2027

수학I

CONNECT

수능에 필요한 모든 것을 담은 수능 공략서

UNOVA

Contents

1. 지수함수와 로그함수

· 개념편 01
· 문제편 11

2. 삼각함수

· 개념편 69
· 문제편 83

3. 수열

· 개념편 140
· 문제편 144

PART 1
지수함수와 로그함수

개념 유형

(1) 수학1을 위한 기초 개념
(2) 거듭제곱근과 지수함수
(3) 로그

기출 유형

(1) 거듭제곱의 단순 계산
(2) 거듭제곱의 실근의 개수
(3) 지수방정식/부등식
(4) 지수함수와 직선의 만남
(5) 로그의 단순 계산
(6) 로그함수
(7) 지수함수와 로그함수의 그래프

THEME

1 수학1을 위한 기초 개념

정리1 2차 함수

개념1 2차 함수의 그래프

① 2차 함수는 $y=ax^2+bx+c=a(x-h)^2+k=a(x-\alpha)(x-\beta)$로 표현될 수 있다.

- $y=ax^2+bx+c$는 기하적 의미가 없다. 이제 기하적 의미를 부여해보자.
- $y=a(x-h)^2+k$는 꼭짓점의 위치가 (h, k)인 이차함수이다.
- $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$는 두 근이 α, β인 이차함수이다.

② 포물선의 방향은 다음과 같다.

- $a>0$: 아래로 볼록한 포물선 (평평한 식탁보에 볼링공을 가만히 둔 모습)
- $a<0$: 위로 볼록한 포물선

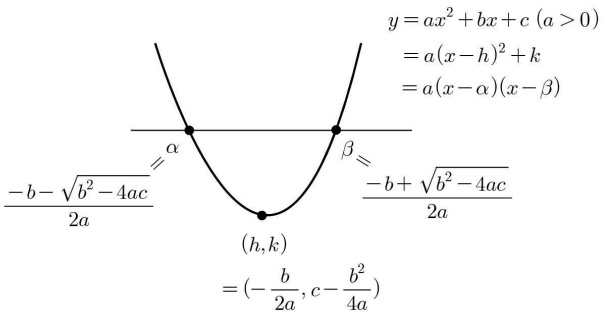
③ 축의 방정식: 2차 함수는 대칭성을 가지며, 대칭축의 방정식은 $x=-\frac{b}{2a}$이다.

④ 꼭짓점의 좌표: $x=-\frac{b}{2a}$를 대입하면 $y=c-\frac{b^2}{4a}$이다.

개념2 2차 함수의 판별식

① 2차 함수의 근은 이차 방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해와 같다.

근의 공식은 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$이므로 $\sqrt{\ }$ 안에 있는 $D=b^2-4ac$의 부호에 따라 근의 개수와 종류가 결정된다.



② 판별식과 실근의 개수

- $D>0$: 서로 다른 두 실근
- $D=0$: 중근(실근 하나)
- $D<0$: 서로 다른 두 복소근

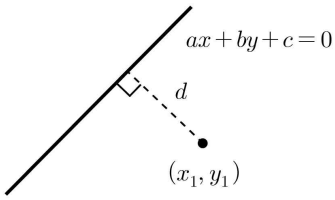
TIP b가 짝수를 만족함

만약 b가 짝수일 경우 양변을 4로 나누면 $\frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$로 간단하게 계산할 수 있다.

정리2 점과 직선 사이의 거리

개념1 점과 직선 사이의 거리 # '무지성 암기'

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$이다.



예 점 $\mathrm{P}(2,-1)$과 직선 $3x-4y+5=0$사이의 거리를 구해보자.

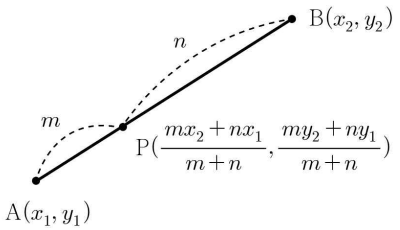
공식에 각 값을 대입하면 $d=\dfrac{|3\times2+(-4)\times(-1)+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{15}{5}=3$이다.

정리3 비율 관계

개념1 내분의 정의

선분 $\overline{\mathrm{AB}}$의 두 끝 점 $\mathrm{A}(x_1,y_1)$와 $\mathrm{B}(x_2,y_2)$를 $m:n$의 비로 나누는 점 $\mathrm{P}(x,y)$를 내분점이라고 한다.
이때 P는 A와 B 사이에 위치하게 된다.

$x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$, $y=\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}$



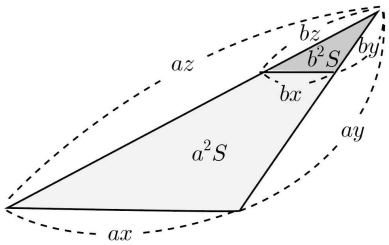
예 두 점 $\mathrm{A}(1,2)$와 $\mathrm{B}(7,8)$를 잇는 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표를 구해보자.

공식에 각 값을 대입하면 $\mathrm{P}\left(\dfrac{2\times7+1\times1}{3}, \dfrac{2\times8+1\times2}{3}\right)=(5,6)$이다.

개념2 도형의 비율 관계

도형 안에 닮음을 만족하는 도형이 있을 때 한 변의 길이가 $a:b$를 만족한다면

① 모든 변의 길이의 비는 $a:b$를 만족한다.
② 면적의 비는 $a^2:b^2$를 만족한다.



THEME

2 거듭제곱근과 지수함수

정리1 거듭제곱근의 정의

개념1 거듭제곱근의 정의

① a, a^2, a^3, $\cdots$, a^n 을 통틀어 a의 거듭제곱이라고 한다.

② 거듭제곱의 밑은 a^n에서 a를 의미하고, 거듭제곱의 지수는 a^n에서 n을 의미한다.

③ a의 n제곱근은 $x^n=a$의 근이다. (빈출)

n제곱근 a는 $\sqrt[n]{a}$이다. (개념이 아예 다르다. 조심하자.)

2^3 ← 지수

↑

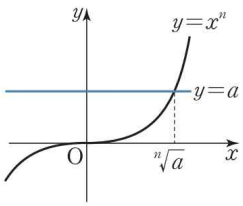
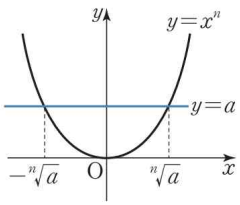
밑

개념2 실근의 개수

① a의 n제곱근($x^n=a$의 근)은 복소수 범위에서 n개가 존재한다.

② a의 n제곱근($x^n=a$의 근)은 실수의 범위에서 n의 홀수, 짝수에 따라 다르게 존재한다.

- n이 홀수일 때, a의 부호에 관계없이 항상 1개임을 주목하자.
- n이 짝수일 때, a의 부호에 따라 2개, 1개, 0개가 존재한다.

상황	n이 홀수일 때	n이 짝수일 때
그래프		
$a>0$	$\sqrt[n]{a}$ (1개)	$-\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{a}$ (2개)
$a=0$	0 (1개)	0 (1개)
$a<0$	$\sqrt[n]{a}$ (1개)	없다. (0개)

예 -8의 세제곱근을 구하시오.

-8의 세제곱근은 방정식 $x^3=-8$의 근이므로 $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)=0$을 만족한다.

따라서 세제곱근은 $x=-2,\ 1+\sqrt{3}i,\ 1-\sqrt{3}i$이다.

예 81의 네제곱근을 구하시오.

81의 네제곱근은 방정식 $x^4=81$의 근이므로 $x^4-81=(x+3)(x-3)(x^2+9)=0$을 만족한다.

따라서 네제곱근은 $x=+3,\ -3,\ +3i,\ -3i$이다.

정리2 지수함수의 성질

개념1 거듭제곱근에 대한 기본적 성질 # '무지성 암기'

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ ③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ ④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ ⑤ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$

④ $a^m a^n=a^{m+n}$ ⑤ $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ⑥ $(a^m)^n=a^{mn}$ ⑦ $(ab)^n=a^n b^n$ ⑧ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

예 $\left(\dfrac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}$ 의 값을 구하시오.

$\left(\dfrac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}=(2^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}=2^2=4$이다.

예 두 실수 a, b에 대하여 $2^a=3$, $6^b=5$일 때, 2^{ab+a+b}의 값은?

$6^b=2^b\times 3^b=5$에 $2^a=3$을 대입해보자. 그러면 $2^b\times 2^{ab}=2^{b+ab}=5$를 만족한다.
$2^{ab+a+b}=2^{b+ab}\times 2^a=5\times 3=15$이다.

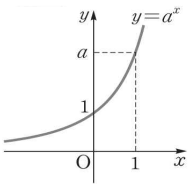
개념2 지수함수

① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

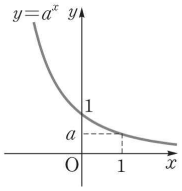
② $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

③ 그래프는 점 $(0,1)$을 지나고, x축을 점근선으로 가진다.

④ 지수함수 $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$은 실수 전체의 집합에서
양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로
임의의 양수 p에 대하여 지수방정식 $a^x=p$는 단 하나의 해를 갖는다.

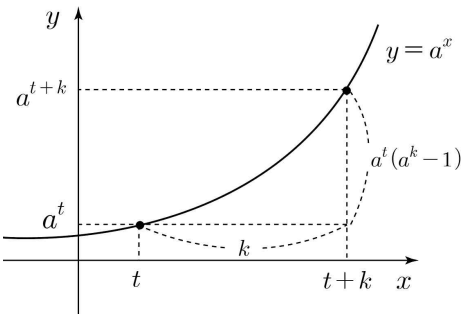


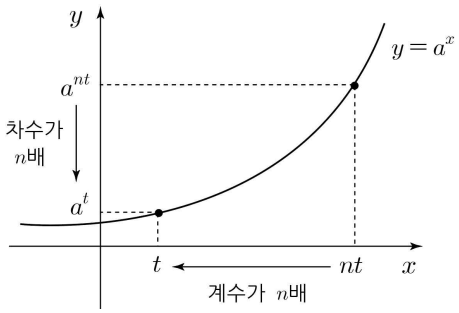
$[a>1]$



$[0<a<1]$

⑤ 지수함수에서 $\Delta x=k$(차이)를 만족한다면 $\Delta y=a^t(a^k-1)$를 만족한다.
지수함수에서 $x_2=nx_1$(배율)를 만족한다면 $y_2=(y_1)^n$를 만족한다.





TIP 함수의 이동

① 함수 $f(x)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행 이동한 함수는 $y=f(x-m)+n$이다.
② 함수 $f(x)$를 x축에 대하여 대칭 이동한 그래프는 $y=-f(x)$이다.
③ 함수 $f(x)$를 y축에 대하여 대칭 이동한 그래프는 $y=f(-x)$이다.
④ 함수 $f(x)$를 원점에 대하여 대칭 이동한 그래프는 $y=-f(-x)$이다.
⑤ 도형 $f(x,y)=0$를 점 (a,b)에 대해 대칭 이동 한 도형의 방정식은 $f(2a-x, 2b-y)$이다..

THEME

3 로그

정리1 로그의 정의

개념1 로그의 정의

① $a>0,\ a\neq 1,\ N>0$일 때, $a^x=N \Leftrightarrow x=\log_a N$ 을 만족한다.

② $\log_a N$이 정의될 조건

조건 1) 밑은 1이 아닌 양수이다. ➡ $a>0,\ a\neq 1$

조건 2) 진수는 양수이다. ➡ $N>0$

$\log_a N$ ← 진수

↑

밑

개념2 로그의 성질

로그의 지수 성질	로그의 밑 성질	로그의 여러 가지 성질
① $\log_a 1=0,\ \log_a a=1$	① $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (단, $c\neq 1$)	① $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ (단, $m\neq 0$)
② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$	② $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$	② $a^{\log_a b}=b,\ a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ (단, $c>0$)
③ $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$		③ $\log_a b\times\log_b a=1$
④ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)		③ $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ (단, $m\neq 0$)

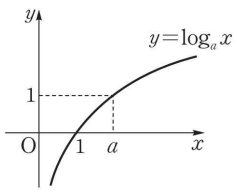
개념3 로그함수

① 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

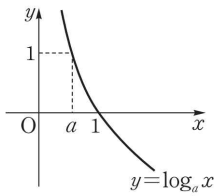
② $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

③ 그래프는 점 $(1,0)$을 지나고, y축을 점근선으로 가진다.

④ 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$은 양의 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 로그방정식 $\log_a x=k$는 단 하나의 해를 갖는다.



$[a>1]$



$[0<a<1]$

예제1 로그의 정의

모든 실수 x에 대하여 $\log_a(x^2+2ax+5a)$가 정의되기 위한 모든 정수 a의 값의 합을 구하시오.

해설

모든 실수 x에 대하여 $\log_a(x^2+2ax+5a)$가 정의가 되려면

① $a>0,\ a\neq 1$

② $x^2+2ax+5a>0$을 만족해야하고, 이 식을 만족하려면

판별식 $\frac{D}{4}=a^2-5a=a(a-5)<0$이다.

즉, $0<a<5$이다.

따라서 가능한 모든 정수 a는 2, 3, 4이므로 모든 정수 a의 값의 합은 9이다.

예제2 로그의 값이 자연수가 될 조건

$2\log_a 3$이 자연수가 되도록 하는 5 이상의 자연수 a의 값을 구하시오.

해설

$2\log_a 3=k$라고 하면 $a^{\frac{k}{2}}=3$에서 $a=3^{\frac{2}{k}}$이다.

k는 2의 약수여야하므로 $k=1$ or $k=2$이고,

$a=3$ 또는 $a=9$이다. 따라서 $a=9$이다.

예제3 밑을 같게 할 수 있는 경우

방정식 $\log_4(4x+5)=\log_2 x$을 만족하는 x의 값을 구하시오.

해설

방정식 $\log_4(4x+5)=\log_2 x$에서 진수의 조건에 의하여 $x>0$이다.

또한 $4x+5=x^2,\ x^2-4x-5=(x+1)(x-5)=0$이므로 $x=-1,\ x=5$이다.

조건을 통하여 방정식의 해는 $x=5$이다.

예제4 $\log_a f(x)=b$ 꼴이 반복되는 경우

방정식 $(\log_2 x)^2-3\log_2 x+2=0$을 만족하는 x의 값을 구하시오.

해설

방정식 $(\log_2 x)^2-3\log_2 x+2=0$에서 $\log_2 x=t$로 놓으면
$t^2-3t+2=(t-1)(t-2)=0$에서 $t=1$, $t=2$이다.
따라서 $\log_2 x=1$, $\log_2 x=2$이므로 방정식의 해는
$x=2$, $x=4$이다.

예제5 지수에 로그가 있는 경우

방정식 $x^{\log_2 x}=4x$을 만족하는 x의 값의 합을 구하시오.

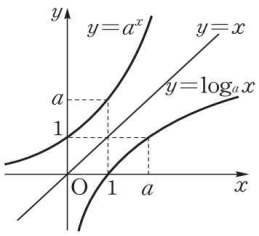
해설

방정식 $x^{\log_2 x}=4x$에서 양변에 밑이 2인 로그를 취하면
$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 4x$이고,
$(\log_2 x)^2=\log_2 4+\log_2 x$, $\log_2 x=t$로 놓으면
$t^2-t-2=(t+1)(t-2)=0$에서 $t=-1$, $t=2$이다.
따라서 $\log_2 x=-1$ 또는 $\log_2 x=2$이므로 방정식의 해는
$x=\frac{1}{2}$, $x=4$이다.

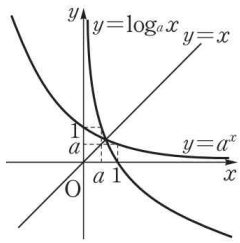
정리2 지수함수와 로그함수의 관계

개념1 역함수 관계 # 문제에서, 지수함수와 로그함수의 그래프 그림이 함께 나오면 무조건 '역함수 관계'를 떠올립니다.

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$과 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$는 서로 역함수 관계이다.
두 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



$[a>1]$



$[0<a<1]$

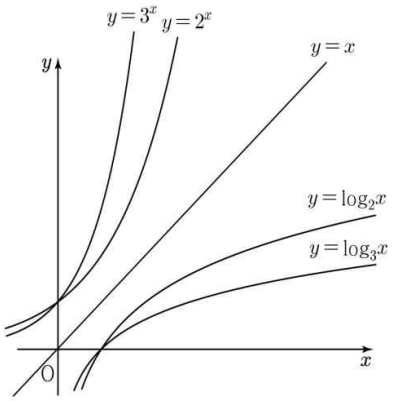
① $y=x+k$인 직선에 대해서 대칭인 두 그래프는 $y=a^{x+k}$, $y=\log_a x-k$이다. (대입해보면 $y=x$가 나온다.)

② 두 그래프 $y=a^{mx}$, $y=\dfrac{1}{m}\log_a x$는 $y=x$에 대해 대칭이다.

③ 일반화하면, 두 그래프는 $y=a^{mx+k}$, $y=\dfrac{\log_a x-k}{m}$는 $y=x$에 대해 대칭이다.

개념2 밑이 증가할 때 함수의 모양

아래 그림을 그냥 암기하자. 딱히 암기 팁은 없고.. 보다보면 암기가 된다.



정리3 기울기 조건과 좌표 설정

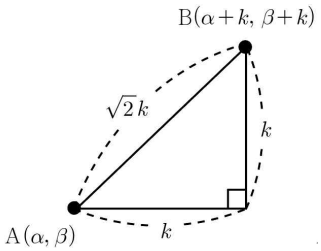
개념1 기울기 조건과 좌표 설정

기울기 조건은 좌표 설정에 매우 큰 영향을 미친다.
특히 다항함수가 아닌 초월함수 (지수함수, 로그함수, 삼각함수 등)의 좌표를 세울 때에는,
좌표를 막 세우다가 문제를 풀 수 없는 상황에 봉착했던 경험이 다들 한 번씩 있을 것이다.

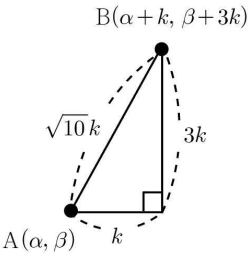
이를 방지하기 위해서는 문제 조건을 유심히 봐야 한다.
'기울기 조건'을 사용하여, 간단하게 풀어야 하는 문제들이 많이 출제된다.
1차원적인 사고를 하여 좌표를 복잡하게 잡게 되면, 초월함수이기에 문제를 풀 수조차 없게 된다.
따라서 아래 설명드릴 개념 등을 토대로, 두 단계 이상의 사고 과정을 거쳐서 문제를 해결하는 능력을 길러야 한다.

개념2 실제 활용 예시 (중요)

점 A의 좌표 (α, β)를 알고 있을 때, 점 B의 좌표를 제시된 기울기를 통해 다음과 같이 표현할 수 있다.
(강의에서 설명한 x축, y축에 나란한 직선을 긋는 스킬과 같은 내용이다.)



[기울기가 1인 상황]



[기울기가 3인 상황]

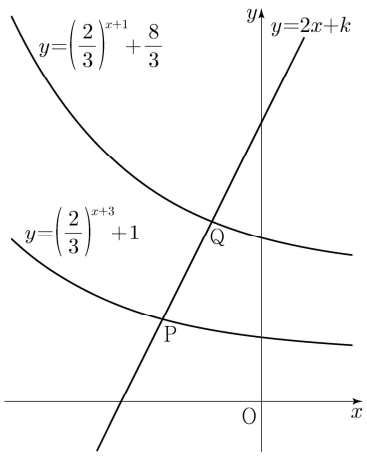
예제6 기울기 조건과 좌표 설정

직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.
$\overline{PQ}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은?

① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

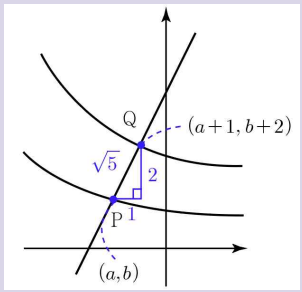


해설

직선의 k의 값을 구하려면 P or Q의 좌표를 대입하면 된다.
따라서 좌표를 만드는 것을 최우선 목표로 하자.

STEP1 조건의 분석

- $\overline{PQ}=\sqrt{5}$이고, 직선의 기울기가 2이므로
  PQ의 x축 거리는 1, y축 거리는 2가된다.
  $P(a,b)$라고 하면, $Q(a+1,b+2)$가 된다.



- 함수에 대입하면 미지수 2개, 식 2개라서 a, b가 나와 풀린다.

$b=\left(\frac{2}{3}\right)^{a+3}+1$, $b+2=\left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}+\frac{8}{3}$을 b로 연립하자.

$\left(\frac{2}{3}\right)^{a+3}+1=\left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}+\frac{2}{3}$ → $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}=\frac{1}{3}$

이 성립하려면

$a=-2$이고, $b=\frac{5}{3}$이 된다.

STEP2 답 구하기

$y=2x+k$에 대입하면 $\frac{5}{3}=-4+k$에서 $k=\frac{17}{3}$이다.

