-\sqrt{6}$

정 답 ②

해 설

STEP1 $g(x)$

$g(x)$의 상황을 파악하고 구하고자 하는 바를 확인해보자.
문제의 조건을 만족하도록 $g(x)$를 그려보면 다음과 같다.

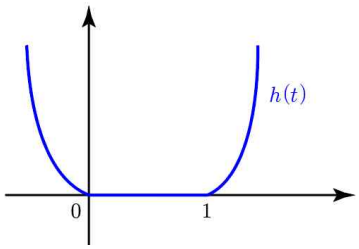


구하고 자 하는 것은 $g(k+1)=f(k+1)$이다.
$f(k+1)$이 이 최소이기 위해서는 그나마 가장 덜 증가하는 함수이어야 할 것이고 $f(x)$의 후보군들 중 "$f'(x)$의 판별식 D가 0인 순간, 즉 $f(x)$의 미분계수가 0인 순간이 존재할 때"이다.

STEP2 (나) 조건을 파악해보자.

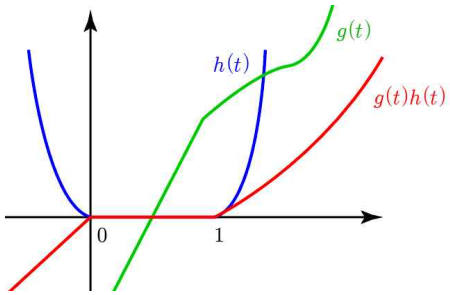
① $\int_0^x g(t)\cdot\{|t(t-1)|+t(t-1)\}dt \geq 0$

편의상 $h(t)=|t(t-1)|+t(t-1)$라고 하자.
그러면 $h(t)$의 그래프는 다음과 같다.



적분값이 0 이상이기 위해서는 적분은 $x=0$에서 시작하므로
· 양의 방향 적분이라면 $g(t)h(t)$의 값이 0 이상
· 음의 방향 적분이라면 $g(t)h(t)$의 값이 0 이하
위와 같은 상황이어야 한다.

이를 고려해 $h(t)$ 그래프에 $g(t)$를 겹쳐 그리면 아래와 같다.



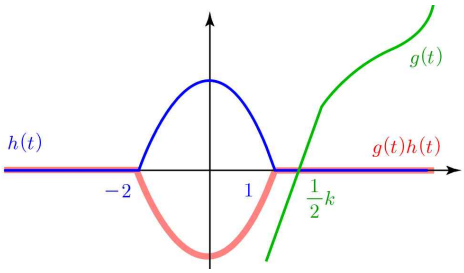
즉, $\frac{1}{2}k$ 값은 1보다 작거나 같아야 한다.

(만약 크다면 $1<x<\frac{1}{2}k$ 범위에서 $g(t)h(t)$의 값이 음수가 나와 적분값이 음수가 나온다.)

② $\int_3^x g(t)\cdot\{1(t-1)(t+2)-(t-1)(t+2)\} \geq 0$

$h(t)$라고 하자.

앞의 경우와 같은 논리를 이용하면 그래프는 아래와 같다.



즉, $\frac{1}{2}k$값은 1보다 크거나 같아야 한다.

따라서 $\frac{1}{2}k=1$에서 $k=2$이다.

STEP3 $f(x)$의 식을 구하고 $g(k+1)$의 최솟값을 구하자.
$f(x)$을 **STEP1** 과정을 상기하며 인수정리를 통해 작성하면
$f(x)-(2x-2)=(x-2)^2(x-a)$이고, 이 식을 미분하면
$f'(x)=3x^2-(2a+8)x+4a+6$이다.

STEP1 에서 $f'(x)$의 판별식 $D=0$임을 알아냈었다.
따라서 $\frac{D}{4}$: $(a+4)^2-3(4a+6)=a^2-4a-2=0$에서
$a=2\pm\sqrt{6}$이다.
$g(3)=f(3)=7-a=7-(2+\sqrt{6})=5-\sqrt{6}$이다.
(a가 커야 전체적으로는 작아진다.)