유형 01 거듭제곱의 단순 계산

01 2021년 실시 6월 1번 정답률 95%

1. $2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

02 2021년 실시 9월 1번 정답률 94%

1. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \times 3^{-\frac{7}{4}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

03 2021년 실시 수능 1번 정답률 89%

1. $(2^{\sqrt{3}} \times 4)^{\sqrt{3}-2}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

04 2022년 실시 6월 1번 정답률 93%

1. $(-\sqrt{2})^4 \times 8^{-\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

05 2022년 실시 9월 1번 정답률 93%

1. $\left(\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 1 ④ 4 ⑤ 16

06 2022년 실시 수능 1번 정답률 89%

1. $\left(\frac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

07 2023년 실시 6월 1번 정답률 94%

1. $\sqrt[3]{27}\times 4^{-\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

08 2023년 실시 9월 1번 정답률 94%

1. $3^{1-\sqrt{5}}\times 3^{1+\sqrt{5}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

09 2023년 실시 수능 1번 정답률 93%

1. $\sqrt[3]{24} \times 3^{\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

10 2024년 실시 6월 1번 정답률 83%

1. $\left(\frac{5}{\sqrt[3]{25}}\right)^{\frac{3}{2}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 1 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5

11 2024년 실시 9월 1번 정답률 89%

1. $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[3]{4}}$의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

12 2024년 실시 수능 1번 정답률 91%

1. $\sqrt[3]{5} \times 25^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

13 2025년 실시 6월 1번 정답률 98%

1. $4^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

14 2025년 실시 9월 1번 정답률 98%

1. $5^{\sqrt{2}+1} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{25}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ 1 ④ 5 ⑤ 25

15 2025년 실시 수능 1번 정답률 97%

1. $9^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

유형 02 거듭제곱의 실근의 개수

01 2021년 실시 6월 21번 정답률 11%

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은
서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

02 2022년 실시 9월 11번 정답률 55%

11. 함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값은? [4점]

> $\sqrt{3}^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

유형 03 지수방정식/부등식

01 2023년 실시 6월 16번 정답률 88%

16. 부등식 $2^{x-6} \le \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 을 만족시키는 모든 자연수 x 의 값의 합을 구하시오. [3점]

02 2023년 실시 수능 16번 정답률 84%

16. 방정식 $3^{x-8} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$ 을 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오. [3점]

03 2023년 실시 9월 14번 정답률 46%

14. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+a}+b & (x \le -8) \\ -3^{x-3}+8 & (x > -8) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

> 집합 $\{f(x) \mid x \le k\}$의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $3 \le k < 4$이다.

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

유형 04 지수함수와 직선의 만남

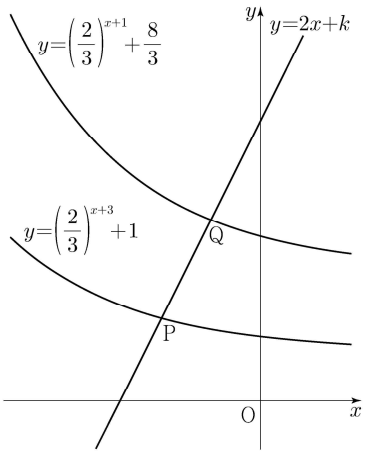
01 2021년 실시 수능 9번 정답률 65%

9. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

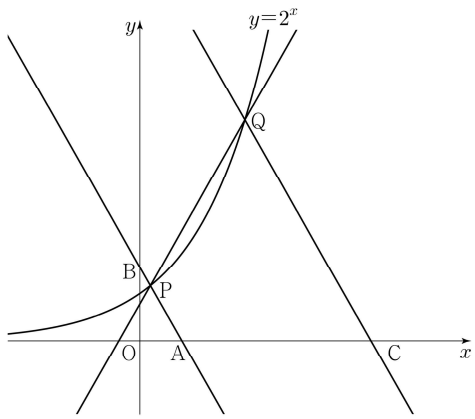


02 2022년 실시 9월 21번 정답률 18%

21. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a, 2^a)$, $\mathrm{Q}(b, 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

$$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}},\quad \overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$$

일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$) [4점]



03 2025년 실시 9월 12번 정답률 89%

12. 상수 $a\,(a>1)$과 양수 t에 대하여 곡선 $y=a^x$과 두 직선 $x=t$, $x=2t$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. $\overline{AB}=\overline{AC}$이고 삼각형 ACB의 넓이가 8일 때, $a\times t$의 값은? [4점]

① $2^{\frac{9}{4}}$ ② $2^{\frac{23}{8}}$ ③ $2^{\frac{7}{2}}$
④ $2^{\frac{33}{8}}$ ⑤ $2^{\frac{19}{4}}$

04 2025년 실시 수능 10번 정답률 82%

10. 상수 $a\,(a>1)$에 대하여 곡선 $y=a^x-2$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 B, 곡선 $y=a^x-2$의 점근선과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=\overline{BC}$이고 삼각형 AOC의 넓이가 8일 때, $a\times\overline{OB}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $2^{\frac{13}{6}}$ ② $2^{\frac{7}{3}}$ ③ $2^{\frac{5}{2}}$ ④ $2^{\frac{8}{3}}$ ⑤ $2^{\frac{17}{6}}$

유형 05 로그의 단순 계산

01 2021년 실시 6월 16번 정답률 90%

16. $\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24$의 값을 구하시오. [3점]

02 2021년 실시 9월 16번 정답률 91%

16. $\log_2 100 - 2\log_2 5$의 값을 구하시오. [3점]

03 2021년 실시 수능 13번 정답률 52%

13. 두 상수 a, $b\,(1 < a < b)$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과 두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다. 함수 $f(x) = a^{bx} + b^{ax}$에 대하여 $f(1) = 40$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 760 ② 800 ③ 840 ④ 880 ⑤ 920

04 2021년 실시 수능 16번 정답률 88%

16. $\log_2 120 - \frac{1}{\log_{15} 2}$의 값을 구하시오. [3점]

05 2022년 실시 6월 21번 정답률 28%

21. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

06 2023년 실시 9월 7번 정답률 89%

7. 두 실수 a, b가

$$3a+2b=\log_3 32, \quad ab=\log_9 2$$

를 만족시킬 때, $\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{25}{12}$

07 2023년 실시 수능 9번 정답률 70%

9. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_5 3)$, $\mathrm{Q}(\log_5 12)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1일 때, 4^m의 값은? (단, m은 $0<m<1$인 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

08 2024년 실시 6월 14번 정답률 29%

14. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

> $\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)$의 값이 양수가 되도록 하는 자연수 n의 개수가 12이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

09 2024년 실시 9월 8번 정답률 72%

8. $a>2$인 상수 a에 대하여 두 수 $\log_2 a$, $\log_a 8$의 합과 곱이 각각 4, k일 때, $a+k$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

10 2024년 실시 수능 8번 정답률 73%

8. 두 실수 $a=2\log\frac{1}{\sqrt{10}}+\log_2 20$, $b=\log 2$에 대하여 $a\times b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

유형 06 로그함수

01 2021년 실시 6월 10번 정답률 73%

10. $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x, \quad y=-\log_n(x+3)+1$$

이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

02 2022년 실시 6월 16번 정답률 89%

16. 방정식 $\log_2(x+2)+\log_2(x-2)=5$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

03 2022년 실시 9월 16번 정답률 87%

16. 방정식 $\log_3(x-4)=\log_9(x+2)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

04 2022년 실시 수능 16번 정답률 84%

16. 방정식

$$\log_2(3x+2)=2+\log_2(x-2)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

05 2023년 실시 6월 7번 정답률 82%

7. 상수 $a\,(a>2)$에 대하여 함수 $y=\log_2(x-a)$의 그래프의 점근선이 두 곡선 $y=\log_2\frac{x}{4}$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB}=4$일 때, a의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

06 2023년 실시 9월 16번 정답률 90%

16. 방정식 $\log_2(x-1)=\log_4(13+2x)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

07 2023년 실시 수능 21번 정답률 38%

21. 양수 a에 대하여 $x \geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+6x & (-1 \leq x < 6) \\ a\log_4(x-5) & (x \geq 6) \end{cases}$$

이다. $t \geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1, t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

08 2024년 실시 6월 16번 정답률 78%

16. 방정식 $\log_2(x+1)-5=\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

09 2024년 실시 9월 16번 정답률 88%

16. 방정식

$$\log_3(x+2)-\log_{\frac{1}{3}}(x-4)=3$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

10 2025년 실시 6월 10번 정답률 91%

10. 실수 $a\,(a>1)$에 대하여
곡선 $y=\log_a(x+3)$이 곡선 $y=\log_a(-x+3)$과 만나는 점을 A,
곡선 $y=\log_a(x+3)$이 x축과 만나는 점을 B,
곡선 $y=\log_a(-x+3)$이 x축과 만나는 점을 C라 하자.
삼각형 ABC가 정삼각형일 때, a의 값은? [4점]

① $3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$ ② $3^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$ ③ $3^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ ④ $3^{\frac{5\sqrt{3}}{12}}$ ⑤ $3^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

11 2025년 실시 6월 16번 정답률 97%

16. 방정식 $\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=\log_{25}9$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

12 2025년 실시 9월 8번 정답률 94%

8. 두 양수 a, b가

$$\log_{\sqrt{2}}a+\log_2 b=2,\quad \log_2 a+\log_2 b^2=7$$

을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

13 2025년 실시 수능 6번 정답률 91%

6. 1보다 큰 두 실수 a, b가

$$\log_a b = 3, \quad \log_3 \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $\log_9 ab$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

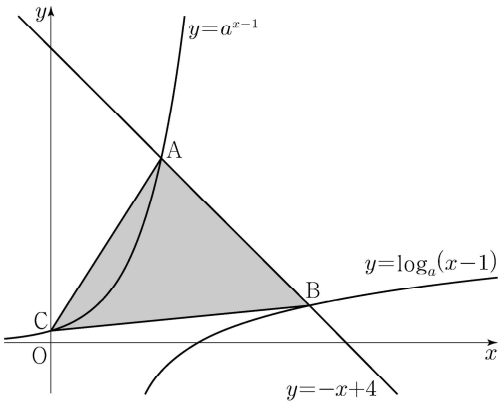
유형 07 지수함수와 로그함수의 그래프

01 2021년 실시 9월 21번 정답률 17%

21. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1},\quad y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]



02 2022년 실시 수능 21번 정답률 28%

21. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |3^{x+2}-n| & (x<0) \\ |\log_2(x+4)-n| & (x\geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

03 2023년 실시 6월 21번 정답률 16%

21. 실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자.

<보기>의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오. (단, $A+B+C\neq 0$) [4점]

- 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다.
- 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다.
- 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$, 거짓이면 $C=0$이다.

<보 기>

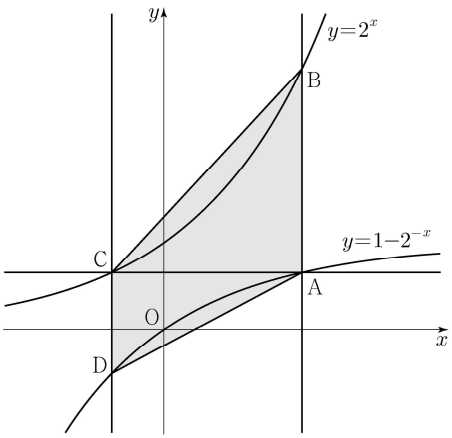
ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다.

ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.

ㄷ. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t)\geq t$이다.

04 2024년 실시 6월 12번 정답률 26%

12. 그림과 같이 곡선 $y=1-2^{-x}$ 위의 제1사분면에 있는 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x}$과 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x}$과 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡신 $y=1-2^{-x}$과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AB}=2\overline{CD}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]



① $\frac{5}{2}\log_2 3-\frac{5}{4}$ ② $3\log_2 3-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$

④ $4\log_2 3-2$ ⑤ $\frac{9}{2}\log_2 3-\frac{9}{4}$

05 2023년 실시 9월 14번 정답률 26%

14. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기는 3이다.
(나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n\times\sqrt{10}$

중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 x_n이라 하자. $x_1+x_2+x_3$의 값은? [4점]

① $\frac{150}{7}$ ② $\frac{155}{7}$ ③ $\frac{160}{7}$ ④ $\frac{165}{7}$ ⑤ $\frac{170}{7}$

06 2024년 실시 수능 20번 정답률 6%

20. 곡선 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$과 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표를 k라 하자. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $x>k$인 모든 실수 x에 대하여
> $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$이고 $f(f(x))=3x$이다.

$f\left(\frac{1}{k^3\times 5^{3k}}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

07 2025년 실시 6월 22번 정답률 10%

22. $k>1$인 실수 k에 대하여 두 곡선

$$y=2^x+\frac{k}{2},\quad y=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$$

가 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-2}-3$과 만나는 점을 B라 하자.

삼각형 AOB의 넓이가 16일 때, $k+\log_2 k=\frac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

08 2025년 실시 9월 22번 정답률 26%

22. 곡선 $y=\log_2 x$ 위에 서로 다른 두 점 A, B가 있다.
점 A에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 P라 하고,
점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때,
네 점 A, B, P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) (직선 AP의 y절편) − (직선 BQ의 y절편) $=\frac{13}{2}$

(나) 직선 AB의 기울기는 $\frac{6}{7}$이다.

사각형 APQB의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

09 2025년 실시 수능 22번 정답률 15%

22. 곡선 $y=\log_{16}(8x+2)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a, b)$와 곡선 $y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$ 위의 점 B가 제1사분면에 있다. 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 직선 OB 위에 있고 선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(\frac{77}{8}, \frac{133}{8}\right)$일 때, $a\times b=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

유형 01 거듭제곱의 단순 계산

01 2021년 실시 6월 1번 정답률 95%

1. $2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

정 답 ④

해 설

$2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}} = 2^2 = 4$

02 2021년 실시 9월 1번 정답률 94%

1. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \times 3^{-\frac{7}{4}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

정 답 ①

해 설

$\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \times 3^{-\frac{7}{4}} = 3^{-\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{7}{4}} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

03 2021년 실시 수능 1번 정답률 89%

1. $(2^{\sqrt{3}} \times 4)^{\sqrt{3}-2}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

정 답 ②

해 설

$(2^{\sqrt{3}} \times 4)^{\sqrt{3}-2} = (2^{\sqrt{3}+2})^{\sqrt{3}-2} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

04 2022년 실시 6월 1번 정답률 93%

1. $(-\sqrt{2})^4 \times 8^{-\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ①

해 설

$(-\sqrt{2})^4 \times 8^{-\frac{2}{3}} = 2^2 \times 2^{-2} = 2^0 = 1$

05 2022년 실시 9월 1번 정답률 93%

1. $\left(\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 1 ④ 4 ⑤ 16

정 답 ④

해 설

$\left(\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1} = (2^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1} = 2^2 = 4$

06 2022년 실시 수능 1번 정답률 89%

1. $\left(\frac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

정 답 ⑤

해 설

$\left(\frac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}} = (2^{2-\sqrt{2}})^{2+\sqrt{2}} = 4$

07 2023년 실시 6월 1번 정답률 94%

1. $\sqrt[3]{27}\times 4^{-\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

정 답 ⑤

해 설

$\sqrt[3]{27}\times 4^{-\frac{1}{2}} = 3\times 2^{-1} = \frac{3}{2}$

08 2023년 실시 9월 1번 정답률 94%

1. $3^{1-\sqrt{5}}\times 3^{1+\sqrt{5}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

정 답 ⑤

해 설

$3^{1-\sqrt{5}}\times 3^{1+\sqrt{5}} = 3^2 = 9$

09 2023년 실시 수능 1번 정답률 93%

1. $\sqrt[3]{24}\times 3^{\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

정 답 ①

해 설

$\sqrt[3]{24}\times 3^{\frac{2}{3}} = (2\times 3^{\frac{1}{3}})\times 3^{\frac{2}{3}} = 6$

10 2024년 실시 6월 1번 정답률 83%

1. $\left(\frac{5}{\sqrt[3]{25}}\right)^{\frac{3}{2}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 1 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5

정 답 ④

해 설

$\left(\frac{5}{\sqrt[3]{25}}\right)^{\frac{3}{2}} = (5\times 5^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}} = \sqrt{5}$

11 2024년 실시 9월 1번 정답률 89%

1. $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[3]{4}}$의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

정 답 ②

해 설

$\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2^{\frac{5}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}} = 2$

12 2024년 실시 수능 1번 정답률 91%

1. $\sqrt[3]{5}\times 25^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ⑤

해 설

$\sqrt[3]{5}\times 25^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}}\times 5^{\frac{2}{3}} = 5$

13 2025년 실시 6월 1번 정답률 98%

1. $4^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ②

해 설

$4^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$

14 2025년 실시 9월 1번 정답률 98%

1. $5^{\sqrt{2}+1} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{25}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ 1 ④ 5 ⑤ 25

정 답 ④

해 설

$5^{\sqrt{2}+1} \times (\frac{1}{5})^{\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}+1} \times 5^{-\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}} = 5$이다.

15 2025년 실시 수능 1번 정답률 97%

1. $9^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

정 답 ①

해 설

$9^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}}$이므로 $9^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}} = 1$이다.

유형 02 거듭제곱의 실근의 개수

01 2021년 실시 6월 21번 정답률 11%

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은
> 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
> (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

정 답 24

해 설

STEP1 $f(x)$ 분석하기 (Why? 조건 3개 제시)

- 최고차항이 1인 조건을 통해 $f(x)=x^2+\cdots$ 임을 알 수 있다.
  (또한 최고차항의 계수가 양수이므로 아래로 볼록이다.)
- (나)에서 $f(x)$의 최솟값이 음의 정수이므로 2개의 서로 다른 두 실근을 갖음을 알 수 있다.
  따라서 함수는 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$의 형태이다.

STEP2 n 해석하기

(과탐에서도 동일하게 고난이도 문제는 구해야하는 것을 마지막으로 계산하게 만든다.)

- (가)의 서로 다른 두 실근의 조건을 통해 $f(x)$의 해가 α, β였고, 이 각각의 실근이 중근을 가져야 하므로
  x^n-64의 해에 α, β가 들어있어야 한다.
  따라서 $x^n=64$의 실수인 해는 2개이다.
  (거듭제곱근의 형태에서 실수 해의 개수는 0, 1, 2개 밖에 없었다.)
- 실수인 해가 2개이므로 n은 짝수이다. … ①
  n이 짝수이면 $\alpha, \beta = \pm 2^{\frac{6}{n}}$이다.
- 함수에 대입하면 $f(x)=(x+2^{\frac{6}{n}})(x-2^{\frac{6}{n}})=x^2-2^{\frac{12}{n}}$이다.
- 최솟값 $-2^{\frac{12}{n}}$이 음의 정수가 되려면 n은 12의 약수만 가능하다. … ② (음의 정수는 -1, -2, -3...을 의미한다.)
- ①, ②를 통해 $n=2,\ 4,\ 6,\ 12$이다.
  따라서 모든 자연수 n의 값의 합은 24이다.

TIP $p(x)q(x)=0$의 의미

CASE 1으로 $p(x)=0$을 만족하는 x의 범위를 조사해야하고,
CASE 2으로 $q(x)=0$을 만족하는 x의 범위를 조사해야한다.
두 케이스를 통한 x의 범위의 합집합이 의미가 있다.
(1개의 함수가 0이 되면 곱은 0이 되기 때문이다.)

02 2022년 실시 9월 11번 정답률 55%

11. 함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값은? [4점]

$\sqrt{3}^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

정 답 ②

해 설

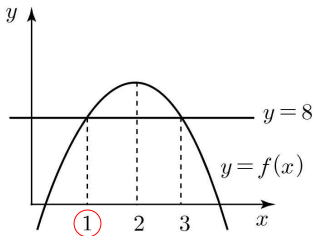
답에서 함수의 상수 k의 값을 구하라고 나와있으므로
조건을 통해 좌표 $(n, f(n))$를 구한 다음 대입하면 된다.

STEP1 $f(x)$ 추론하기

$f(x)=-(x-2)^2+k$의 개형을 그릴 때 선지를 보면 k가 8부터 시작하므로 최댓값이 양으로 볼록인 함수를 생각할 수 있다.

STEP2 조건 생각하기

- $x^4=\sqrt{3^{f(n)}}$에서 x의 지수가 짝수이므로 실수인 근은 2개이다.
- 네제곱근 중 실수인 근을 모두 곱한 값이 -9라는 것을 통해 실수인 근 x는 3 또는 -3이다.
- $3^4=(-3)^4=3^{\frac{f(n)}{2}}$를 만족하므로 $f(n)=8$이다.
  이제 n의 값을 찾아보자.
- 조건에 의해 n의 개수가 2개이므로 $y=f(x)=-(x-2)^2+k$와 $y=f(n)=8$인 직선을 그리면 아래와 같다.



자연수 n이 되는 유일한 점

- $f(x)$의 최댓값은 $x=2$에서 형성되므로 n의 자연수 조건을 떠올려보면 교점은 $n=1$, $n=3$이 가능하다.
  즉, 함수는 $(1,8)$ 또는 $(3,8)$을 지나야 한다.

STEP3 답 구하기

$x=1$에 대입하면 $f(1)=-(1-2)^2+k=8$이므로
$k=9$가 된다.

유형 03 지수방정식/부등식

01 2023년 실시 6월 16번 정답률 88%

16. 부등식 $2^{x-6} \le \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

정 답 3

해 설

$2^{x-6} \le 2^{-2x}$에서 $3x \le 6$이므로 모든 자연수 x의 값은 1, 2이고 합은 3이다.

02 2023년 실시 수능 16번 정답률 84%

16. 방정식 $3^{x-8} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$ 을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

정 답 2

해 설

$3^{x-8} = 3^{-3x}$에서 $x-8 = -3x$, $4x = 8$, $x = 2$이다.

03 2023년 실시 9월 14번 정답률 46%

14. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+a}+b & (x\le -8) \\ -3^{x-3}+8 & (x>-8) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

> 집합 $\{f(x)\mid x\le k\}$의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $3\le k<4$이다.

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

정 답 ②

해 설

$\{f(x)\mid x\le k\}$가 뭔지 알아보자.

이건 "x가 k 이하인 모든 숫자들을 넣어서 나온 값들을 모아놓은 상자"라고 생각하면 이해가 편할거야.

그 상자에서 우리가 찾는 건 정수야. (정수는 -2, -1, 0 같은 수)

문제에서 상자 안에 정수가 2개만 있어야 한다고 나와있어.

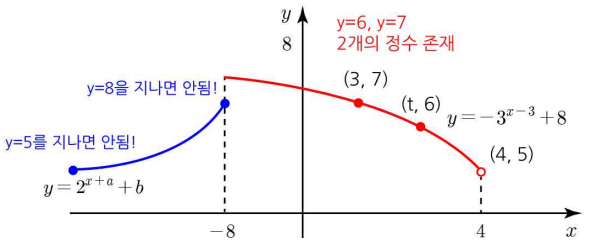
그리고 k의 범위에 따라 상황을 해석하면 끝이야!

STEP1 $t<k<4$일 때 (단, t는 $f(t)=6$을 만족한다.)

$y=-3^{x-3}+8$은 두 개의 정수 $y=6$, $y=7$를 갖고 있으므로 $y=2^{x+a}+b$는 $y=5$를 가지면 안돼.

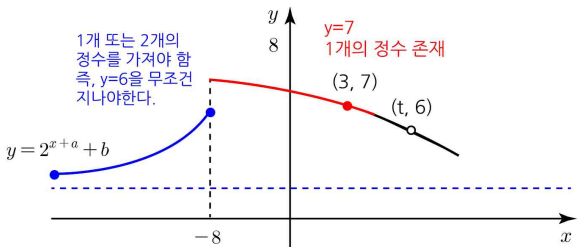
$\{f(x)\mid x\le k\}$가 3개가 돼서 조건을 만족하지 않기 때문이지.

따라서 $y=2^{x+a}+b$의 점근선은 $y=5$이므로 $b=5$야.



STEP2 $3\le k<t$일 때

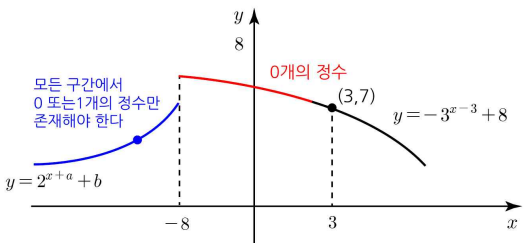
$y=2^{x+a}+5$는 $x=-8$에서 $6<2^{-8+a}+5$을 만족해야 해.



STEP3 $k<3$일 때

$k<3$일 때 $y=-3^{x-3}+8$은 0개의 정수를 갖고 있으므로

$y=2^{x+a}+5$는 0 또는 1개의 정수만 가질 수 있어.



즉, $x=-8$에서 함숫값이 최대 7보다는 작아야겠지?

(7이되면 함숫값을 6, 7을 가지니까 안되겠지.)

STEP2의 조건과 합치면 $6<2^{-8+a}+5<7$에서 $a=8$이야.

따라서 $a+b=13$이야.

유형 04 지수함수와 직선의 만남

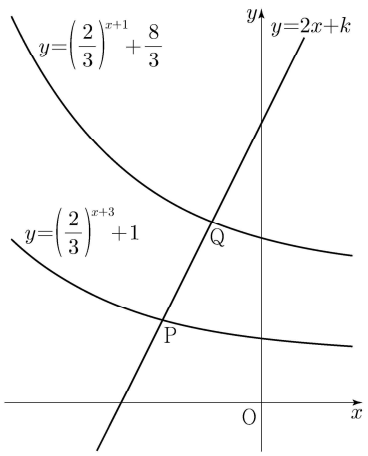
01 2021년 실시 수능 9번 정답률 65%

9. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=\sqrt{5}$ 일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$



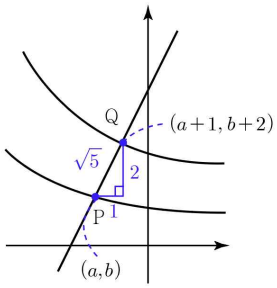
정 답 ④

해 설

직선의 k의 값을 구하려면 P or Q의 좌표를 대입하면 된다.
따라서 좌표를 만드는 것을 최우선 목표로 하자.

STEP1 조건의 분석

- $\overline{PQ}=\sqrt{5}$이고, 직선의 기울기가 2이므로
  PQ의 x축 거리는 1, y축 거리는 2가된다.
  $P(a,b)$라고 하면, $Q(a+1,b+2)$가 된다.



- 함수에 대입하면 미지수 2개, 식 2개라서 a, b가 나와 풀린다.

$b=\left(\frac{2}{3}\right)^{a+3}+1$, $b+2=\left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}+\frac{8}{3}$을 b로 연립하자.

$\left(\frac{2}{3}\right)^{a+3}+1=\left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}+\frac{2}{3}$ → $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}=\frac{1}{3}$이 성립하려면

$a=-2$이고, $b=\frac{5}{3}$이 된다.

STEP2 답 구하기

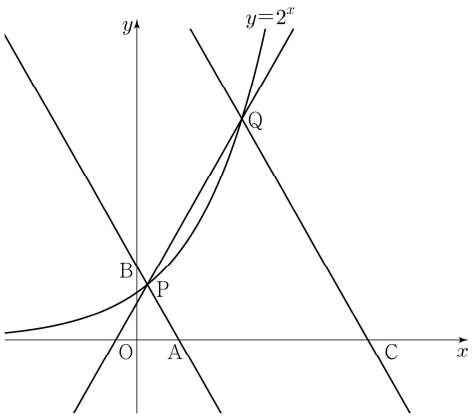
$y=2x+k$에 대입하면 $\frac{5}{3}=-4+k$에서 $k=\frac{17}{3}$이다.

02 2022년 실시 9월 21번 정답률 18%

21. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a, 2^a)$, $\mathrm{Q}(b, 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

$$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}},\quad \overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$$

일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$) [4점]



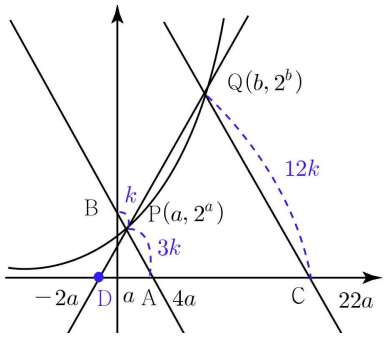
정 답 220

해 설

조건을 통해 좌표를 표기하고, 도형의 닮음을 이용한다.
(기울기가 m, $-m$인 두 직선이 나오므로 닮음을 생각했다.)

STEP1 조건 분석

- $\mathrm{P}(a, 2^a)$이고, BP, BA의 거리비가 $1:4$이므로 A의 x좌표는 $4a$이다. 이등변삼각형이므로 임의의 점 D는 $-2a$이다.



STEP2 닮음 분석

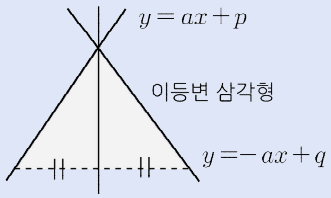
- 조건을 통해 PA, QC의 거리비가 $3k:12k=1:4$ 닮음이므로 x축 닮음은 $\mathrm{DA}:\mathrm{DC}=1:4$이고, C는 $22a$이다. → $b=10a$
- y축 닮음은 $2^a:2^{10a}=1:4$이다.

  $2^{10a}=2^{a+2}$에서 $a=\frac{2}{9}$이고, $a+b=11a=\frac{22}{9}$이다.

  $\therefore 90\times(a+b)=220$

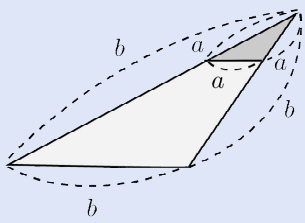
TIP 기울기의 나눗셈이 -1일 때 삼각형

기울기가 a인 직선과 기울기가 $-a$인 직선이 서로 만나서 만드는 삼각형은 이등변 삼각형이다.



TIP 도형 안에 도형이 있을 때

아래 그림과 같이 임의의 도형(삼각형)이 있을 때 각 성분에 대해서 비례 관계를 갖는다.



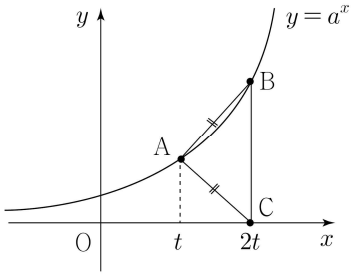
03 2025년 실시 9월 12번 정답률 89%

12. 상수 $a\,(a>1)$과 양수 t에 대하여 곡선 $y=a^x$과 두 직선 $x=t$, $x=2t$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. $\overline{AB}=\overline{AC}$이고 삼각형 ACB의 넓이가 8일 때, $a\times t$의 값은? [4점]

① $2^{\frac{9}{4}}$ ② $2^{\frac{23}{8}}$ ③ $2^{\frac{7}{2}}$
④ $2^{\frac{33}{8}}$ ⑤ $2^{\frac{19}{4}}$

정 답 ①

해 설



세 점의 좌표를 표현하면, $A(t,a^t)$, $B(2t,a^{2t})$, $C(2t,0)$이다.

위의 그림에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이려면 A의 y좌표가 B의 y좌표의 절반이므로, $a^{2t}=2a^t$이다.

따라서, $a^t=2$이다.

삼각형 ACB의 밑변의 길이인 $\overline{BC}=a^{2t}=4$이고, 높이는 t이다.

삼각형 ACB의 넓이가 8이므로 $t=4$, $a=2^{\frac{1}{4}}$이다.

따라서, $a\times t=2^{\frac{9}{4}}$이다.

04 2025년 실시 수능 10번 정답률 82%

10. 상수 $a\,(a>1)$에 대하여 곡선 $y=a^x-2$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 B, 곡선 $y=a^x-2$의 점근선과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=\overline{BC}$이고 삼각형 AOC의 넓이가 8일 때, $a\times\overline{OB}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $2^{\frac{13}{6}}$ ② $2^{\frac{7}{3}}$ ③ $2^{\frac{5}{2}}$ ④ $2^{\frac{8}{3}}$ ⑤ $2^{\frac{17}{6}}$

정 답 ③

해 설

A의 좌표를 (k,a^k-2)라 하자.

B의 좌표는 $(k,0)$, C의 좌표는 $(k,-2)$이다.

$\overline{AB}=\overline{BC}$이므로 $a^k-2=2$이다.

삼각형 AOC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{OB}=\frac{1}{2}\times4\times k$이다.

따라서, $2k=8$이므로 $k=4$이다.

$a^4=4$이므로 $a=\sqrt{2}$이고, $\overline{OB}=k=4$이다.

따라서, $a\times\overline{OB}=2^{\frac{5}{2}}$이다.

유형 05 로그의 단순 계산

01 2021년 실시 6월 16번 정답률 90%

16. $\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 2

해 설

$\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24 = \log_4 (\frac{2}{3} \times 24) = \log_4 16 = 2$

02 2021년 실시 9월 16번 정답률 91%

16. $\log_2 100 - 2\log_2 5$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 2

해 설

$\log_2 100 - 2\log_2 5 = \log_2 \frac{100}{25} = 2$

03 2021년 실시 수능 13번 정답률 52%

13. 두 상수 a, $b\,(1 < a < b)$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과 두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다. 함수 $f(x) = a^{bx} + b^{ax}$에 대하여 $f(1) = 40$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

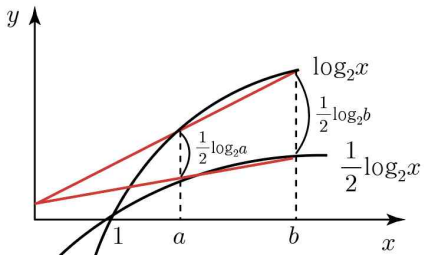
① 760 ② 800 ③ 840 ④ 880 ⑤ 920

정 답 ④

해 설

STEP1 두 직선의 y절편의 값이 같다.

- $(a, \log_4 a)$는 $(a, \frac{1}{2}\log_2 a)$와 같다.
- $\log_2 x$에 대한 직선과 $\frac{1}{2}\log_2 x$에 대한 직선을 그려보자.



- 두 직선과 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 두 삼각형은 닮음이다. 닮음이므로 높이인 x의 비율은 밑변의 길이인 y의 비율과 같다.

  $a : b = \frac{1}{2}\log_2 a : \frac{1}{2}\log_2 b$이고, $b\log_2 a = a\log_2 b$에서

  $a^b = b^a$가 된다.

STEP2 $f(1) = 40$

$f(1) = a^b + b^a = 40$에서 $a^b = b^a = 20$이다.

따라서 $f(2) = a^{2b} + b^{2a} = (a^b)^2 + (b^a)^2 = 800$이다.

04 2021년 실시 수능 16번 정답률 88%

16. $\log_2 120 - \frac{1}{\log_{15} 2}$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 3

해 설

$\log_2 120 - \frac{1}{\log_{15} 2} = \log_2 120 - \log_2 15 = \log \frac{120}{15} = \log_2 8 = 3$

05 2022년 실시 6월 21번 정답률 28%

21. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

정 답 426

해 설

STEP1 본 식 정리하기

$4\log_{64}(\frac{3}{4n+16}) = 4\log_{2^6}(\frac{3}{4n+16}) = \frac{2}{3}\log_2(\frac{3}{4n+16}) = k$

$\frac{3}{4n+16} = 2^{\frac{3}{2}k}$를 n에 대해서 정리하면, $n = 3\times 2^{-\frac{3}{2}k-2} - 4$

STEP2 k의 조건

• n이 자연수가 되려면 k는 절댓값이 2의 배수인 음수이다.

• k의 값에 따른 n을 찾으면 아래와 같다.

$k=-2$: $n = 3\times 2^{3-2} - 4 = 2$

$k=-4$: $n = 3\times 2^{6-2} - 4 = 44$

$k=-6$: $n = 3\times 2^{9-2} - 4 = 380$

$k=-8$: $n = 3\times 2^{12-2} - 4 = 3\times 1024 - 4$ (X)

$\therefore n = 2+44+380 = 426$이다.

06 2023년 실시 9월 7번 정답률 89%

7. 두 실수 a, b가

$$3a+2b=\log_3 32, \quad ab=\log_9 2$$

를 만족시킬 때, $\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{25}{12}$

정 답 ④

해 설

$\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b} = \frac{3a+2b}{6ab} = \frac{\log_3 32}{6\log_9 2} = \frac{5\log_3 2}{3\log_3 2} = \frac{5}{3}$

07 2023년 실시 수능 9번 정답률 70%

9. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_5 3)$, $\mathrm{Q}(\log_5 12)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1일 때, 4^m의 값은? (단, m은 $0<m<1$인 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

정 답 ④

해 설

내분점은 $\frac{m\log_5 12+(1-m)\log_5 3}{m+(1-m)} = 1$을 만족한다.

$m\log_5 12+(1-m)\log_5 3 = 1$

$m(\log_5 12-\log_5 3) = 1-\log_5 3$

$m = \frac{1-\log_5 3}{\log_5 \frac{12}{3}} = \frac{\log_5 \frac{5}{3}}{\log_5 4} = \log_4 \frac{5}{3}$

$\therefore 4^m = 4^{\log_4 \frac{5}{3}} = (\frac{5}{3})^{\log_4 4} = \frac{5}{3}$

08 2024년 실시 6월 14번 정답률 29%

14. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

> $\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)$의 값이 양수가 되도록 하는 자연수 n의 개수가 12이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

정 답 ④

해 설

STEP1 본 식의 조건

- $-n^2+10n+75>0$, n이 자연수이다. → $0<n<15$ (식1)
- $75-kn>0$ → $0<n<\frac{75}{k}$ (식2)

STEP2 로그의 값이 양수

$\log_4(-n^2+10n+75)-\log_4(75-kn)>0$이므로

$-n^2+10n+75>75-kn$이다. 이 식을 정리하면

$n^2-(k+10)n<0$에서 $0<n<k+10$이다. (식3)

STEP3 대입

- 위의 식2와 식3의 공통 범위로 범위가 결정된다.
- $k+10\le\frac{75}{k}$이면 $k+10$에 의해 범위가 결정되므로 자연수 n의 개수가 12개이려면 $k=3$만 가능하다.
- $k+10>\frac{75}{k}$이면 $\frac{75}{k}$에 의해 범위가 결정되므로 자연수 n의 개수가 12개이려면 $k=6$만 가능하다.

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은 9이다.

09 2024년 실시 9월 8번 정답률 72%

8. $a>2$인 상수 a에 대하여 두 수 $\log_2 a$, $\log_a 8$의 합과 곱이 각각 4, k일 때, $a+k$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

정 답 ①

해 설

- $\log_2 a=x$라고 가정하자. $\log_a 8=\frac{\log_2 8}{\log_2 a}=\frac{3}{x}$이다. (단, $a>2$이므로 $x>1$이다.)
- $\log_2 a+\log_2 8=x+\frac{3}{x}=4$를 정리하면 $x=1$ 또는 $x=3$인데, 조건에 의하여 $x=3$이다. 따라서 $a=8$이다.
- $\log_2 a\times\log_a 8=x\times\frac{3}{x}=3=k$이다. 따라서 $a+k=11$이다.

10 2024년 실시 수능 8번 정답률 73%

8. 두 실수 $a=2\log\frac{1}{\sqrt{10}}+\log_2 20$, $b=\log 2$에 대하여 $a\times b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ①

해 설

$a=\log_2 10$으로 정리가 가능하다.

따라서 $a\times b=1$이다.

유형 06 로그함수

01 2021년 실시 6월 10번 정답률 73%

10. $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x, \quad y=-\log_n(x+3)+1$$

이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

정 답 ②

해 설

$\log_n x = -\log_n(x+3)+1 = \log_n \frac{n}{x+3} \rightarrow x^2+3x=n$

$x=1$이면 $n=4$이다.

$x=2$이면 $n=10$이다.

양 끝은 안되므로 $n=5,6,7,8,9$이다. $\frac{5+9}{2}\times 5=35$이다.

02 2022년 실시 6월 16번 정답률 89%

16. 방정식 $\log_2(x+2)+\log_2(x-2)=5$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

정 답 6

해 설

$\log_2(x+2)+\log_2(x-2)=\log_2(x^2-4)=5$에서 $x^2-4=2^5$

$x^2=36$에서 $x=\pm 6$이다.

진수 조건에서 $x>2$이다. 따라서 $x=6$이다.

03 2022년 실시 9월 16번 정답률 87%

16. 방정식 $\log_3(x-4)=\log_9(x+2)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

정 답 7

해 설

$\log_3(x-4)^2=\log_3(x+2)$, $x^2-8x+16=x+2$

$x^2-9x+14=(x-2)(x-7)=0$에서 $x=2$, $x=7$이다.

진수조건이 $x>4$이므로 $x=7$이다.

04 2022년 실시 수능 16번 정답률 84%

16. 방정식

$$\log_2(3x+2)=2+\log_2(x-2)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

정 답 10

해 설

$\log_2\left(\frac{3x+2}{x-2}\right)=2$에서 $\frac{3x+2}{x-2}=4$, $3x+2=4x-8$, $x=10$

진수조건은 $x>2$이므로 $x=10$이다.

05 2023년 실시 6월 7번 정답률 82%

7. 상수 $a\,(a>2)$에 대하여 함수 $y=\log_2(x-a)$의 그래프의 점근선이 두 곡선 $y=\log_2\frac{x}{4}$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB}=4$일 때, a의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

정 답 ③

해 설

$y=\log_2(x-a)$의 점근선은 $x=a$이다.

$A\left(a,\log_2\frac{a}{4}\right)=(a,\log_2 a-2)$

$B\left(a,\log_{\frac{1}{2}}x\right)=(a,-\log_2 a)$

$\overline{AB}=2\log_2 a-2=4$에서 $\log_2 a=3$이고, $a=8$이다.

06 2023년 실시 9월 16번 정답률 90%

16. 방정식 $\log_2(x-1)=\log_4(13+2x)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

정 답 6

해 설

$\log_2(x-1)=\log_4(13+2x)$, $(x-1)^2=13+2x$에서

$x^2-4x-12=(x+2)(x-6)=0$이고, $x=6$이다.

07 2023년 실시 수능 21번 정답률 38%

21. 양수 a에 대하여 $x \geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

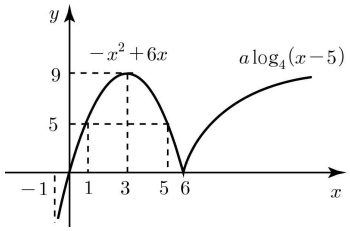
$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x & (-1 \leq x < 6) \\ a\log_4(x-5) & (x \geq 6) \end{cases}$$

이다. $t \geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1, t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

정 답 10

해 설

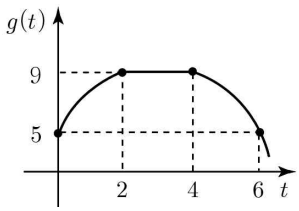
STEP1 제시된 함수 $f(x)$에 대한 t의 해석



• $t \geq 0$인 실수 t에 대하여 $t-1 \leq x \leq t+1$의 의미를 생각하면 $x=-1$부터 2칸의 연속적 닫힌 구간을 만드는 것을 알 수 있다.

STEP2 닫힌 구간의 해석

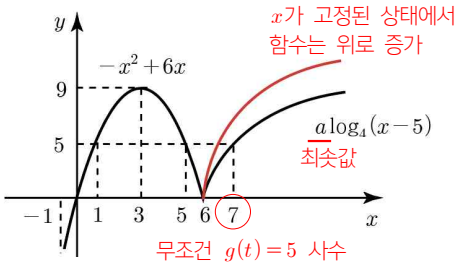
• 왼쪽의 이차함수에 대해서 분석해보자.
$g(t)$값은 $g(0)=5$에서 출발해 값이 증가하다가 $t=2$~4까지 $g(t)=9$이고, $t>4$부터 계속 이차함수로 감소한다.



$t>6$에 대하여 왼쪽 이차함수에 대한 최댓값은 5보다 작아진다.

• 로그함수의 a가 최솟값을 가지면 함수의 기울기는 작아진다.

• $t=6$, $[5,7]$이라는 x구간에 대해서 생각해보면
x가 허용된 범위내에서 최대한 멀리있을수록 a가 작아지므로



따라서 $a\log_4(x-5)$는 $(7,5)$를 지나야 a가 최솟값을 가지므로
$a=10$이다.

08 2024년 실시 6월 16번 정답률 78%

16. 방정식 $\log_2(x+1)-5=\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

정 답 7

해 설

$\log_2(x+1)+\log_2(x-3)-5=0$

$\log_2(x+1)(x-3)-\log_2 32=0$이고, $x^2-2x-3=32$이다.