유형 11 위치와 위치 변화량

01 2022학년도 6월 19번 정답률 57%

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k$$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

정 답 6

해 설

STEP1 k의 값을 구하보자.

점 P의 $t=0$에서 $t=1$까지의 위치 변화량은 -3이다.

$$\int_0^1 v(t)dt = \int_0^1 (3t^2 - 4t + k)dt = [t^3 - 2t^2 + kt]_0^1 = 1 - 2 + k = -3$$

에서 $k=-2$이다.

STEP2 $t=1$에서 $t=3$까지의 위치 변화량을 구하자.

$$\int_1^3 v(t)dt = \int_1^3 (3t^2 - 4t - 2)dt = [t^3 - 2t^2 - 2t]_1^3 = 6$$

02 2023학년도 9월 10번 정답률 67%

10. 수직선 위의 점 A(6)과 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 이 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 점 P의 속도 $v(t)$를

$$v(t) = 3t^2 + at \quad (a > 0)$$

이라 하자. 시각 $t=2$에서 점 P와 점 A 사이의 거리가 10일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ④

해 설

$t=2$에서 점 P가 존재할 수 있는 좌표를 알아보자.
$t=2$에서 점 A(6)과 점 P 사이의 거리가 10이므로
점 P의 좌표는 (-4), (16)중 하나이다.
그렇다면 각각의 경우에서 점 P의 위치의 변화량(변위)는
각각 -4, 16일 것이다.
위치의 변화량은 속도의 적분값이므로 계산해보자.

CASE 1. $t=2$에서 P(-4)일 때

$$\int_0^2 v(t)dt = \int_0^2 (3t^2 + at)dt = [t^3 + \frac{1}{2}at^2]_0^2 = 8 + 2a = -4$$

따라서 $a=-6$이다. (a는 양수이므로 모순이다.)

CASE 2. $t=2$에서 P(16)일 때

$$\int_0^2 v(t)dt = \int_0^2 (3t^2 + at)dt = [t^3 + \frac{1}{2}at^2]_0^2 = 8 + 2a = 16$$

에서 $a=4$이다.

03 2024학년도 6월 14번 정답률 42%

14. 실수 $a\,(a \geq 0)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$를

$$v(t) = -t(t-1)(t-a)(t-2a)$$

라 하자. 점 P가 시각 $t=0$일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

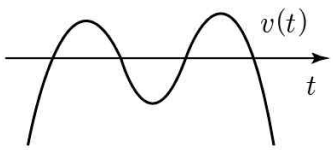
정 답 ③

해 설

운동 방향의 변화가 의미하는 바를 알아보자.

운동 방향이 바뀐다. = 속도의 부호가 변화한다.

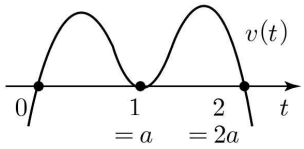
$v(t)$의 실근이 모두 다르다고 생각하고 $v(t)$의 그래프를 대략적으로 그리면 다음과 같다.



$v(t)$의 그래프가 위와 같으면 부호의 변화가 3번 있으므로 운동 방향을 3번 바꾼 것이다.

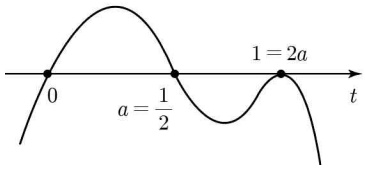
이를 통해 조건을 만족하도록 $v(t)$의 그래프를 생각하면 아래의 경우들과 같다.