따라서 $(x+5)(x-7)=0$에서 $x=7$이다.

09 2024년 실시 9월 16번 정답률 88%

16. 방정식

$$\log_3(x+2)-\log_{\frac{1}{3}}(x-4)=3$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

정 답 7

해 설

$\log_3(x+2)(x-4)=3$을 만족해야 하므로

$x^2-2x-8=27$에서 $x=-5$, $x=7$이므로 $x=7$이다.

10 2025년 실시 6월 10번 정답률 91%

10. 실수 $a\,(a>1)$에 대하여
곡선 $y=\log_a(x+3)$이 곡선 $y=\log_a(-x+3)$과 만나는 점을 A,
곡선 $y=\log_a(x+3)$이 x축과 만나는 점을 B,
곡선 $y=\log_a(-x+3)$이 x축과 만나는 점을 C라 하자.
삼각형 ABC가 정삼각형일 때, a의 값은? [4점]

① $3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$ ② $3^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$ ③ $3^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ ④ $3^{\frac{5\sqrt{3}}{12}}$ ⑤ $3^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

정 답 ①

해 설

A는 $y=\log_a(x+3)$와 $y=\log_a(-x+3)$가 만나는 점이므로 $(0, \log_a 3)$이다.
B는 $y=\log_a(x+3)$와 x축이 만나는 점이므로 $(-2, 0)$이다.
C는 $y=\log_a(-x+3)$와 x축이 만나는 점이므로 $(2, 0)$이다.
삼각형 ABC는 정삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=4$이다.
$\overline{AB}=4$이므로 $\log_a 3=2\sqrt{3}$이다.
따라서, $a=3^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}=3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$이다.

11 2025년 실시 6월 16번 정답률 97%

16. 방정식 $\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=\log_{25}9$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

정 답 2

해 설

$\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=\log_5(x+1)(x-1)$이다.
$\log_{25}9=\frac{1}{2}\log_5 9=\log_5 3$이다.
$\log_5(x^2-1)=\log_5 3$이므로 $x=2, -2$이다.
로그 문항에서는 반드시 습관적으로 밑과 진수 조건을 고려하자.
$x+1>0, x-1>0$이므로 $x>1$이다.
따라서, $x=2$이다.

12 2025년 실시 9월 8번 정답률 94%

8. 두 양수 a, b가

$$\log_{\sqrt{2}}a+\log_2 b=2,\quad \log_2 a+\log_2 b^2=7$$

을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

정 답 ③

해 설

$\log_{\sqrt{2}}a+\log_2 b=2\log_2 a+\log_2 b=2$이다.
$\log_2 a+\log_2 b^2=\log_2 a+2\log_2 b=7$이다.
두 식을 더하면 $\log_2 a+\log_2 b=3$이다.
$\log_2 a+\log_2 b=\log_2 ab=3$이므로 $ab=8$이다.

13 2025년 실시 수능 6번 정답률 91%

6. 1보다 큰 두 실수 a, b가

$$\log_a b = 3, \quad \log_3 \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $\log_9 ab$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

정 답 ②

해 설

$\log_a b = 3$이므로 $b = a^3$이다.

$\log_3 \frac{b}{a} = \log_3 a^2 = \frac{1}{2}$이다.

따라서, $\log_3 a = \frac{1}{4}$이고, $a = 3^{\frac{1}{4}}$이다.

$b = 3^{\frac{3}{4}}$이므로 $ab = 3$이다.

따라서, $\log_9 ab = \frac{1}{2}$이다.

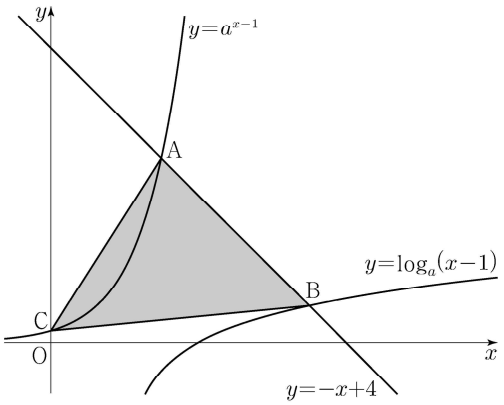
유형 07 지수함수와 로그함수의 그래프

01 2021년 실시 9월 21번 정답률 17%

21. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1},\quad y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]



정 답 192

해 설

본 함수의 $x-1$을 보고서 a^x, $\log_a x$를 $+1$만큼 평행이동을 시켰다고 해석하며 역함수 관계를 만들자.

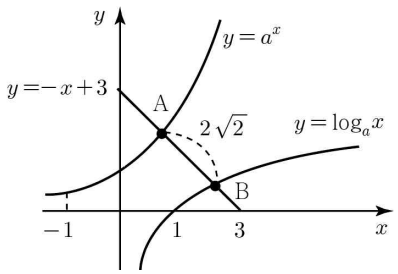
(단, $y=a^{x-1}$와 $y=\log_a(x-1)$는 역함수 관계가 아니다.

$y=a^{x-1}$의 역함수는 $y=\log_a x+1$이다.)

STEP1 문제의 분석

- ABC의 넓이는 밑변의 길이 $=2\sqrt{2}$가 조건으로 제시되어 있으므로 높이인 $y=-x+3$과 점 C 사이의 거리를 알면 된다.
- 점 C의 좌표는 a를 모르기에 풀 수 없으므로 찾아보자.

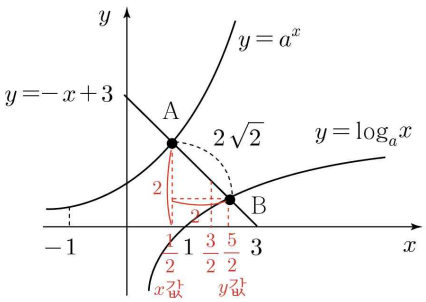
STEP2 좌표 찾기



- A와 B는 $y=x$에 대해 대칭이므로 $\overline{AB}$의 중점은 $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$이고,

AB사이의 거리가 $2\sqrt{2}$이므로 $x_A=\frac{1}{2}$, $x_B=\frac{5}{2}$이다.

따라서 $A(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$이므로 $a=\frac{25}{4}$이다.



- $C(-1,\frac{4}{25})$와 $x+y-3=0$의 거리는 $d=\frac{|-\frac{21}{25}-3|}{\sqrt{2}}=\frac{96}{\sqrt{2}}$이다.

$$\therefore 50\times S=50\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{\frac{96}{25}}{\sqrt{2}}=192$$

02 2022년 실시 수능 21번 정답률 28%

21. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}|3^{x+2}-n| & (x<0)\\ |\log_2(x+4)-n| & (x\geq 0)\end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

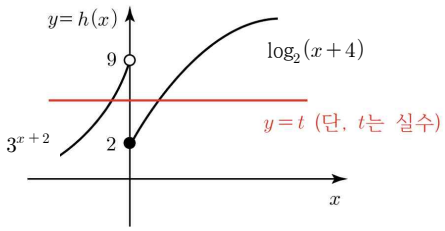
정 답 33

해 설

$f(x)$의 형태를 보면 본 식을 $h(x)$로 설정하고, $y=n$에서 접어올리는 형태임을 알 수 있다.

· $h(x)=\begin{cases}3^{x+2} & (x<0)\\ \log_2(x+4) & (x\geq 0)\end{cases}$, $f(x)=|h(x)-n|$로 가정하자.

(가정할 식은 최대한 심플하게 설정하자.) ($f(x)$는 $y=n$에서 접어올린다.)



· 접어올림에 대한 생각

I) $n\leq 2$에서 접힌다면 서로 다른 실근의 최댓값은 3개이다. (X)

II) $2<n<9$에서 접힌다면 서로 다른 실근의 최댓값은 4개이다. (O)

III) $9\leq n$에서 접힌다면 서로 다른 실근의 최댓값은 2개이다. (X)

따라서 $n=3,4,\cdots,8$이고, 등차수열에 의해 $\frac{3+8}{2}\times 6=33$이다.

03 2023년 실시 6월 21번 정답률 16%

21. 실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자.

<보기>의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오. (단, $A+B+C\neq 0$) [4점]

- 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다.
- 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다.
- 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$, 거짓이면 $C=0$이다.

<보 기>

ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다.

ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.

ㄷ. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t)\geq t$이다.

정 답 110

해 설

형식이 새롭다. 하지만 객관식을 서술형으로 억지로 바꾼 것이다.

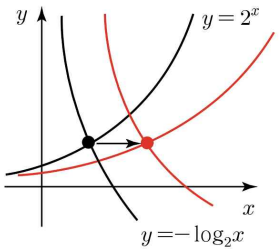
또한 $y=2^{x-t}$의 역함수는 $y=t+\log_2 x$이다.

(ㄱ.) $f(t)=x_{\text{교점}}$임을 인지하며 문제를 접근하자.

- $f(1)=1$은 $t=1$일 때 교점의 x는 $x=1$인지를 묻고 있다.
  $y=1-\log_2(1)=2^{1-1}=1$이므로 성립한다.
- $f(2)=2$은 $t=2$일 때 교점의 x는 $x=2$인지를 묻고 있다.
  $y=2-\log_2(2)=2^{2-2}=1$이므로 성립한다. (O)

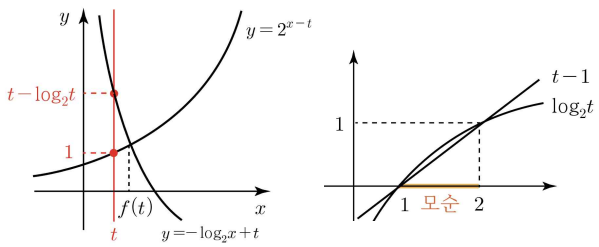
(ㄴ) t의 증가에 따른 $f(t)$의 증가를 묻고있다.

t가 증가하면 $y=2^{x-t}$는 오른쪽으로 이동하고, $y=t-\log_2 x$는 위쪽으로 이동한다. 그러면 교점 또한 오른쪽으로 이동한다. (O)



(ㄷ) $f(t)\geq t$의 진짜 의도를 확인해보자.

- $f(t)=x\geq t$가 될 조건은 $x=t$에서 $y=-\log_2 x+t$가 $y=2^{x-t}$보다 위에 있어야한다. (아래 그래프 참조)
- 즉, t를 대입하면 항상 $t-\log_2 t\geq 1$인 지를 묻고 있다. (의도)
  편의상 $\log_2 t\leq t-1$로 변형해서 확인해보자.

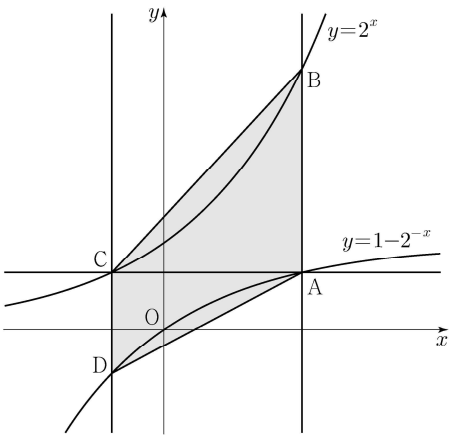


t에 따라 그림을 그려보면 $1<t<2$에서 모순이 발생한다.

따라서 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t)\geq t$이지는 않다. (X)

04 2024년 실시 6월 12번 정답률 26%

12. 그림과 같이 곡선 $y=1-2^{-x}$ 위의 제1사분면에 있는 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x}$과 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x}$과 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡신 $y=1-2^{-x}$과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AB}=2\overline{CD}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]



① $\frac{5}{2}\log_2 3-\frac{5}{4}$ ② $3\log_2 3-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$

④ $4\log_2 3-2$ ⑤ $\frac{9}{2}\log_2 3-\frac{9}{4}$

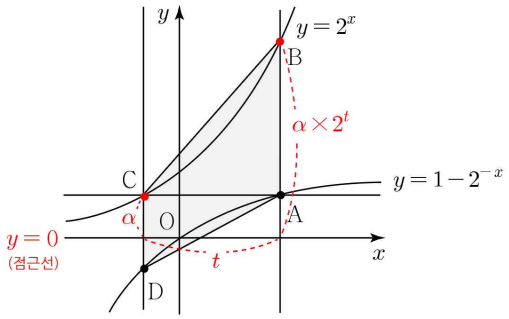
정 답 ③

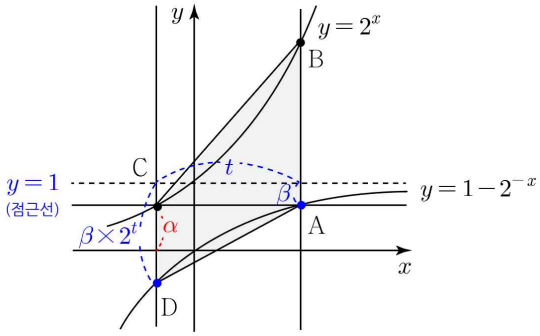
해 설

두 지수 함수가 제시되어 있으므로 지수 함수의 원리를 적용해보겠다. (뭐든 출제를 했으면 이유가 있을테니..★)

그림과 같이 함수의 점근선($y=2^{x}$의 점근선은 $y=0$이고, $y=1-2^{-x}$의 점근선은 $y=1$이다.)을 생각해본 다음에, 각자의 점근선과 점의 떨어진 거리를 각각 α, β로 설정할 수 있다.

(사각형의 넓이는 $S=\frac{1}{2}(\overline{CD}+\overline{AB})\overline{AC}$이므로 각 요소를 구해보자.)





그림을 통하여 $\overline{AB}=\alpha(2^{t}-1)$, $\overline{CD}=\beta(2^{t}-1)$을 만족하고, 조건($\overline{AB}=2\overline{CD}$)에 의하여 $\alpha=2\beta$이다.

이때 $y=\alpha+\beta=1$(점근선 참조)이므로 $\beta=\frac{1}{3}$, $\alpha=\frac{2}{3}$이다.

$C=(\log_2\frac{2}{3},\frac{2}{3})$을 만족하므로 $A=(\log_2 3,\frac{2}{3})$, $B=(\log_2 3,3)$이다.

$3=\frac{2}{3}\times 2^{t}$에서 $2^{t}=\frac{9}{2}$, $t=2\log_2 3-1$이다.

$\overline{AB}=\alpha(2^{t}-1)=\frac{2}{3}\left(\frac{9}{2}-1\right)=\frac{7}{3}$, $\overline{CD}=\beta(2^{t}-1)=\frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}-1\right)=\frac{7}{6}$

따라서 모든 값을 대입해보면

$ABCD=\frac{1}{2}(\frac{7}{3}+\frac{7}{6})(2\log_2 3-1)=\frac{7}{4}(2\log_2 3-1)$

$=\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$이다.

05 2023년 실시 9월 14번 정답률 26%

14. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 직선 A_nB_n의 기울기는 3이다.
>
> (나) $\overline{A_nB_n}=n\times\sqrt{10}$

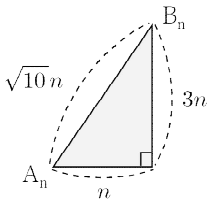
중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 x_n이라 하자. $x_1+x_2+x_3$의 값은? [4점]

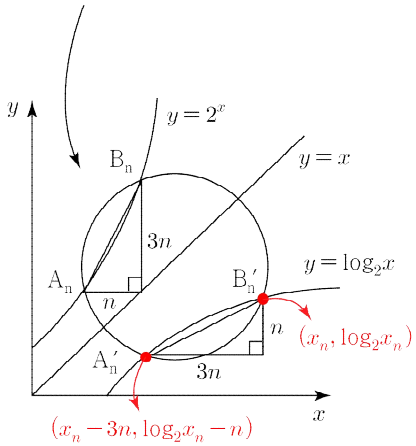
① $\frac{150}{7}$ ② $\frac{155}{7}$ ③ $\frac{160}{7}$ ④ $\frac{165}{7}$ ⑤ $\frac{170}{7}$

정 답 ③

해 설

조건 (가), (나)를 그리면 아래 삼각형과 같다.





따라서 A_n'을 통하여 $\log_2 x_n - n = \log_2(x_n-3n)$임을 알 수 있다.

$n=1$) $\frac{x_1}{2}=x_1-3$에서 $x_1=6$이다.

$n=2$) $\frac{x_2}{4}=x_2-6$에서 $x_2=8$이다.

$n=3$) $\frac{x_3}{8}=x_3-9$에서 $x_3=\frac{72}{7}$이다.

$x_1+x_2+x_3=\frac{170}{7}$이다.

06 2024년 실시 수능 20번 정답률 6%

20. 곡선 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$과 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표를 k라 하자. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $x>k$인 모든 실수 x에 대하여
> $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$이고 $f(f(x))=3x$이다.

$f\left(\frac{1}{k^3\times 5^{3k}}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

정 답 36

해 설

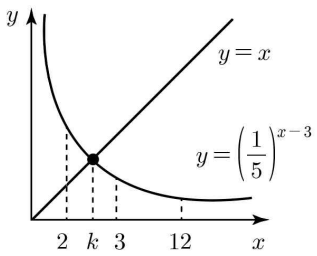
STEP1 주어진 식 변형하기

$(\frac{1}{5})^{k-3}=5^{3-k}=k$에서 $5^3=5^k\times k$이고 $5^9=5^{3k}\times k^3$이다. (식1)

구해야하는 값은 $f(\frac{1}{k^3\times 5^{3k}})=f(5^{-9})$와 같다.

STEP2 값 구하기

우선 상수 k의 값을 찾기 위하여 $x=2$와 $x=3$을 식1에 대입해보면 $2<k<3$임을 알 수 있다.



$f(5^{-9})=f(f(x))$를 만족하는 x의 값은 12이다. ($x>k$ 만족함)

따라서 $f(\frac{1}{k^3\times 5^{3k}})=f(5^{-9})=36$이다.

07 2025년 실시 6월 22번 정답률 10%

22. $k>1$인 실수 k에 대하여 두 곡선

$$y=2^x+\frac{k}{2},\quad y=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$$

가 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-2}-3$과 만나는 점을 B라 하자.

삼각형 AOB의 넓이가 16일 때, $k+\log_2 k=\frac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정 답 38

해 설

STEP1 교점인 A의 좌표 구하기

먼저, 교점 A의 좌표를 구하자.

$2^x+\frac{k}{2}=k\times(\frac{1}{2})^x+k-2$이다.

양변에 2^x을 곱하면, $2^{2x}+(2-\frac{k}{2})2^x-k=0$이다.

인수분해하면 $(2^x-\frac{k}{2})(2^x+2)=0$이고, $x=\log_2(\frac{k}{2})$이다.

A의 좌표는 $(\log_2\frac{k}{2},k)$이다.

A를 지나고 기울기가 -1인 직선은 $y=-(x-\log_2\frac{k}{2})+k$이다.

STEP2 B의 좌표에 대한 식을 세워 넓이 조건 활용하기

B의 좌표를 $(t,2^{t-2}-3)$이라 하자.

B는 $y=-(x-\log_2\frac{k}{2})+k$ 위의 점이므로 $t+2^{t-2}-3=k+\log_2\frac{k}{2}$이다.

$t+2^{t-2}-3=k+\log_2 k-1$이고, $2^{t-2}+t-2=k+\log_2 k$이다.

위의 식이 성립하려면, $2^{t-2}=k$이다.

따라서, B의 좌표는 $(2+\log_2 k,k-3)$이다.

$\overline{AB}=3\sqrt{2}$이고, 삼각형 AOB의 넓이가 16이므로 O와 직선 AB의 거리는 $\frac{16\sqrt{2}}{3}$이다.

따라서, 직선 AB는 $y=-x+\frac{32}{3}$이다.

$y=-(x-\log_2\frac{k}{2})+k$이므로 $k+\log_2 k-1=\frac{32}{3}$이다.

$k+\log_2 k=\frac{35}{3}$이다.

08 2025년 실시 9월 22번 정답률 26%

22. 곡선 $y=\log_2 x$ 위에 서로 다른 두 점 A, B가 있다.
점 A에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 P라 하고,
점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때,
네 점 A, B, P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) (직선 AP의 y절편) − (직선 BQ의 y절편) $=\frac{13}{2}$
>
> (나) 직선 AB의 기울기는 $\frac{6}{7}$이다.

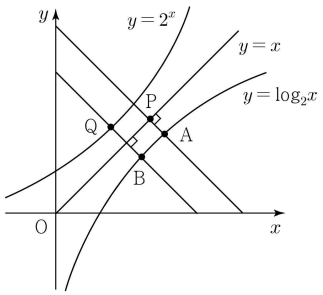
사각형 APQB의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정 답 73

해 설

그동안 많이 강조했던 요소가 많이 포함된 전형적인 지수로그 그래프 문항이다. 숫자로 제시된 조건이 많아 그림을 그려서 풀면 어렵지 않게 따라갈 수 있었을 만한 문항이다.

STEP1 그래프를 그리고 조건 표현하기



(가)에서 직선 AP의 y절편이 더 크기 때문에 A가 B보다 x좌표가 큰 점임을 알 수 있다.

STEP2 박스 내부 조건을 이용하여 좌표 찾기

직선 AP와 직선 BQ 모두 기울기가 -1인 직선이므로 두 직선의 y절편은 각각 점 A와 점 B의 (x좌표+y좌표) 값과 같다.
강조했던 x축, y축과 나란한 직선 긋기를 통해 두 점의 좌표를 표현해보자.
그림에서, A와 B의 x좌표 차이를 $7k$라 하면, y좌표 차는 $6k$이다.
따라서, 점 A와 점 B의 (x좌표+y좌표) 값의 차이는 $13k$가 되고, $13k=\frac{13}{2}$이므로 $k=\frac{1}{2}$이다.
로그함수에서 y좌표의 차이는 x좌표의 비율이 된다. B의 좌표를 $(b, \log_2 b)$라 하면, A의 좌표는 $(b+\frac{7}{2}, \log_2 b+3)$이므로 $8b=b+\frac{7}{2}$이고, $b=\frac{1}{2}$이다.