CASE1 $a=1 \rightarrow v(t) = -t(t-1)^2(t-2)$

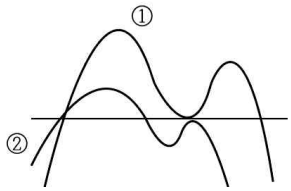


$$\int_0^2 v(t)dt = -\int_0^2 t(t-1)^2(t-2)dt = \frac{4}{15}$$

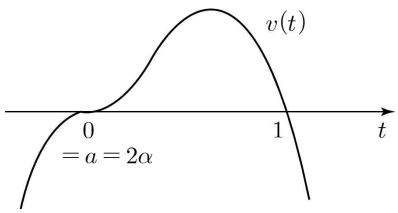
CASE2 $a=\frac{1}{2} \rightarrow v(t) = -t(t-\frac{1}{2})(t-1)^2$



CASE2과 비교해서 생각해보면 $\frac{4}{15}$보다 무조건 작다.



CASE3 $a=0 \rightarrow v(t) = -t^3(t-1)$



$$\int_0^2 v(t)dt = -\int_0^2 t^3(t-1)dt = -\frac{12}{5}$$

∴ 최댓값 = a가 1일 때 $\frac{4}{15}$

04 2026학년도 수능 11번 정답률 54%

11. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 실수 k에 대하여 시각이 $t\,(t\geq 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=t^2-kt+4$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $k=0$이면, 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 $\frac{13}{3}$이다.

ㄴ. $k=3$이면, 출발한 후 점 P의 운동 방향이 한 번 바뀐다.

ㄷ. $k=5$이면, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 3이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정 답 ③

해 설

ㄱ. $k=0$이면, $v(t)=t^2+4$이고, $t=1$일 때 점 P의 위치는

$$\int_0^1 v(t)dt=\int_0^1 t^2+4dt=[\frac{t^2}{3}+4t]_0^1=\frac{13}{3}$$

이다. (O)

ㄴ. $k=3$이면, $v(t)=t^2-3t+4$이다.

운동 방향이 바뀌는 시점은 $v(t)$의 부호가 바뀔 때이다.

$v(t)=t^2-3t+4$의 판별식이 0보다 작으므로 $v(t)=0$의 근이 존재하지 않는다. (X)

ㄷ. $k=5$이면, $v(t)=t^2-5t+4$이다.

$t=0$부터 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^2|v(t)|dt$이다.

$v(t)=(t-1)(t-4)$이므로 $t=1$일 때 운동 방향이 바뀐다.

$$\int_0^2|v(t)|dt=\int_0^1(t-1)(t-4)dt-\int_1^2(t-1)(t-4)dt$$

$$=[\frac{t^3}{3}-\frac{5}{2}t^2+4t]_0^1-[\frac{t^3}{3}-\frac{5}{2}t^2+4t]_1^2=3$$

따라서, 움직인 거리는 3이다. (O)

유형 12 속도와 가속도

01 2022학년도 9월 9번 정답률 84%

9. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=-4t^3+12t^2$$

이다. 시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 12일 때, 시각 $t=3k$에서 $t=4k$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, k는 상수이다.) [4점]

① 23 ② 25 ③ 27 ④ 29 ⑤ 31

정 답 ③

해 설

STEP1 k의 값을 구하자.

$v(t)=-4t^3+12t^2$

$a(t)=-12t^2+24t$

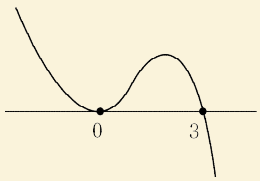
$a(k)=-12k^2+24k=12$

$k^2-2k+1=0$에서 $k=1$이다.

STEP2 점 P가 움직인 거리를 구하자.

$$\int_3^4 |-4t^3+12t^2|dt=[t^4-4t^3]_3^4$$

적분하고자 하는 함수 개형이 그림과 같으므로 −를 붙여서 절댓값을 제거하자.



$=256-256-81+108=27$

02 2022학년도 수능 14번 정답률 24%

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t(t-1)(at+b)\ (a\neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1 |v(t)|\,dt=2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 v(t)\,dt=0$

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0,1)$에 존재한다.

ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0,1)$에 존재한다.