따라서, 점의 좌표는 $\mathrm{B}(\frac{1}{2},-1)$, $\mathrm{A}(4,2)$, $\mathrm{P}(3,3)$, $\mathrm{Q}(-1,\frac{1}{2})$이다.

사다리꼴 APQB의 넓이를 구하면, $\frac{1}{2}\frac{13\sqrt{2}}{4}(\sqrt{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2})=\frac{65}{8}$이다.

09 2025년 실시 수능 22번 정답률 15%

22. 곡선 $y=\log_{16}(8x+2)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a, b)$와 곡선 $y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$ 위의 점 B가 제 1 사분면에 있다. 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 직선 OB 위에 있고 선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(\frac{77}{8}, \frac{133}{8}\right)$일 때, $a\times b=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정 답 457

해 설

이 문항은 좌표를 설정하여 풀이를 시작하면 식 정리 과정에서 시간 소요가 길고, 해결 방법이 눈에 잘 안들어올 가능성이 높다. $y=x$대칭, 로그함수와 지수함수가 함께 나오는 특징을 보고 두 함수가 서로 어떤 관계에 있는지를 먼저 찾아내야 함을 눈치챈 후 문항을 풀이하는 습관을 가지자.

STEP1 두 함수의 관계 찾아내기

A와 B의 좌표를 설정하여 풀이하는 것은 좋은 방법이 아니다. 제시된 로그함수와 지수함수의 관계를 찾아보자.

$y=\log_{16}(8x+2)$를 x에 대한 y의 함수로 고쳐보자.

$\frac{16^y-2}{8}=x$이 되고, $y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$와 연관짓기 위해 밑이 4인 지수로 바꾸자.

$\frac{4^{2y}-2}{8}=x$에서 $y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$꼴을 만들기 위해 지수를 $2y-1$로 바꿔보자.

$\frac{4^{2y}-2}{8}=\frac{4^{2y-1}-\frac{1}{2}}{2}=x$, $4^{2y-1}-\frac{1}{2}=2x$가 된다.

$y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$와 비교해 보면, x, y에 2배를 해주고 $y=x$에 대해 대칭시키면 $4^{2y-1}-\frac{1}{2}=2x$가 됨을 알 수 있다.

STEP2 위에서 찾은 성질을 활용해 좌표 찾아내기

위의 그래프의 관계를 통해 $\mathrm{A}(a, b)$에 대응하는 $y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$ 위의 점은 $(2b, 2a)$가 된다.

$\mathrm{A}(a, b)$을 $y=x$에 대해 대칭한 점이 직선 OB 위에 있으므로 B는 $y=\frac{a}{b}x$와 $y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$의 교점이다.

이 점은 유일하고, $(2b, 2a)$가 이 조건을 만족하므로 $\mathrm{B}(2b, 2a)$이다.

선분 AB의 중점의 좌표가 $(\frac{77}{8}, \frac{133}{8})$이므로

$\frac{a+2b}{2}=\frac{77}{8}$, $\frac{b+2a}{2}=\frac{133}{8}$이다.

연립하면, $a=\frac{63}{4}$, $b=\frac{7}{4}$이다.

따라서, $a\times b=\frac{441}{16}$이다.

PART 2
삼각함수

개념 유형

(1) 삼각함수
(2) 사인법칙과 코사인법칙
(3) 도형의 접근법

기출 유형

(1) 삼각함수의 계산
(2) 삼각함수의 그래프
(3) 삼각함수의 그래프와 직선의 만남
(4) 사인법칙과 코사인법칙

THEME

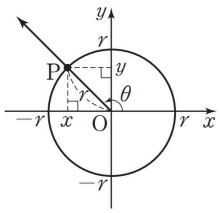
1 — 삼각함수

정리1 삼각함수

개념1 삼각함수

동경 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기 θ에 대하여

① $\sin\theta=\frac{y}{r}$ ② $\cos\theta=\frac{x}{r}$ ③ $\tan\theta=\frac{y}{x}$ $(x\neq 0)$이다.



개념2 삼각함수의 관계성

① $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

② $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, $\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$

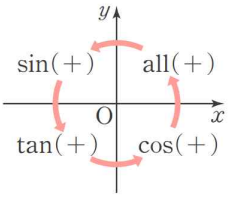
③ $\sin\theta+\cos\theta=k$이면 $\sin\theta\cos\theta=\frac{k^2-1}{2}$, $\sin\theta-\cos\theta=k$이면 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1-k^2}{2}$

④ $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{2}{1-k^2}$

개념3 삼각함수의 값의 부호

삼각함수의 값의 부호는 각 θ를 나타내는 동경이 존재하는 사분면에 따라 다음과 같이 정해진다.
(즉, $\sin\theta$는 1, 2사분면에서 양수, $\cos\theta$는 1, 4사분면에서 양수, $\tan\theta$는 1, 3사분면에서 양수이다.)

개념3 을 이용하여, 뒤에 나올 **각의 변환**에서의 <예각 가정법>을 사용하면 된다.



개념4 삼각함수의 양수 값

특수한 각도에 대해서 삼각함수는 다음을 만족한다.

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	없다.

예제1 삼각함수의 값 결정

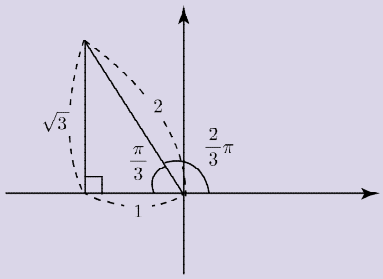
$\cos\frac{2\pi}{3}$의 값은?

해설

$\frac{2}{3}\pi$만큼 회전을 시킨 다음에 삼각형을 그리자.

그러면 2사분면에 삼각형이 존재하므로 cos값은 음(−)이다.

따라서 $\cos\frac{2\pi}{3}=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$이다.



예제2 삼각함수의 부호 결정

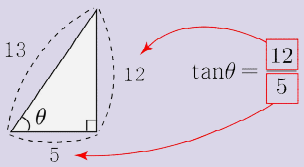
$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta=\frac{12}{5}$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은?

해설

삼각형을 그리면 5, 12, 13이므로

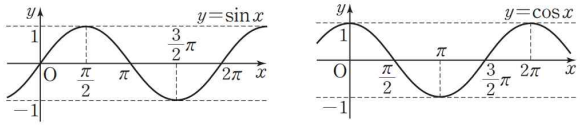
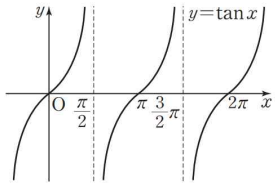
$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\frac{12}{13}-\frac{5}{13}=-\frac{17}{13}$이다.

($\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$는 3사분면이고, sin & cos < 0이다.)



정리2 삼각함수의 그래프

개념1 삼각함수의 그래프

$y=\sin x$와 $y=\cos x$	$y=\tan x$
	
① 정의역은 실수 전체의 집합이다. 치역은 $-1 \leq y \leq 1$이다. ② $y=\sin x$는 원점 대칭이고, $y=\cos x$는 y축에 대해서 대칭이다. ③ 주기가 2π인 주기함수이다. ④ $y=\cos x$는 $y=\sin x$를 x축 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동을 한 것과 같다. ⑤ $y=a\sin(bx+c)+d$, $y=a\cos(bx+c)+d$의 최댓값은 $\lvert a\rvert+d$, 최솟값은 $-\lvert a\rvert+d$, 주기는 $\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$이다.	① 정의역은 $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ … 를 제외한 실수 전체의 집합이고 치역은 실수 전체의 집합이다. ② 점근선은 직선 $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ …이다. ③ 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. ④ 주기가 π인 주기함수이다. ⑤ 함수 $y=a\tan(bx+c)+d$의 최댓값과 최솟값은 없고, 주기는 $\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$이다.

TIP 주기 함수

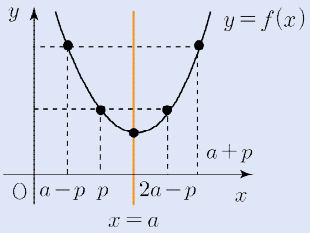
함수 f의 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때, 함수 f를 주기함수라 하고, p의 값 중 최소인 양수를 그 함수의 주기라 한다.

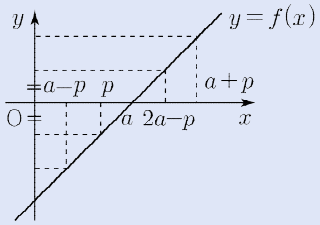
TIP 대칭 함수

① 직선 $x=a$에 대해서 y축 대칭
$f(a+x)=f(a-x)$ 또는 $f(x)=f(2a-x)$
를 만족하는 $f(x)$는 $x=a$에 대해서 y축 대칭이다.

② 점 $(a,0)$에 대해서 대칭
$f(a+x)=-f(a-x)$ 또는 $f(x)=-f(2a-x)$
를 만족하는 $f(x)$는 점 $(a,0)$에 대해서 대칭이다.

③ 점 (a,b)에 대해서 대칭
$f(a+x)+f(a-x)=2b$ 또는 $f(x)+f(2a-x)=2b$
를 만족하는 $f(x)$는 점 (a,b)에 대해서 대칭이다.

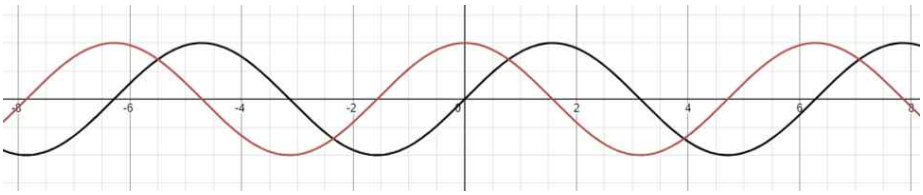




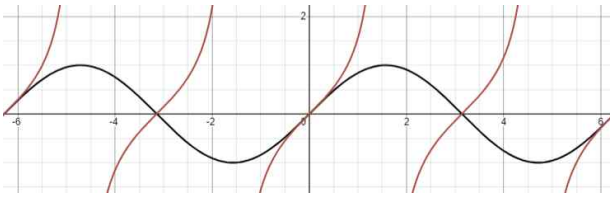
정리3 삼각함수의 그래프

개념1 삼각함수의 그래프끼리 만나는 지점

① $y=\sin x$와 $y=\cos x$ 그래프



② $y=\sin x$와 $y=\tan x$ 그래프

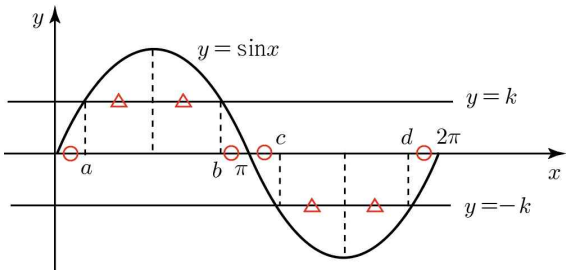


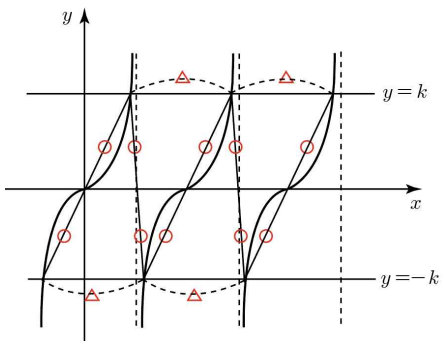
	$\sin x$와 $\cos x$	$\sin x$와 $\tan x$
만나는 지점	$x=n\pi+\frac{\pi}{4}$	$x=n\pi$

TIP 대칭성

$y=\sin x$와 $y=\cos x$ 그래프가 $y=k$와 만나는 점은 교점에 대해서 대칭이다. (즉, $x=\frac{\pi}{4}$로 떨어진 거리가 α와 β가 같다.)

개념2 삼각함수의 그래프와 직선의 만남 # '유도 必 암기'





	대칭인 두 해의 덧셈	대칭인 두 해의 차이
$\sin x$, $\cos x$	$a+b=\bigcirc+(\pi-\bigcirc)=\pi$ $b+c=(\pi-\bigcirc)+(\pi+\bigcirc)=2\pi$	$b-a=2\triangle$ (중심축으로부터 떨어진 거리)
$\tan x$	X	$b-a=\pi$

정리4 각의 변환

개념1 $\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 형태 (외형을 바꾼다.)

① $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$

② $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

③ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$

개념2 $\pi\pm\theta$의 형태

① $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

② $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

③ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

개념3 $\frac{3\pi}{2}\pm\theta$의 형태

① $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$ $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta$

② $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sin\theta$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\sin\theta$

③ $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$

개념4 $2\pi\pm\theta$의 형태

① $\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$ $\sin(2\pi+\theta)=\sin\theta$

② $\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$ $\cos(2\pi+\theta)=\cos\theta$

③ $\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$ $\tan(2\pi+\theta)=\tan\theta$

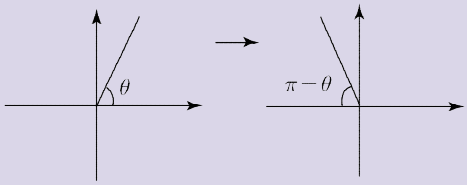
예제3 각의 변환

$\sin(\pi-\theta)=\frac{5}{13}$이고 $\cos\theta<0$일 때, $\tan\theta$의 값은?

해설

STEP1 π(반각의 2배)가 있으므로 변형은 없다.

STEP2 약간의 각도의 θ(1사분면)를 표시하고
$\pi-\theta$(2사분면)를 표시한다.
2사분면이므로 $\tan\theta<0$이다.



STEP3 $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta=\frac{5}{13}$이고,
양수가 되는 θ는 1, 2사분면이다.
$\cos\theta<0$인 조건을 통해 θ는 2사분면임을 알 수 있다.
$\therefore \tan\theta=-\frac{5}{12}$이다.

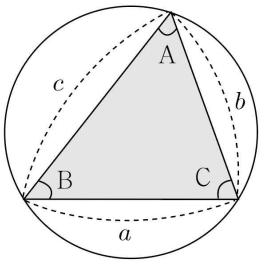
THEME

2 사인법칙과 코사인법칙

정리1 사인법칙과 코사인법칙

개념1 사인법칙

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 할 때 아래와 같은 성질을 사인법칙이라 한다.
(외접원의 반지름, 길이 1개, 각도 1개가 나와있을 때 사용한다.)



① $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ ② $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ ③ $a=2R\sin A$

개념2 코사인법칙

삼각형 ABC에서 아래와 같은 성질을 코사인법칙이라 한다.
(길이 3개, 각도 1개가 나와있을 때 사용한다.)

① $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ② $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

개념3 삼각형의 넓이

① $S=\frac{1}{2}\times$밑변$\times$높이

② $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ (두 변의 길이와 끼인각이 주어진 경우 삼각형의 넓이이다.)

THEME

3 — 도형의 접근법

정리1 도형

개념1 도형

도형(圖形)이란, 점, 선, 면 또는 입체로 이루어진 모양으로, 공간에서의 위치나 크기, 형태를 나타내는 기하학적 대상

재미없는 정의 얘기는 여기까지 하고 도형에 대해 알아봅시다,
도형이란 정의 그대로 기하학적 대상이지만, 수능에서 도형은 다릅니다.
수능에서 도형 문제는 정해진 개념을 사용하여 특정한 값을 구하도록 설정된 문제입니다,
즉 매우 특별한 케이스라는 것이죠, 그리고 우리가 쓸 수 있는 개념은 한정되어 있습니다.
따라서 우리는 정해진 상황에서 정해진 개념을 꺼내쓸 수 있는 능력을 키우는 것이 중요합니다.
그렇다면 적재적소에 맞는 개념을 쓰기 위해선 무엇이 필요할까요?

개념2 상황 판단

도형 문제를 빠르게 풀기 위해서는 상황판단에 대한 이해가 필요합니다.
원, 삼각형, 각 등등 도형에서 주어지는 여러 상황에 알맞은 판단이 필요하죠.

이를 무한히 주어진 시간대에서 하면 좋겠지만 수능이라는 시험은 100분이며 30문제입니다.
우린 도형만 푸는 것이 아니기에 반응적으로 즉각적인 판단이 서야합니다.
이를 위해 알고리즘에 대해 소개할 것입니다.
도형은 **귀납적 상황 판단의 결과물**입니다.
단계적으로 조건을 풀다보면 길이 보이게 되는 것이 도형입니다.

이제 상황판단 알고리즘을 학습할 것입니다.

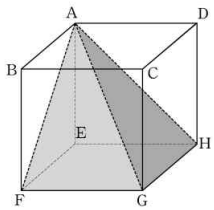
개념3 눈을 믿지 말자

도형 문제에서 가장 중요한 마음가짐입니다. 절대 본인의 눈을 믿어선 안됩니다.
물론 얼핏 때려 맞을 수는 있으나 좋은 태도가 아닙니다,

항상 합당한 근거에 기반한 합리적 판단이 도형문제 해결의 열쇠입니다.

6. 정육면체 ABCD－EFGH에서 평면 AFG와 평면AGH가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값은?

[3점][2007년 수능]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

예시로 다음 문제는 시각적으로 오해를 불러올 수 있는 도형 문제입니다. (답:3번, 간단한 계산 문제이므로 독자에게 맡깁니다.)
항상 그림이 아닌 본인을 믿어주시길 바랍니다.

정리2 원과 도형

개념 1 원

원은 도형 문제에서 굉장히 밀접한 연관이 있는 단서입니다.
도형 문제에서 원이 빠지면 섭할 정도이죠.
원은 반원, 부채꼴, 원의 일부 심지어 삼각형에서 보이지 않는 외접원 등등의
여러 요소들로 등장할 수 있으며 문제에서 굉장히 중요한 역할을 합니다.
이러한 원이 문제에 등장하였을 때는 어떻게 대처해야하는지 알아봅시다.

개념 2 원을 만났을 때

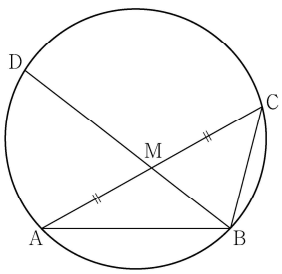
위와 같이 다양한 상황에서 원을 만났을 때 어떤 반응을 보여야할까요?

TIP 행동법

① 원의 중심과 주요점 잇기(중심이 가시적으로 보일 때)
② 원주각과 중심각 체크하기(부채꼴이 등장하였을 때)
③ 내각의 합 체크하기(원안에 사각형 혹은 삼각형 2개가 있을 때)

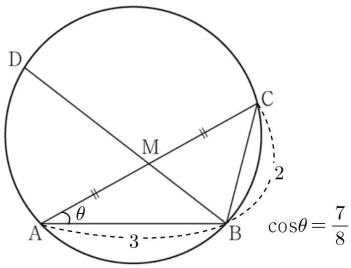
매우 간단한 반응이지만 이런 사소한 반응이 쌓이면 도형문제가 풀리게 됩니다
하지만 도형 문제는 다양한 상황이 존재합니다. 불필요한 선은 오히려 마이너스 요소가 되므로 각 상황에 알맞은 반응이 중요합니다.
아래 문제를 봅시다. 이 문제는 원이 등장하였으나 가시적으로 중심이 나오지 않아 중심과 주요점을 잇지 않아도 됩니다.

10. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$
④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

STEP1 조건 체크



STEP2 MA 길이 구하기

삼각형 ABC에 대해서 코사인법칙을 사용하면

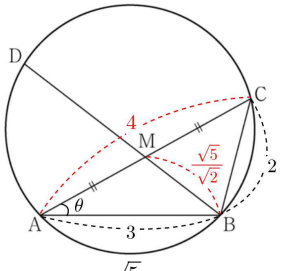
$4=9+x^2-2\times3x\times\frac{7}{8}$, $x^2-\frac{21}{4}x+5=0$, $4x^2-21x+20=0$

에서 $x=4$ or $\frac{5}{4}$인데, $x>3$이므로 $x=4$이다.

STEP3 MB 길이

MB에 대해서 코사인법칙과 중선정리를 생각할 수 있다.

중선정리를 쓰면 $9+4=2(h^2+4)$에서 $h=\sqrt{\frac{5}{2}}$이다.

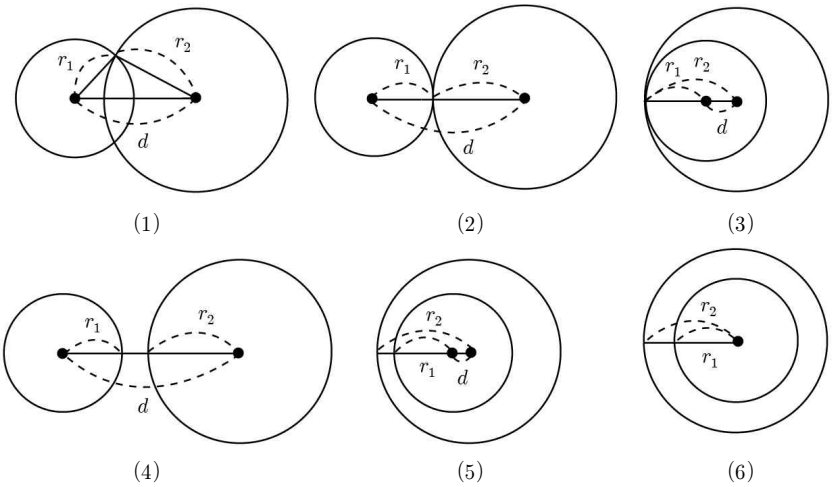


방멱의 정리에 의하여 $\overline{MD}\times\frac{\sqrt{5}}{2}=2\times2$이므로 $\overline{MD}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$이다.

정리3 원이 2개 등장한 상황

개념1 원의 중첩

두 원이 중첩된 상황에서의 알고리즘을 알아보도록 하자.
두 원은 이렇게 6개의 상황으로 존재할 수 있다.