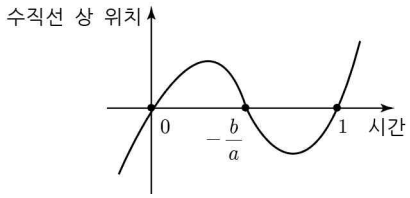
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정 답 ③

해 설

STEP1 적분식이 의미하는 바를 알아보고 P의 상황에 대입.

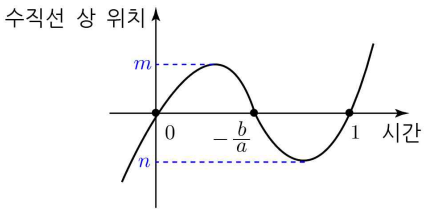
$x(t)$ 그래프가 다음과 같다고 생각해보자.



* $\int_0^1 |v(t)|dt=2$

적분식: $t=0$부터 $t=1$까지 점 P의 "이동 거리"이다.

이를 위의 $x(t)$ 그래프 예시에 대입해 생각해보자.



$\int_0^1 |v(t)|dt=2m+2n=1$

(점 P의 이동을 수직선 상에서 생각해보면 m까지 갔다가 다시 원점으로 돌아오고 n으로 갔다가 다시 원점으로 오는 것이기 때문에 총 이동거리는 $2m+2n$이다.)

STEP2

ㄱ. $\int_0^1 v(t)dt=0$

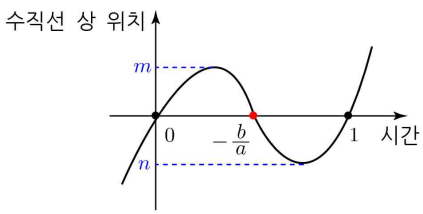
적분식이 의미하는 바는 점 P의 위치 변화량이다.

점 P는 $t=0$, $t=1$에서 모두 0에 위치해있으므로

위치 변화량은 0이다. (정답)

ㄴ. (총 이동 거리 2를 만족하며) 원점을 출발해 거리가 1이 넘는 점을 찍고 원점으로 돌아오는 방법은 없다. (오답)

ㄷ. 다음의 $x(t)$그래프를 생각해보면 바로 알 수 있다.



$m+n=1 \rightarrow |m|,\ |n|<1$

t_2가 존재한다. (정답)

03 2023학년도 6월 11번 정답률 66%

11. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=2-t,\quad v_2(t)=3t$$

이다. 출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

정 답 ⑤

해 설

STEP1 점 P가 처음으로 원점으로 돌아오는 시간을 구하자.

원점으로 돌아오는 것은 위치의 변화량이 0이라는 것이다.

$$\int_0^t v_1(t)dt=\int_0^t(2-t)dt=[2t-\frac{1}{2}t^2]_0^t=2t-\frac{1}{2}t^2=0$$

을 정리하면 $t=4$이다.

STEP2 $t=0$에서 4까지의 이동 거리를 구하자.

$$\int_0^4|v_2(t)|dt=\int_0^4|3t|dt=[\frac{3}{2}t^2]_0^4=24$$

적분하고자 하는 범위에서 함수는 양수이므로 절댓값은 떼버리자!

04 2023학년도 수능 20번 정답률 34%

20. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0\leq t\leq 2$일 때, $v(t)=2t^3-8t$이다.

(나) $t\geq 2$일 때, $a(t)=6t+4$이다.

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [4점]

정 답 17

해 설

STEP1 $v(t)$는 연속이므로 전체 $v(t)$식을 확정하자.

$t\geq 2$에서 $a(t)=6t+4\ \rightarrow\ v(t)=3t^2+4t+C$

$v(t)$는 연속이므로 $\lim_{t\to 2-}v(t)=\lim_{t\to 2+}v(t)$

$16-16=12+8+C$에서 $C=-20$이다.

STEP2 움직인 거리를 구하자.

"움직인 거리" : $|v(t)|$ 적분

- $\int_0^3|v(t)|dt=\int_0^2|v(t)|dt+\int_2^3|v(t)|dt$
  $=\int_0^2|2t^3-8t|dt+\int_2^3|3t^2+4t-20|dt$
- $0\leqq t\leqq 2$에서 $2t^3-8t<0$
- $2\leqq t\leqq 3$에서 $3t^2+4t-20>0$
- $\therefore -\int_0^2(2t^3-8t)dt+\int_2^3(3t^2+4t-20)dt$
  $=-[\frac{1}{2}t^4-4t^2]_0^2+[t^3+2t^2-20t]_2^3=17$

05 2024학년도 9월 11번 정답률 34%

11. 두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 A(1)과 점 B(8)에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도는 각각

$$v_1(t)=3t^2+4t-7,\quad v_2(t)=2t+4$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 4가 될 때까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 10 ② 14 ③ 19 ④ 25 ⑤ 32

정 답 ⑤

해 설

STEP1 두 점의 위치 그래프를 구하자.

점 P: $x_1(t)=t^3+2t^2-7t+1$

점 Q: $x_2(t)=t^2+4t+8$

STEP2 "거리 = 위치 그래프의 차"에 절댓값을 씌움 이용

$|x_1(t)-x_2(t)|=4$

$|t^3+t^2-11t-7|=4$

CASE 1. $t^3+t^2-11t-7=4$인 경우

$t^3+t^2-11t-11=(t+1)(t^2-11)=0$을 정리하면

$t=\sqrt{11}$이다. (단, t는 양수)

CASE 2. $t^3+t^2-11t-7=-4$인 경우

$t^3+t^2-11t-3=(t-3)(t^2+4t+1)=0$을 정리하면

$t=3$이다.

따라서 문제가 원하는 t의 값은 3이다.

STEP3 "움직인 거리 "라는 것에 주의하여 계산을 마무리하자.

"움직인 거리"는 속도에 절댓값을 씌워야 한다.

$v_1(t)=3t^2-4t-7=(3t+7)(t-1)$

$$\therefore \int_0^3 |v_1(t)|dt=-\int_0^1 v_1(t)dt+\int_1^3 v_1(t)dt$$

$$=-[t^3-2t^2-7t]_0^1+[t^3-2t^2-7t]_1^3=32$$

06 2024학년도 수능 10번 정답률 51%

10. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=t^2-6t+5,\quad v_2(t)=2t-7$$

이다. 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$는 구간 $[0,a]$에서 증가하고, 구간 $[a,b]$에서 감소하고, 구간 $[b,\infty)$에서 증가한다. 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 Q가 움직인 거리는? (단, $0<a<b$) [4점]

① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{17}{2}$ ③ $\frac{19}{2}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{23}{2}$

정 답 ②

해 설

STEP1 $f(t)$식을 구해보자.

점 P의 위치 그래프: $\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t$

점 Q의 위치 그래프: t^2-7t

($t=0$일 때 모두 원점 출발이므로 적분 상수는 0이다.)

$$f(t)=\left|\left(\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t\right)-(t^2-7t)\right|=\left|\frac{1}{3}t^3-4t^2+12t\right|$$

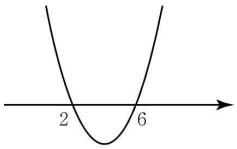
두 점 사이의 거리이므로 절댓값을 씌워야 한다.

절댓값 안의 함수를 살펴보자.

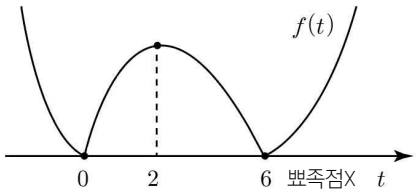
$\frac{1}{3}t^3-4t^2+12t$를 미분하면

$t^2-8t+12=(t-2)(t-6)$이고,

$t=2$에서 극대, $t=6$에서 극소이다.



따라서 $f(t)$의 개형은 다음과 같다.



그러므로 $a=2$, $b=6$임을 알 수 있다.