이 중에서 도형 문제에서 가장 많이 출제되는 경우는 (1)의 상황이다.

다음과 같은 상황이 등장하였을 때

TIP 행동법

① 두 원의 중심을 잇기
② 두 원이 만나는 점과 각 점을 잇기
③ 두 원이 만나는 두 점을 잇기

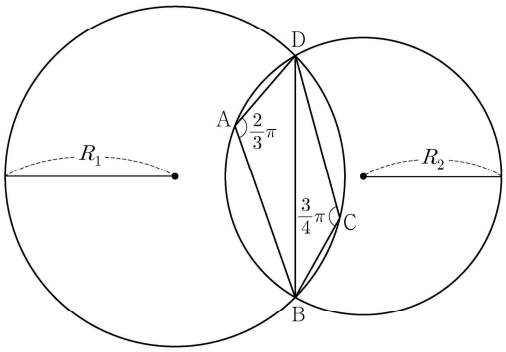
이렇게 반응하여 문제 상황을 대처할 수 있다.

예제1 두 원의 중첩

20. 그림과 같이

$$\overline{AB}=2,\ \overline{AD}=1,\ \angle DAB=\frac{2}{3}\pi,\ \angle BCD=\frac{3}{4}\pi$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하자.



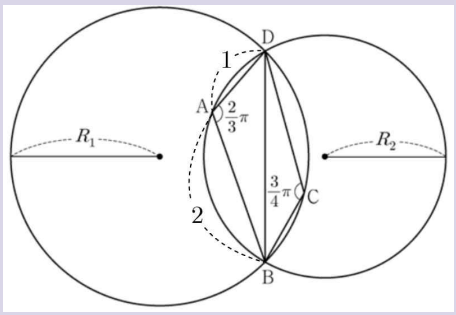
다음은 $R_1\times R_2$의 값을 구하는 과정이다.

> 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여
> $$R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}$$
> 이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여
> $$R_2=\boxed{\text{(가)}}\times\overline{BD}$$
> 이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여
> $$\overline{BD}^2=2^2+1^2-(\boxed{\text{(나)}})$$
> 이므로
> $$R_1\times R_2=\boxed{\text{(다)}}$$
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $9\times(p\times q\times r)^2$의 값을 구하시오. [4점]

해설

STEP1 조건 체크



STEP2 (가) 구하기

$2R_2=\dfrac{\overline{BD}}{\sin(\frac{2}{3}\pi)}$ 이므로 $R_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times\overline{BD}$이다.

STEP3 (나) 구하기

거리가 나와있는 ABD에 대해서 코사인법칙을 사용하자.

$x^2=4+1-2\times2\times-\dfrac{1}{2}$이므로 (나)$=-2$이다.

STEP4 (다) 구하기

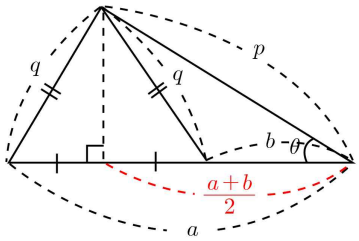
(다)$=R_1\times R_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times7=\dfrac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$이다.

$\therefore 9\times(p\times q\times r)^2=9\times(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times-2\times\dfrac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{3}})^2=98$

정리4 코사인 법칙의 평균 정리

개념1 코사인법칙과 평균 정리

한 변의 길이가 p이고 다른 한 변의 길이가 q이며 q의 대각의 크기가 θ인 삼각형은
2가지의 경우가 존재하며 남은 한 변의 길이를 각각 a, b라 할 때 수직으로 내린 변의 길이는 평균이 된다.



만족하는 삼각형 2개!
& 길이가 다른 변의 평균은
수직으로 내린 길이와 동일하다.

이때 $\frac{a+b}{2}=p\cos\theta$ 이다.

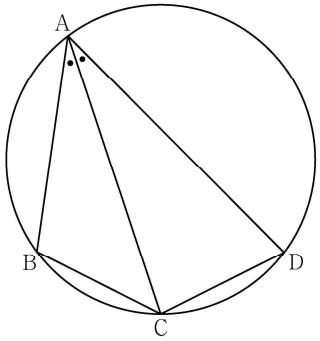
평균 정리는 외접원이 주어진 문제에서 원주각이 동일할 때 문제 해결에 큰 도움을 준다.
예제를 통해 사용법을 보도록 하자.

예제2 코사인법칙의 평균정리

11. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=3\sqrt{5}$, $\overline{AD}=7$, $\angle BAC=\angle CAD$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는? [4점]



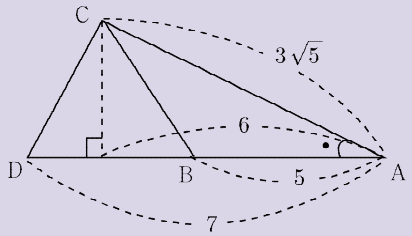
① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$

④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

해설

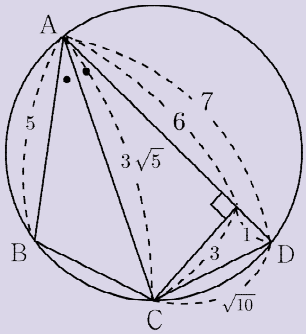
우선 원주각이 같고 $\overline{AC}$가 공통이며 $\overline{BC}=\overline{CD}$이므로 코사인 평균정리에 대입해보면

$\theta=\bullet$, $p=\overline{AC}$, $q=\overline{BC}=\overline{CD}$인 상황이며 그림으로 보면 다음과 같다.



이때 평균 정리에 의해 수직으로 내려 생긴 변의 길이가 6이다.

이를 다시 그림에 표시하면



따라서 $\overline{CD}=\sqrt{10}$이고 $\sin\theta=\frac{3}{3\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$이므로

외접원의 반지름은 $R=\frac{\sqrt{10}}{2\times\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$이다.

풀이에서 평균 정리의 그림에 숫자를 대입하는 과정을 거치었지만 적응이 되면 바로 그림에 그려서 풀 수 있을 것이다.

특강KEY 도형에서 가장 중요한 법칙

절대 붙잡지 말 것

도형 문제에서 가장 중요한 점은 절대 붙잡지 않는 것입니다. 도형 문제를 매번 모의고사마다 맞추던 사람도 수험장에선 어떤 도형 조각이 보이지 않아 길을 헤맬지 모르는 일입니다.

도형 문제는 처음 눈에 안들어온다면 우선 넘기고 나중에 차분히 푸는 것이 맞습니다.

만약 본인이 복잡한 계산과 정성을 통하여 고난도 도형 문제를 맞추었다고 해봅시다.

그렇다면 본인은 과연 승리자일까요?

하지만 수능은 철저한 객관식, 단답형 시험입니다. 얼마나 어려운 문제를 맞든지 같은 점수를 획득하게 됩니다.

즉 여러분이 도형 문제를 푸는 동안 사용한 시간의 기회비용을 생각해보아야 합니다.

도형문제가 풀리지 않는다면 과감히 넘기고 마지막에 다시 차근히 해결해나갑시다.

지금까지 도형 특강이었습니다.

유형 01 삼각함수의 계산

01 2021년 실시 6월 3번 정답률 81%

3. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta=\frac{12}{5}$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{17}{13}$ ② $-\frac{7}{13}$ ③ 0 ④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{17}{13}$

02 2021년 실시 9월 6번 정답률 80%

6. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

03 2021년 실시 수능 7번 정답률 71%

7. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

04 2022년 실시 6월 3번 정답률 92%

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\cos^2\theta=\frac{4}{9}$일 때, $\sin^2\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{9}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{2}{9}$ ④ $-\frac{1}{9}$ ⑤ 0

05 2022년 실시 9월 3번 정답률 86%

$\sin(\pi-\theta)=\frac{5}{13}$이고 $\cos\theta<0$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{12}{13}$ ② $-\frac{5}{12}$ ③ 0 ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{12}{13}$

06 2022년 실시 수능 5번 정답률 70%

$\tan\theta<0$이고 $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{\sqrt{5}}{5}$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

07 2023년 실시 6월 6번 정답률 76%

6. $\cos\theta < 0$이고 $\sin(-\theta) = \frac{1}{7}\cos\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{3\sqrt{2}}{10}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{2}}{10}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

08 2023년 실시 9월 3번 정답률 85%

3. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$인 θ에 대하여 $\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

09 2023년 실시 수능 3번 정답률 80%

3. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$인 θ에 대하여 $\sin(-\theta) = \frac{1}{3}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

10 2024년 실시 6월 6번 정답률 64%

6. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{5}$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

11 2024년 실시 9월 6번 정답률 78%

6. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\cos(\pi+\theta)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

12 2024년 실시 수능 6번 정답률 71%

6. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{5}$일 때, $\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}$의 값은? [3점]

① -5 ② $-\sqrt{5}$ ③ 0 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5

13 2025년 실시 6월 8번 정답률 89%

8. $\sin(\pi-\theta)>0$이고 $2\cos\theta=\sin\theta$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{10}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

14 2025년 실시 9월 6번 정답률 90%

6. $\cos(\theta-\pi)=\frac{3}{5}$이고 $\tan\theta<0$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

15 2025년 실시 수능 8번 정답률 89%

8. $\sin\theta+3\cos\theta=0$이고 $\cos(\pi-\theta)>0$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0
④ $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

유형 02 삼각함수의 그래프

01 2022년 실시 6월 7번 정답률 81%

7. 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = -\sin 2x$가 $x = a$에서 최댓값을 갖고 $x = b$에서 최솟값을 갖는다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

02 2022년 실시 수능 9번 정답률 71%

9. 함수

$$f(x) = a - \sqrt{3}\tan 2x$$

가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$에서 최댓값 7, 최솟값 3을 가질 때, $a \times b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

03 2024년 실시 9월 20번 정답률 33%

20. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-1 & (0\le x<\pi)\\ -\sqrt{2}\sin x-1 & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$$

가 있다. $0\le t\le 2\pi$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 t의 값의 합은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

04 2024년 실시 수능 10번 정답률 70%

10. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=a\cos bx+3$이 $x=\frac{\pi}{3}$에서 최댓값 13을 갖도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최솟값은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

05 2025년 실시 6월 6번 정답률 96%

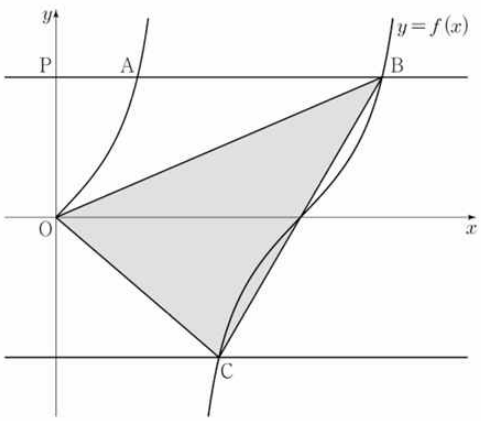
6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\cos bx+1$의 최댓값이 8이고 주기가 π일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{15}{2}$ ② 8 ③ $\frac{17}{2}$ ④ 9 ⑤ $\frac{19}{2}$

06 2025년 실시 9월 14번 정답률 87%

14. 양수 k에 대하여 집합 $\left\{x \left| 0 \le x < \frac{3k\pi}{2}, x \ne \frac{k\pi}{2}\right.\right\}$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan\frac{x}{k}$가 있다. 점 $\mathrm{P}(0, p)\,(p>0)$을 지나며 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 두 점을 A, B$(\overline{\mathrm{PA}}<\overline{\mathrm{PB}})$라 하고, 직선 $y=-p$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=3\overline{\mathrm{PA}}$이고 삼각형 OCB의 넓이가 $\frac{5\pi}{3}$일 때, $k+p$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{13\sqrt{3}}{9}$ ③ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$
④ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{16\sqrt{3}}{9}$



유형 03 삼각함수의 그래프와 직선의 만남

01 2021년 실시 6월 15번 정답률 26%

15. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이다.

ㄴ. $\{t \mid \beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\left\{t \left| 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right.\right\}$

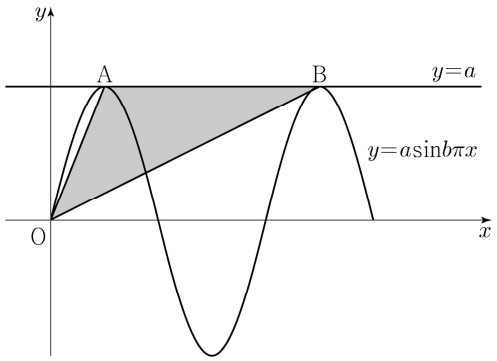
ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2=\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

02 2021년 실시 9월 10번 정답률 77%

10. 두 양수 a, b에 대하여 곡선 $y=a\sin b\pi x\left(0\le x\le\frac{3}{b}\right)$이 직선 $y=a$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 5이고 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$일 때, $a+b$의 값은?
(단, O는 원점이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

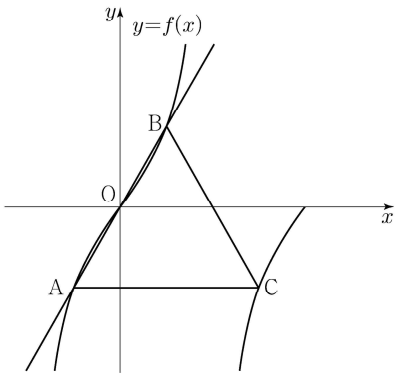


03 2021년 실시 수능 11번 정답률 61%

11. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \left| -\frac{a}{2} < x \le a, x \ne \frac{a}{2}\right.\right\}$에서 정의된 함수

$$f(x) = \tan\frac{\pi x}{a}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

04 2022년 실시 9월 9번 정답률 74%

9. 닫힌구간 $[0, 12]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\cos\frac{\pi x}{6},\quad g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 α_1, α_2라 할 때, $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이다. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 β_1, β_2라 할 때, $|\beta_1-\beta_2|$의 값은? (단, k는 $-1<k<1$인 상수이다.) [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

05 2023년 실시 6월 19번 정답률 60%

19. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\sin bx+8-a$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이다.

(나) $0\leq x<2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

06 2023년 실시 9월 9번 정답률 62%

9. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 부등식

$$\cos x \le \sin \frac{\pi}{7}$$

를 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\alpha \le x \le \beta$이다.
$\beta - \alpha$의 값은? [4점]

① $\frac{8}{7}\pi$ ② $\frac{17}{14}\pi$ ③ $\frac{9}{7}\pi$ ④ $\frac{19}{14}\pi$ ⑤ $\frac{10}{7}\pi$

07 2023년 실시 수능 19번 정답률 38%

19. 함수 $f(x) = \sin \frac{\pi}{4}x$라 할 때, $0 < x < 16$에서 부등식

$$f(2+x)f(2-x) < \frac{1}{4}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

08 2024년 실시 6월 20번 정답률 14%

20. 5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프가 직선 $x=\pi$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자. $n(A\cup B\cup C)=3$이 되도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값을 구하시오. [4점]

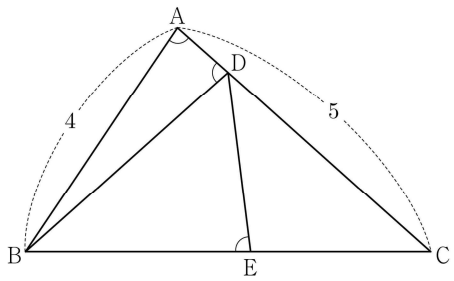
유형 04 사인법칙과 코사인법칙

01 2021년 실시 6월 12번 정답률 71%

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC = \angle BDA = \angle BED$$

일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]

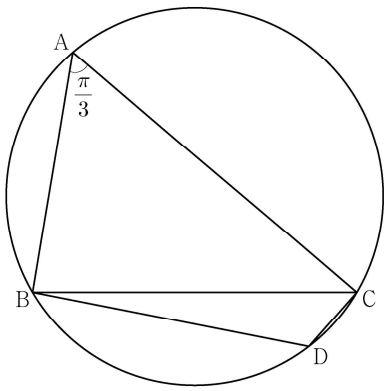


① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

02 2021년 실시 9월 12번 정답률 72%

12. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$ 인 원에 내접하고 $\angle A=\frac{\pi}{3}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD)=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ 일 때, $\overline{BD}+\overline{CD}$ 의 값은? [4점]

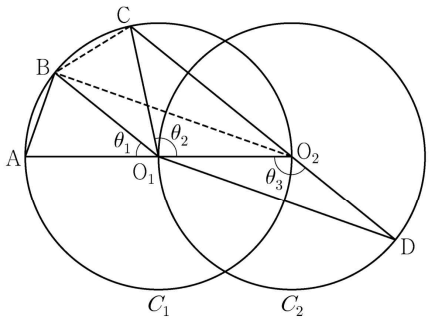
① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$



03 2021년 실시 수능 15번 정답률 46%

15. 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다.

이때 $\angle BO_1A=\theta_1$, $\angle O_2O_1C=\theta_2$, $\angle O_1O_2D=\theta_3$이라 하자.



다음은 $\overline{AB}:\overline{O_1D}=1:2\sqrt{2}$이고 $\theta_3=\theta_1+\theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

$\angle CO_2O_1+\angle O_1O_2D=\pi$이므로 $\theta_3=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}$이고

$\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로 $\angle CO_1B=\theta_1$이다.

이때 $\angle O_2O_1B=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.

$\overline{AB}=k$라 할 때

$\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2}=$ (가) 이고,

$\angle BO_2A=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\dfrac{\theta_1}{2}=$ (나) 이다.

삼각형 O_2BC에서

$\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로

코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C}=$ (다) 이다.

$\overline{CD}=\overline{O_2D}+\overline{O_2C}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2C}$이므로

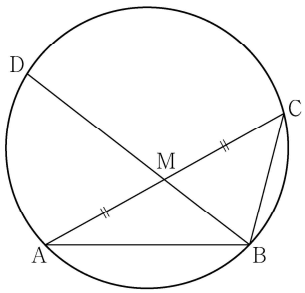
$\overline{AB}:\overline{CD}=k:\left(\dfrac{\text{(가)}}{2}+\text{(다)}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)\times g(p)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{169}{27}$ ② $\dfrac{56}{9}$ ③ $\dfrac{167}{27}$ ④ $\dfrac{166}{27}$ ⑤ $\dfrac{55}{9}$

04 2022년 실시 6월 10번 정답률 59%

10. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

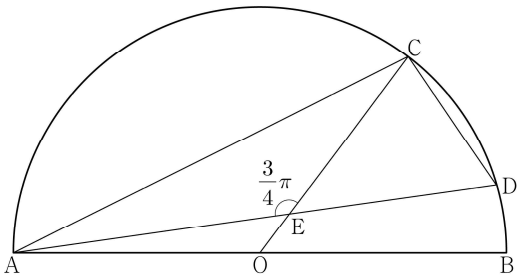
④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

05 2022년 실시 9월 13번 정답률 36%

13. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{CE}=4,\quad \overline{ED}=3\sqrt{2},\quad \angle CEA=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{AC}\times\overline{CD}$의 값은? [4점]



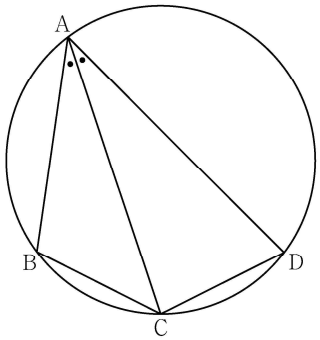
① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

06 2022년 실시 수능 11번 정답률 64%

11. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$$\overline{AB}=5,\ \overline{AC}=3\sqrt{5},\ \overline{AD}=7,\ \angle BAC=\angle CAD$$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는? [4점]



① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$

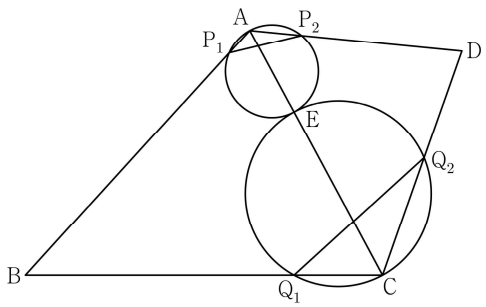
④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

07 2023년 실시 6월 13번 정답률 28%

13. 그림과 같이

$$\overline{BC}=3,\ \overline{CD}=2,\ \cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3},\ \angle DAB>\frac{\pi}{2}$$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고,
선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자.
$\overline{P_1P_2} : \overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB}+\overline{AD}$의 값은? (단, $\overline{AB}>\overline{AD}$) [4점]



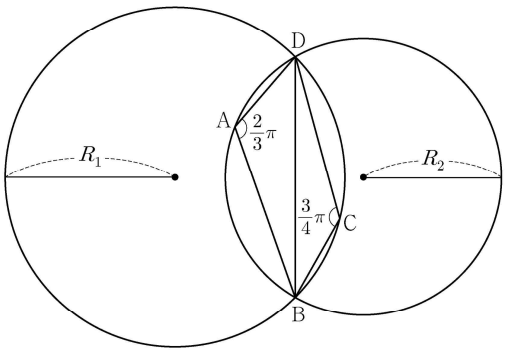
① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

08 2023년 실시 9월 20번 정답률 47%

20. 그림과 같이

$$\overline{AB}=2,\ \overline{AD}=1,\ \angle DAB=\frac{2}{3}\pi,\ \angle BCD=\frac{3}{4}\pi$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하자.



다음은 $R_1\times R_2$의 값을 구하는 과정이다.