STEP2 점 Q가 이동한 거리를 구하자.

$$\int_2^6|2t-7|dt=\int_2^{\frac{7}{2}}(7-2t)dt+\int_{\frac{7}{2}}^6(2t-7)dt$$

$$=\frac{9}{4}+\frac{25}{4}=\frac{17}{2}$$

07 2025학년도 6월 19번 정답률 19%

19. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

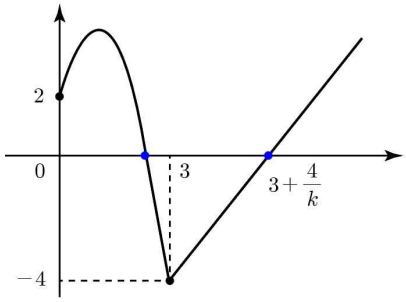
$$v(t)=\begin{cases} -t^2+t+2 & (0\leq t\leq 3) \\ k(t-3)-4 & (t>3) \end{cases}$$

이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각에서의 점 P의 위치가 1일 때, 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

정 답 16

해 설

k가 양수임을 이용해 $v(t)$의 함수를 그려보자.



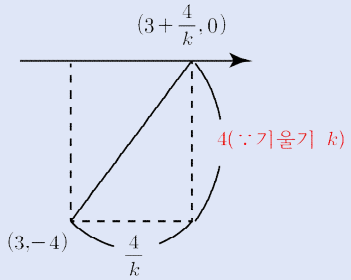
- 위치의 변화량: 속도를 적분
- 이동거리: 속도의 절댓값을 미분

점 P는 원점을 출발하고 최종 위치가 1이므로
"위치의 변화량"이 1이다.

그러므로 $\int_0^{3+\frac{4}{k}} v(t)dt=1$이다.

$$\int_0^{3+\frac{4}{k}} v(t)dt=\int_0^{3}(-t^2+t+2)dt+\int_3^{3+\frac{4}{k}}[k(t-3)-4]dt$$

TIP 기울기를 이용해 삼각형의 넓이 구하기



$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^3-\frac{8}{k}=-9+\frac{9}{2}+6-\frac{8}{k}=\frac{3}{2}-\frac{8}{k}=1$$

따라서 $k=16$이다.

08 2026학년도 6월 11번 정답률 95%

11. 시각 $t=0$일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각이 $t\,(t\geq 0)$일 때 점 P의 위치 x가

$$x=t^3-t^2-t+1$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 1이다.
ㄴ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 속도는 0이다.
ㄷ. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에 점 P의 가속도는 4이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

정 답 ④

해 설

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 $x=0$이므로 점 P의 위치는 0이다. (X)

ㄴ. 점 P의 속도 v는 x를 t에 대해 미분하면 $v=3t^2-2t-1$이다. 시각 $t=1$일 때 $v=0$이므로 점 P의 속도는 0이다. (O)

ㄷ. 점 P의 가속도 a는 v를 t에 대해 미분하면 $a=6t-2$이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각은 $v=0$일 때이다. 시각 $t=1$일 때 $v=0$이고, 이때 가속도는 4이다. (O)

09 2026학년도 9월 11번 정답률 84%

11. 시각 $t=0$일 때 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각이 $t\,(t\geq 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-10t+7$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다.
ㄴ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 3이다.
ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정 답 ⑤

해 설

ㄱ. 운동 방향이 바뀌기 위해서는 속도의 부호가 바뀌어야 한다. 시각 $t=1$일 때 $v(t)=0$이고, 부호가 바뀌므로 P의 운동 방향이 바뀐다. (O)

ㄴ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 $\int_0^3 v(t)dt$이다.

$\int_0^3 v(t)dt=\int_0^3 3t^2-10t+7dt=[t^3-5t^2+7t]_0^3=3$이다. (O)

ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 $\int_0^2 |v(t)|dt$이다.

$\int_0^2 |v(t)|dt=\int_0^1 v(t)dt-\int_1^2 v(t)dt$이다.

$\int_0^1 v(t)dt-\int_1^2 v(t)dt=3+1=4$이다. (O)