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}$$

이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$R_2=\boxed{\text{(가)}}\times\overline{BD}$$

이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2=2^2+1^2-(\boxed{\text{(나)}})$$

이므로

$$R_1\times R_2=\boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $9\times(p\times q\times r)^2$의 값을 구하시오. [4점]

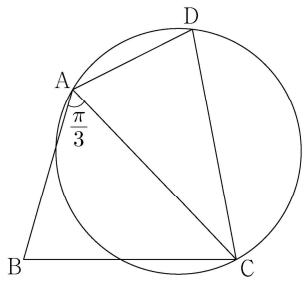
09 2023년 실시 수능 13번 정답률 58%

13. 그림과 같이

$$\overline{AB}=3,\quad \overline{BC}=\sqrt{13},\quad \overline{AD}\times\overline{CD}=9,\quad \angle BAC=\frac{\pi}{3}$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACD의 넓이를 S_2라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

$S_2=\frac{5}{6}S_1$일 때, $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$의 값은? [4점]



① $\frac{54}{25}$ ② $\frac{117}{50}$ ③ $\frac{63}{25}$ ④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{72}{25}$

10 2024년 실시 6월 10번 정답률 35%

10. 다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

(가) $3\sin A = 2\sin B$
(나) $\cos B = \cos C$

① $\frac{32}{9}\sqrt{2}$ ② $\frac{40}{9}\sqrt{2}$ ③ $\frac{16}{3}\sqrt{2}$
④ $\frac{56}{9}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{64}{9}\sqrt{2}$

11 2024년 실시 9월 10번 정답률 42%

10. $\angle A > \frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{2} : 1, \quad \overline{AH} = 2$$

이고, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 50π일 때, 선분 BH의 길이는? [4점]

① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7

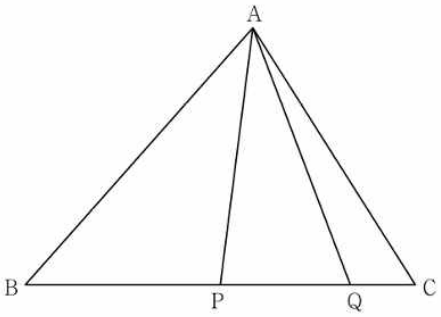
13 2025년 실시 6월 14번 정답률 73%

14. $\overline{AB}=2\sqrt{7}$ 인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 P, 선분 BC를 5 : 1로 내분하는 점을 Q라 하자.

$$\overline{AQ}=3\sqrt{2},\ \sin(\angle QAP):\sin(\angle APQ)=\sqrt{2}:3$$

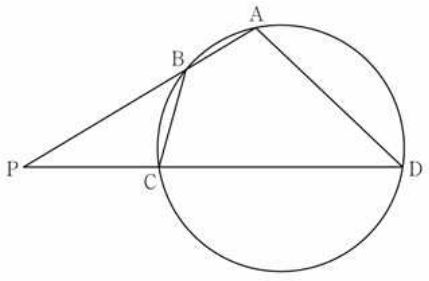
일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는? [4점]

① $\frac{85}{9}\pi$ ② $\frac{88}{9}\pi$ ③ $\frac{91}{9}\pi$ ④ $\frac{94}{9}\pi$ ⑤ $\frac{97}{9}\pi$



14 2025년 실시 9월 20번 정답률 87%

20. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고 $\overline{AB}:\overline{CD}=1:3$, $\overline{BC}<\overline{AD}$일 때, 직선 AB와 직선 CD가 만나는 점을 P라 하자.



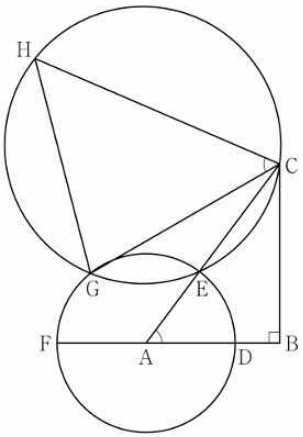
다음은 $\overline{PB}:\overline{PC}:\overline{BC}=7:5:\sqrt{14}$이고 $\overline{AD}=4\sqrt{13}$일 때, 삼각형 BPC의 외접원의 반지름의 길이를 구하는 과정이다.

$\angle BPC=\theta$라 할 때, $\overline{PB}:\overline{PC}:\overline{BC}=7:5:\sqrt{14}$이므로
삼각형 BPC에서 코사인법칙에 의하여 $\cos\theta=\frac{6}{7}$이다.
$\overline{PB}:\overline{PC}=7:5$에서 $\overline{PB}=7k$, $\overline{PC}=5k$,
$\overline{AB}:\overline{CD}=1:3$에서 $\overline{AB}=l$, $\overline{CD}=3l$이라 하자.
원의 성질에 의하여
삼각형 BPC와 삼각형 DPA가 서로 닮음이므로
$\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{PD}:\overline{PA}$이고, $l=\boxed{\text{(가)}}\times k$이다.
삼각형 BPC와 삼각형 DPA의 닮음비가 $1:\boxed{\text{(나)}}$이므로
$\overline{BC}=\frac{1}{\boxed{\text{(나)}}}\times\overline{AD}$이다.
따라서 삼각형 BPC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 할 때,
삼각형 BPC에서 사인법칙에 의하여 $R=\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $p+q+r$의 값을 구하시오. [4점]

15 2025년 실시 수능 14번 정답률 57%

14. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$이고 $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 2:1로 내분하는 점을 D, 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{AD}$인 원이 선분 AC와 만나는 점을 E, 직선 AB가 이 원과 만나는 점 중 D가 아닌 점을 F라 하고, 호 EF 위의 점 G를 $\overline{CG}=2\sqrt{6}$이 되도록 잡는다. 세 점 C, E, G를 지나는 원 위의 점 H가 $\angle HCG=\angle BAC$를 만족시킬 때, 선분 GH의 길이는? [4점]



① $\frac{6\sqrt{15}}{5}$ ② $\frac{38\sqrt{10}}{25}$ ③ $\frac{14\sqrt{3}}{5}$
④ $\frac{32\sqrt{15}}{25}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

16 2025년 실시 수능 18번 정답률 86%

18. $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=6$이고 $\cos(\angle BAC)=-\frac{3}{5}$인 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [3점]

유형 01 삼각함수의 계산

01 2021년 실시 6월 3번 정답률 81%

3. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta=\frac{12}{5}$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{17}{13}$ ② $-\frac{7}{13}$ ③ 0 ④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{17}{13}$

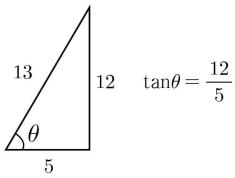
정 답 ①

해 설

삼각형을 그리면 세 변의 길이가 각각 5, 12, 13이므로

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\frac{12}{13}-\frac{5}{13}=-\frac{17}{13}$이다.

($\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$는 3사분면이고, $\sin$ & $\cos<0$이다.)



$\tan\theta=\frac{12}{5}$

02 2021년 실시 9월 6번 정답률 80%

6. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

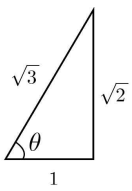
정 답 ①

해 설

$\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{2\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}=4$

$\sin^2\theta=\frac{2}{3}$에서 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이다. ($\theta$=2사분면)

삼각형을 그리면 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.



03 2021년 실시 수능 7번 정답률 71%

7. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0

④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

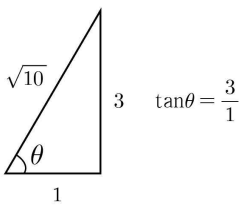
정 답 ①

해 설

$\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$의 양변에 $\tan\theta$를 곱하고 $\tan\theta=t$로 치환하면

$t^2-t-6=(t+2)(t-3)=0$에서 $\tan\theta=3$이다.

(θ가 3사분면이므로 $\tan\theta$는 양수이다.)



$\tan\theta=\frac{3}{1}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{10}}{10}=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$이다.

04 2022년 실시 6월 3번 정답률 92%

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\cos^2\theta=\frac{4}{9}$일 때, $\sin^2\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{9}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{2}{9}$ ④ $-\frac{1}{9}$ ⑤ 0

정 답 ④

해 설

2사분면이므로 $\cos\theta=-\frac{2}{3}$이다.

$\therefore \sin^2\theta+\cos\theta=\frac{5}{9}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{9}$

05 2022년 실시 9월 3번 정답률 86%

$\sin(\pi-\theta)=\frac{5}{13}$이고 $\cos\theta<0$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{12}{13}$ ② $-\frac{5}{12}$ ③ 0 ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{12}{13}$

정 답 ②

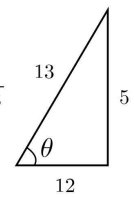
해 설

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta=\frac{5}{13}$는 양수이므로

θ는 1, 2사분면이다.

$\cos\theta<0$을 통해 2사분면임을 알 수 있다.

$\therefore \tan\theta=-\frac{5}{12}$이다.



06 2022년 실시 수능 5번 정답률 70%

$\tan\theta<0$이고 $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{\sqrt{5}}{5}$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

정 답 ⑤

해 설

$\tan\theta<0$을 통해 2, 4사분면임을 알 수 있다.

$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$에서 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$이다.

($\frac{\pi}{2}$로 외형을 바꾸고, $\frac{\pi}{2}+\theta$는 2사분면이므로 음수이다.)

각변환을 위한 α의 임의의 사분면

θ는 4사분면이므로 $\therefore \cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이다.

07 2023년 실시 6월 6번 정답률 76%

6. $\cos\theta<0$이고 $\sin(-\theta)=\frac{1}{7}\cos\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{3\sqrt{2}}{10}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{2}}{10}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

정 답 ④

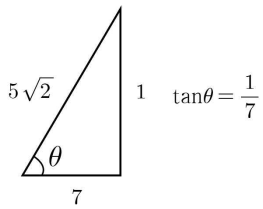
해 설

$\cos\theta<0$을 통해 2, 3사분면임을 알 수 있다.

$\sin(-\theta)=-\sin\theta=\frac{1}{7}\cos\theta$

조건으로 $\cos\theta<0$이므로 $\sin\theta>0$이 된다. 즉, 2사분면이다.

$\tan\theta=-\frac{1}{7}$에서 삼각형을 그려보면 $\sin\theta=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$이다.



08 2023년 실시 9월 3번 정답률 85%

3. $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$인 θ에 대하여 $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

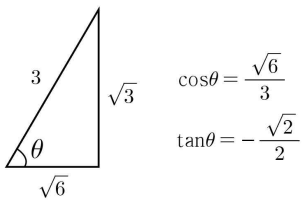
① $-\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

정 답 ②

해 설

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$는 4사분면이므로 $\tan\theta$는 음수이다.

삼각형을 그려보면 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.



09 2023년 실시 수능 3번 정답률 80%

3. $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$인 θ에 대하여 $\sin(-\theta)=\frac{1}{3}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

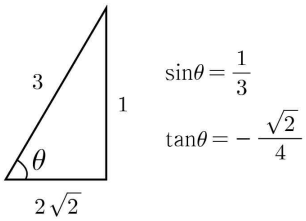
① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

정 답 ②

해 설

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$는 4사분면이다. 그러면 $\tan\theta<0$이다.

$\sin(-\theta)=-\sin\theta=\frac{1}{3}$이고, $\sin\theta=-\frac{1}{3}$이다.



삼각형을 그려보면 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{2}}{4}$이다.

10 2024년 실시 6월 6번 정답률 64%

6. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{5}$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

정 답 ①

해 설

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$는 3사분면이다.

$\sin(\theta-\frac{\pi}{2})=-\cos\theta=\frac{3}{5}$이다. ($\cos\theta$는 음수이므로 가능)

3사분면에서 $\sin\theta$는 음수이므로 $\sin\theta=-\frac{4}{5}$이다.

.

11 2024년 실시 9월 6번 정답률 78%

6. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\cos(\pi+\theta)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0

④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

정 답 ②

해 설

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$는 2사분면이다.

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이다. ($\cos\theta$는 음수이므로 가능)

2사분면에서 $\sin\theta$는 양수이므로 $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$이다.

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$이다.

12 2024년 실시 수능 6번 정답률 71%

6. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{5}$일 때, $\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}$의 값은? [3점]

① -5 ② $-\sqrt{5}$ ③ 0 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5

정 답 ⑤

해 설

$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta=-\frac{1}{5}$에서 $\sin\theta=\frac{1}{5}$이다.

$\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{1}{\sin\theta}=5$

13 2025년 실시 6월 8번 정답률 89%

8. $\sin(\pi-\theta)>0$이고 $2\cos\theta=\sin\theta$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{10}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

정 답 ⑤

해 설

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta>0$이다.

$2\cos\theta=\sin\theta$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$이다.

.

14 2025년 실시 9월 6번 정답률 90%

6. $\cos(\theta-\pi)=\frac{3}{5}$이고 $\tan\theta<0$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

정 답 ⑤

해 설

$\cos(\theta-\pi)=-\cos\theta=\frac{3}{5}$이다.

$\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$이므로 $\sin\theta>0$이다.

따라서, $\sin\theta=\frac{4}{5}$이다.

15 2025년 실시 수능 8번 정답률 89%

8. $\sin\theta+3\cos\theta=0$이고 $\cos(\pi-\theta)>0$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0
④ $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

정 답 ①

해 설

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta>0$이다.

$\sin\theta+3\cos\theta=0$이므로 $|\cos\theta|=\frac{1}{\sqrt{10}}$이다.

따라서, $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$이다.

유형 02 삼각함수의 그래프

01 2022년 실시 6월 7번 정답률 81%

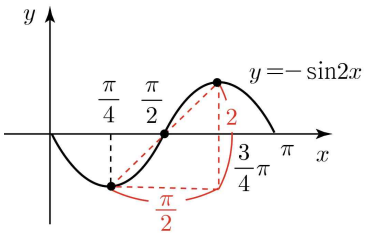
7. 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = -\sin 2x$가 $x = a$에서 최댓값을 갖고 $x = b$에서 최솟값을 갖는다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

정 답 ④

해 설

$f(x) = -\sin 2x$의 주기는 $T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$이다.



직선의 기울기는 $\frac{2}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$이다.

02 2022년 실시 수능 9번 정답률 71%

9. 함수

$$f(x) = a - \sqrt{3}\tan 2x$$

가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$에서 최댓값 7, 최솟값 3을 가질 때, $a \times b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

정 답 ③

해 설

STEP1 최댓값의 해석

값이 나와있는 $-\frac{\pi}{6}$에서는 $-\tan$함수의 최댓값이다.

$f(-\frac{\pi}{6}) = a - \sqrt{3}(-\sqrt{3}) = a + 3 = 7$에서 $a = 4$이다.

($\tan$의 기함수 이용)

STEP2 최솟값의 해석

$f(x) = 4 - \sqrt{3}\tan 2x = 3$에서 $\tan 2x = \frac{1}{\sqrt{3}}$이다.

$2x = \frac{\pi}{6}$에서 $x = b = \frac{\pi}{12}$이다.

$\therefore a \times b = 4 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$이다.

03 2024년 실시 9월 20번 정답률 33%

20. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수

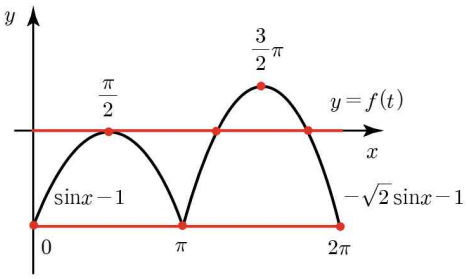
$$f(x)=\begin{cases}\sin x-1 & (0\le x<\pi)\\ -\sqrt{2}\sin x-1 & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$$

가 있다. $0\le t\le 2\pi$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 t의 값의 합은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정 답 15

해 설

$f(x)$를 그림으로 그리면 아래와 같이 표현할 수 있다.



이때 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되어야 하므로 가능한 $f(t)$의 값은 2가지이다.

모든 t의 값의 합은 $\frac{\pi}{2}+\pi+3\pi+2\pi=\frac{13}{2}\pi$에서 $p+q=15$이다.

04 2024년 실시 수능 10번 정답률 70%

10. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=a\cos bx+3$이 $x=\frac{\pi}{3}$에서 최댓값 13을 갖도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최솟값은? [4점]

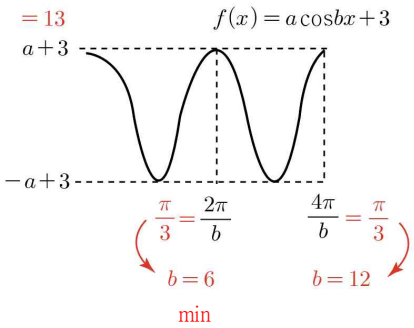
① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

정 답 ③

해 설

함수를 그리면 최댓값의 조건에 따라 $a=10$이다.

또한 $x=\frac{\pi}{3}$에서 최댓값을 가져야하고, b의 값은 최솟값이 되어야 하므로 $b=6$이다. 따라서 $a+b=16$이다.



05 2025년 실시 6월 6번 정답률 96%

6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\cos bx+1$의 최댓값이 8이고 주기가 π일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{15}{2}$ ② 8 ③ $\frac{17}{2}$ ④ 9 ⑤ $\frac{19}{2}$

정 답 ④

해 설

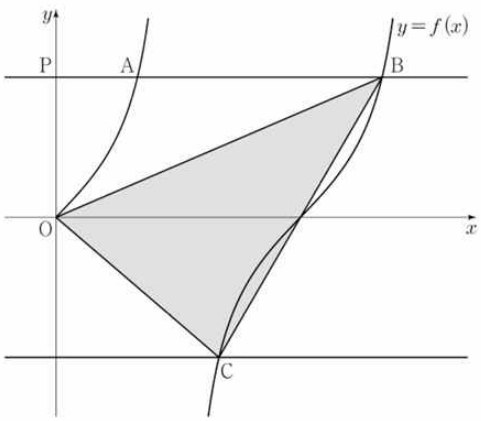
$f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$이고, 최댓값은 $a+1$이다.

$a+1=8$, $\frac{2\pi}{b}=\pi$이므로 $a=7$, $b=2$이다.

06 2025년 실시 9월 14번 정답률 87%

14. 양수 k에 대하여 집합 $\left\{x \mid 0\le x<\frac{3k\pi}{2}, x\ne\frac{k\pi}{2}\right\}$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan\frac{x}{k}$가 있다. 점 $P(0, p)\,(p>0)$을 지나며 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 두 점을 A, B($\overline{PA}<\overline{PB}$)라 하고, 직선 $y=-p$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=3\overline{PA}$이고 삼각형 OCB의 넓이가 $\frac{5\pi}{3}$일 때, $k+p$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{13\sqrt{3}}{9}$ ③ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$
④ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{16\sqrt{3}}{9}$



정 답 ③

해 설

함수 $f(x)$는 주기가 $k\pi$인 삼각함수이다.

A의 x좌표를 a라 하면, A의 좌표는 $(a, \tan\frac{a}{k})$이다.

A와 B는 y좌표가 같으므로 x좌표가 한 주기만큼 차이난다.
따라서, B의 x좌표는 $a+k\pi$이다.

$\overline{AB}=3\overline{PA}$이므로 $k\pi=3a$이고, A의 좌표는 $(a, \tan\frac{\pi}{3})$이다.

선분 BC와 x축의 교점을 M이라 하자.
M의 좌표는 $(k\pi, 0)$이다.
삼각형 OCB의 넓이는 삼각형 OBM과 삼각형 OCM의 넓이 합으로 구할 수 있다.

삼각형 OBM의 넓이는 $\frac{1}{2}\overline{OM}\times\overline{OP}=\frac{1}{2}k\pi\times\tan\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}\,a}{2}$이다.

삼각형 OCM의 넓이는 삼각형 OBM의 넓이와 같으므로 삼각형 OCB의 넓이는 $3\sqrt{3}\,a$이다.

따라서, $3\sqrt{3}\,a=\frac{5}{3}\pi$이고, $a=\frac{5\sqrt{3}}{27}\pi$이다.

$k=\frac{3a}{\pi}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$이고, $p=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이다.

$k+p=\frac{14\sqrt{3}}{9}$이다.

유형 03 삼각함수의 그래프와 직선의 만남

01 2021년 실시 6월 15번 정답률 26%

15. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이다.

ㄴ. $\{t \mid \beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2=\frac{1}{3}$이다.

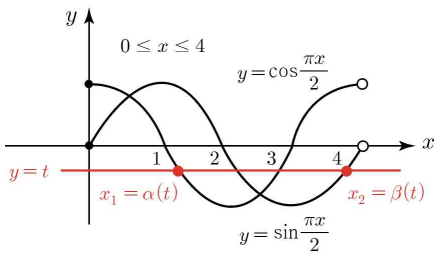
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정 답 ②

해 설

ㄱ.

- $\sin\frac{\pi x}{2}$와 $\cos\frac{\pi x}{2}$의 그래프를 그리고, $y=t$와 만나는 점을 확인
- $x_1=1+x$, $x_2=4-x$이므로 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이다. (O)



ㄴ.

STEP1 집합의 해석

$\{t \mid 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\}$ ➡ $0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$를 만족하는 모든 t의 집합

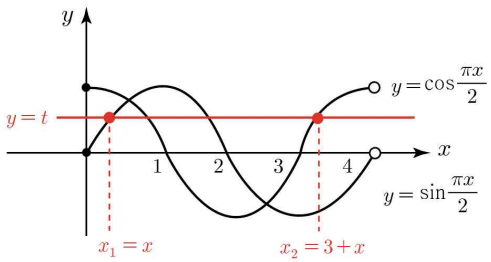
$\{t \mid \beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}$ ➡ $\beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)$를 만족하는 모든 t의 집합

- 위의 t의 집합이 완벽하게 겹치는 지를 확인해보면 된다.

$0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$에서 항상 $\beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)$인 지 확인!

STEP2 그래프 그리기

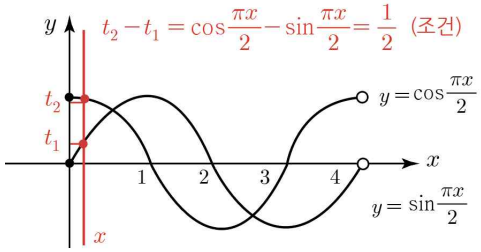
- $y=t=0$인 선을 그으면 $\alpha(0)=0$, $\beta(0)=3$, $\beta(0)-\alpha(0)=3$이다.
- $0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$에서 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$는 $\sin x$와 $\cos x$의 교점이다.



- $\beta(t)-\alpha(t)=x+3-x=3$을 만족한다. (O)

ㄷ.

$\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$라는 것은 'x의 값이 동일하다.' 는 것이다.



$\cos-\sin=\frac{1}{2}$을 통해 $\cos\times\sin=t_1\times t_2=\frac{3}{8}$ (X)

($\cos-\sin=k$일 때, $\cos\times\sin=\frac{1-k^2}{2}$ 이다.)

TIP $[p(x)-t]\cdot[q(x)-t]=0$의 의미

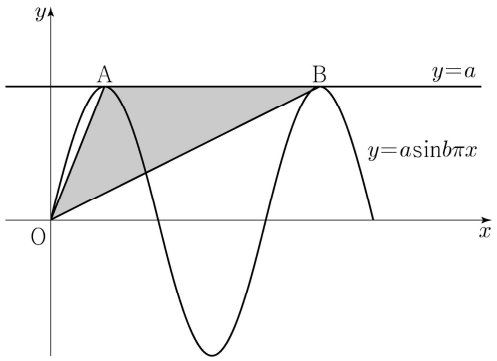
$p(x)$, $q(x)$가 $y=t$와 만나는 점들의 합집합을 의미한다.

02 2021년 실시 9월 10번 정답률 77%

10. 두 양수 a, b에 대하여 곡선 $y=a\sin b\pi x\left(0\le x\le\frac{3}{b}\right)$이 직선 $y=a$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 5이고 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$일 때, $a+b$의 값은?

(단, O는 원점이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



정 답 ③

해 설

STEP1 $y=a\sin b\pi x$와 $y=a$의 분석

- 주기 $T=\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$이다.
- $A\left(\frac{1}{2b},a\right)$, $B\left(\frac{1}{2b}+\frac{2}{b},a\right)=\left(\frac{5}{2b},a\right)$

STEP2 삼각형의 넓이 조건

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\text{높이}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{b}\times a=\frac{a}{b}=5 \rightarrow a=5b$

STEP3 기울기 조건

- A와 B의 기울기곱 : $\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=\frac{4}{5}a^2b^2=\frac{5}{4} \rightarrow ab=\frac{5}{4}$

위의 두 식을 정리하면 $5b^2=\frac{5}{4}$에서 $b=\frac{1}{2}$이고, $a=\frac{5}{2}$이다.

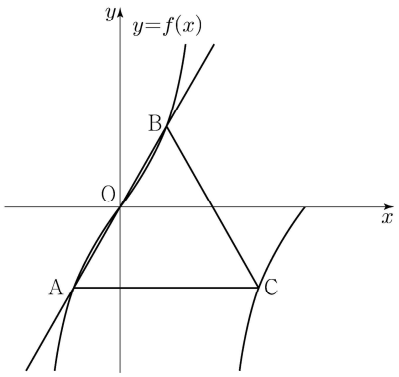
따라서 $a+b=3$이다.

03 2021년 실시 수능 11번 정답률 61%

11. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \left| -\frac{a}{2} < x \le a, x \ne \frac{a}{2}\right.\right\}$에서 정의된 함수

$$f(x)=\tan\frac{\pi x}{a}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

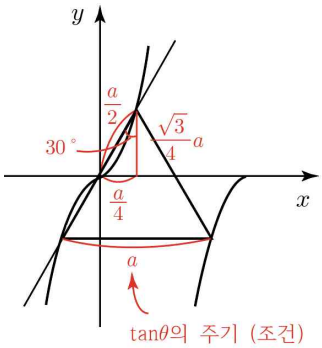
정 답 ③

해 설

STEP1 문제 분석하기

- $f(x)$를 보면 주기 $T=a$이다.
- 직선과 $\tan x$가 만나는 점의 차이는 주기이므로 A와 C 사이의 거리는 a이다.
- 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이다. (a의 값을 구해야한다.)

STEP2 $f(x)$에 좌표를 집어넣으면 a의 값을 구할 수 있다.



- $y=\tan x$와 원점을 지나는 직선이 만나는 두 점은 원점 대칭이다. 따라서 $\overline{OA}=\overline{OB}=\frac{a}{2}$이므로 $B\left(\frac{a}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}a\right)$이다.
- $f\left(\frac{a}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1=\frac{\sqrt{3}}{4}a$에서 $a=\frac{4}{\sqrt{3}}$이다.
- 따라서 삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$이다.

04 2022년 실시 9월 9번 정답률 74%

9. 닫힌구간 $[0, 12]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\cos\frac{\pi x}{6},\quad g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 α_1, α_2라 할 때, $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이다. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 β_1, β_2라 할 때, $|\beta_1-\beta_2|$의 값은? (단, k는 $-1<k<1$인 상수이다.) [4점]

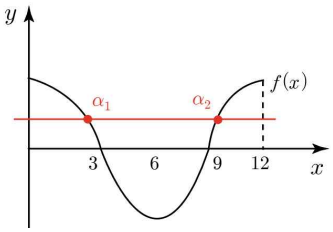
① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

정 답 ③

해 설

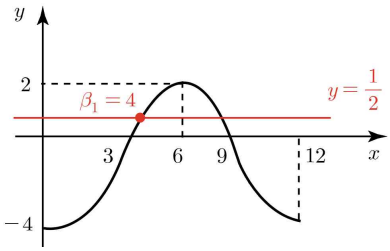
STEP1 $y=k$ 구하기

- $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이 되려면 대칭선으로부터 거리가 4이다.
  이를 만족하려면 $y=k>0$이다. (음수가 되면 $|\alpha_1-\alpha_2|<6$이다.)



- α_1와 α_2는 $x=6$에 대해서 대칭이고, 대칭 간격이 4이므로
  $\alpha_1=2$이고 $f(2)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}=k$이다.

STEP2 $|\beta_1-\beta_2|$ 구하기



- $g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1=\frac{1}{2}$에서 $\beta_1=x=4$ 이다.
- $|\beta_1-\beta_2|$은 '점과 대칭선의 떨어진 거리 x 2'이므로 4이다.

05 2023년 실시 6월 19번 정답률 60%

19. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\sin bx+8-a$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이다.

(나) $0\leq x<2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

정 답 8

해 설

STEP1 (가)의 해석

- 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이다. 이 조건의 의미는 $f(x)$의 최솟값이 0 이상이라는 뜻이다. 또한, $f(x)=0$의 근이 존재하므로 $f(x)$의 최솟값은 0이어야 한다.
- $a\sin bx+8-a$의 최솟값은 $+8-2a$이다. 따라서 $a=4$이다.

STEP2 (나)의 해석

- (가)에 의하여 $f(x)=0$이 되는 점은 한 주기에 최솟값일 때 한 번 있다.
  즉, 실근의 개수가 4개라는 것은 함수가 4번 반복된다는 것이다.
- 주기는 $\frac{\pi}{2}$가 되야하므로 $\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{b}$에서 $b=4$이다.
- 따라서 $a+b=8$이다.

06 2023년 실시 9월 9번 정답률 62%

9. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 부등식

$$\cos x \le \sin\frac{\pi}{7}$$

를 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\alpha \le x \le \beta$이다.
$\beta-\alpha$의 값은? [4점]

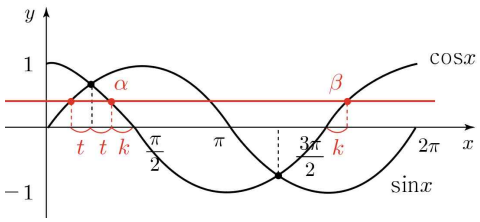
① $\frac{8}{7}\pi$ ② $\frac{17}{14}\pi$ ③ $\frac{9}{7}\pi$ ④ $\frac{19}{14}\pi$ ⑤ $\frac{10}{7}\pi$

정 답 ③

해 설

STEP1 α구하기 (교점 대칭)

- $\cos x$와 $\sin x$를 그리고서 $y=\sin\frac{\pi}{7}$을 생각해보자.
- $y=\sin\frac{\pi}{7}$와 $y=\sin x$는 $x=\frac{\pi}{7}$에서 만나고, $\cos x$와 만나는 점은 $x=\frac{\pi}{4}$에 대해서 대칭이다. 분모를 28로 통분시키면 $\frac{4}{28}\pi$, $\frac{7}{28}\pi$이므로 $\alpha=\frac{10}{28}\pi$이다.



STEP2 β구하기 (cos대칭)

- β는 α와 $x=\pi$에 대해서 대칭이다.
  $\frac{10}{28}\pi$, $\frac{28}{28}\pi$이므로 $\beta=\frac{46}{28}\pi$이다.
- $\therefore \beta-\alpha=\frac{36}{28}\pi=\frac{9}{7}\pi$이다.

07 2023년 실시 수능 19번 정답률 38%

19. 함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$라 할 때, $0<x<16$에서 부등식

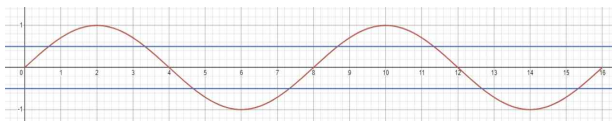
$$f(2+x)f(2-x)<\frac{1}{4}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

정 답 32

해 설

- 함수를 그려보면 $f(2+x)=f(2-x)$임을 알 수 있다.
- 조건은 $f(2+x)f(2-x)=f(2+x)^2<\frac{1}{4}$,
  $-\frac{1}{2}<f(2+x)<\frac{1}{2}$로 변형이 가능하다.
  (단, $t=2+x$이고 $2<t<18$)



- $t=4,8,12,16$이 가능하다. → $x=2,6,10,14$

$\therefore$ 모든 x값의 합은 32이다.

08 2024년 실시 6월 20번 정답률 14%

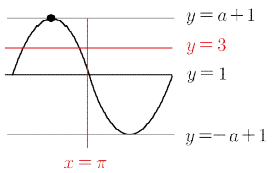
20. 5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프가 직선 $x=\pi$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자. $n(A\cup B\cup C)=3$이 되도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값을 구하시오. [4점]

정 답 24

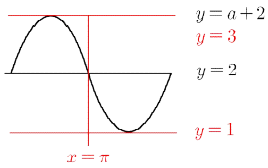
해 설

5 이하의 자연수 조건이 주어졌으므로 직접 대입하면서 해결하자.
교점의 개수가 총 3개가 나오도록 하는 a의 값을 찾으면 된다.

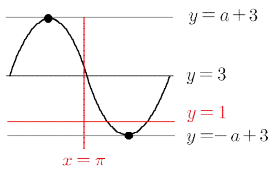
CASE 1. $b=1 \rightarrow a=3,4,5$



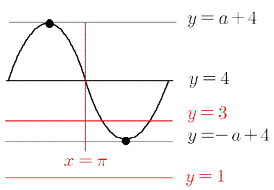
CASE 2. $b=2 \rightarrow a=1$



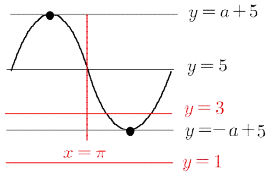
CASE 3. $b=3 \rightarrow a=3,4,5$



CASE 4. $b=4 \rightarrow a=2$



CASE 5. $b=5 \rightarrow a=3$



따라서 모든 경우를 통해 $a+b$의 최댓값은 8이고, 최솟값은 3이다.
$M\times m=24$

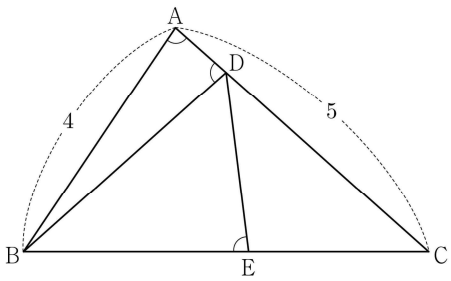
유형 04 사인법칙과 코사인법칙

01 2021년 실시 6월 12번 정답률 71%

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC = \angle BDA = \angle BED$$

일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]

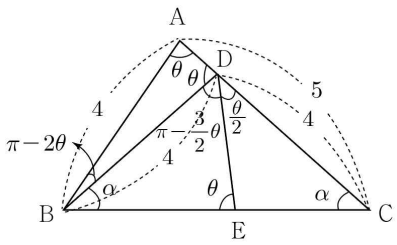


① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

정 답 ③

해 설

STEP1 각도 체크



- $\angle BAC=\angle BDA=\angle BED$를 θ라고 잡겠다.
- 두 각이 있는 $\triangle ABD$에 대해서 $\angle ABD=\pi-2\theta$이다.
- $\triangle ABD$는 이등변삼각형이므로 $\overline{BD}=4$이다.
- $\triangle ABD$의 밑변은 $\cos\theta$조건에 의해서 $\overline{AD}=1$이다. → $\overline{DC}=4$
- 두 길이가 같은 $\triangle BCD$는 이등변삼각형이므로 밑각을 α라 한다.
  $\triangle BCD$ 각도의 세 합은 $(\pi-2\theta)+\theta+2\alpha=\pi$에서 $\alpha=\frac{\theta}{2}$이다.
- $\triangle BDE$ 각도의 세 합에 의해 $\angle BDE=\pi-\frac{3}{2}\theta$ → $\angle CDE=\frac{\theta}{2}$

STEP2 답 구하기

$\triangle CDE$는 이등변삼각형이라는 수학적 의미가 발생했다.

여기에서 cos법칙을 쓰면, $\overline{DE}^2+\overline{CE}^2=\overline{CD}^2+2\overline{DE}^2\cos(\pi-\theta)$

이고, $2\overline{DE}^2=16-2\overline{DE}^2\times\frac{1}{8}$이다.

따라서, $\overline{DE}=\frac{8}{3}$이다.

반각 공식을 알고 있다면 간단하게 다음과 같이 식을 세울 수 있다.

$\overline{DE}=\frac{2}{\cos(\frac{\theta}{2})}=\frac{2}{\frac{3}{4}}=\frac{8}{3}$이다.

TIP 배각 공식과 반각 공식

[배각 공식]

① $\sin 2x=2\sin x\cos x$

② $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x$

③ $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

[반각 공식]

① $\sin x=\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$

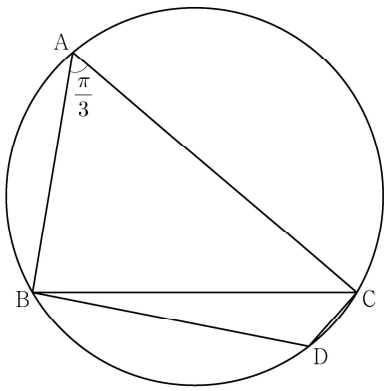
② $\cos x=\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$

③ $\tan x=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$

02 2021년 실시 9월 12번 정답률 72%

12. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$ 인 원에 내접하고 $\angle A=\frac{\pi}{3}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD)=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ 일 때, $\overline{BD}+\overline{CD}$ 의 값은? [4점]

① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$



정 답 ②

해 설

STEP1 BC의 길이 구하기

사인법칙 $\overline{BC}=2R\sin\frac{\pi}{3}=2\times2\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{21}$ 이다.

STEP2 BD의 길이 구하기

사인법칙 $\overline{BD}=2R\sin(\angle BCD)=2\times2\sqrt{7}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}=8$이다.

STEP3 CD의 길이 구하기

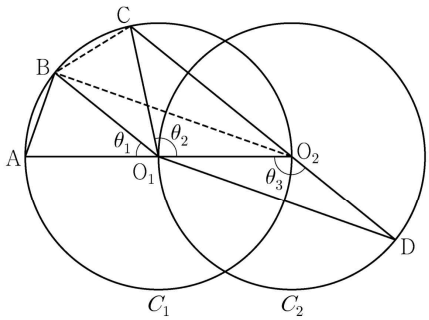
- 원에 내접하는 사각형의 마주보는 각의 합은 180° 이다. 따라서 $\angle D=120^\circ$ 이다.
- △BCD에 대해서 코사인법칙을 사용하면 다음과 같다.
  $\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2-2\overline{BD}\times\overline{CD}\times\cos120^\circ$
  $84=64+x^2+8x$, $x^2-8x-20=(x-2)(x+10)=0$에서
  $x=2$이다.

$\therefore \overline{BC}+\overline{CD}=10$이다.

03 2021년 실시 수능 15번 정답률 46%

15. 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다.

이때 $\angle BO_1A=\theta_1$, $\angle O_2O_1C=\theta_2$, $\angle O_1O_2D=\theta_3$이라 하자.



다음은 $\overline{AB}:\overline{O_1D}=1:2\sqrt{2}$이고 $\theta_3=\theta_1+\theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

$\angle CO_2O_1+\angle O_1O_2D=\pi$이므로 $\theta_3=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}$이고

$\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로 $\angle CO_1B=\theta_1$이다.

이때 $\angle O_2O_1B=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.

$\overline{AB}=k$라 할 때

$\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2}=$ (가) 이고,

$\angle BO_2A=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\dfrac{\theta_1}{2}=$ (나) 이다.

삼각형 O_2BC에서

$\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로

코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C}=$ (다) 이다.

$\overline{CD}=\overline{O_2D}+\overline{O_2C}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2C}$이므로

$\overline{AB}:\overline{CD}=k:\left(\dfrac{\text{(가)}}{2}+\text{(다)}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)\times g(p)$의 값은? [4점]

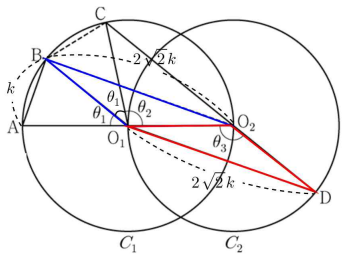
① $\dfrac{169}{27}$ ② $\dfrac{56}{9}$ ③ $\dfrac{167}{27}$ ④ $\dfrac{166}{27}$ ⑤ $\dfrac{55}{9}$

정 답 ②

해 설

STEP1 그림에 표시되지 않은 조건 체크

- $\angle CO_1B=\theta_1$를 체크한다.
- 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동을 체크한다.
- $\overline{AB}=k$, $\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$를 체크한다.



STEP2 $\overline{AO_2}=$ (가) 구하기

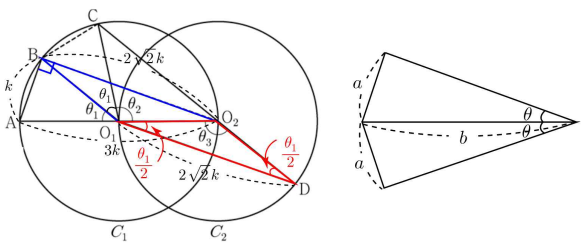
- 각도 θ가 얼마의 값을 갖는지에 대해서 알지 못하므로 거리 정보를 통해서 구해야하는 것을 알 수 있다.
- 삼각형 ABO_2에 대해서 피타고라스 정리를 사용 → $\overline{AO_2}=3k$

STEP3 $\cos\dfrac{\theta_1}{2}=$ (나) 구하기

$\angle BO_2A=\dfrac{\theta_1}{2}$ 조건에 의하여 $\cos\dfrac{\theta_1}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

STEP4 $\overline{O_2C}=$ (다) 구하기

- 코사인법칙을 이용하라고 했으니 각도가 θ_1에 관계된 삼각형을 생각해보자. 그리고 쓰지 않은 조건인 $\angle CO_1B=\theta_1$을 생각해보면 $\overline{AB}=\overline{BC}=k$가 됨을 알 수 있다.



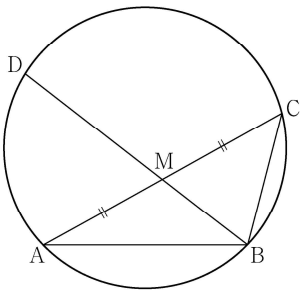
- 삼각형의 닮음 성질에 의하여 $\angle BO_2C=\dfrac{\theta_1}{2}$가 된다.
- 코사인법칙을 쓰면 $k^2=x^2+8k^2-2\times2\sqrt{2}k\times x\times\cos(\dfrac{\theta_1}{2})$,

  $x^2-\dfrac{16}{3}kx+7k^2=0$, $3x^2-16kx+21k^2=0$에서 $x=\dfrac{7}{3}k$이다.

  (삼각형조건에 의하여 BO_2보다 커질 수 없다.)
- $\therefore f(p)\times g(p)=3p\times\dfrac{7}{3}p=7p^2=\dfrac{56}{9}$이다.

04 2022년 실시 6월 10번 정답률 59%

10. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]

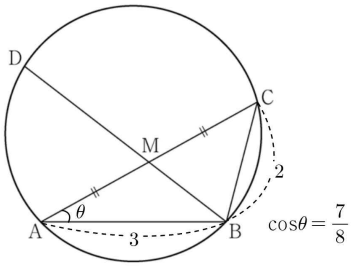


① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$
④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

정 답 ③

해 설

STEP1 조건 체크



$\cos\theta=\frac{7}{8}$

STEP2 MA 길이 구하기

삼각형 ABC에 대해서 코사인법칙을 사용하면 $\overline{AC}=x$라 할 때,

$4=9+x^2-2\times3x\times\frac{7}{8}$, $x^2-\frac{21}{4}x+5=0$, $4x^2-21x+20=0$

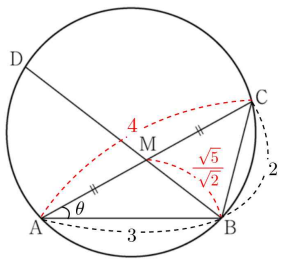
에서 $x=4$ or $\frac{5}{4}$인데, $x>3$이므로 $x=4$이다.

STEP3 MB 길이

MB에 대해서 코사인법칙과 중선정리를 생각할 수 있다.

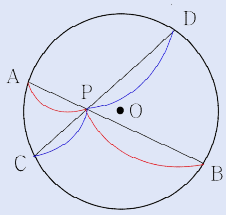
중선정리를 쓰면 $9+4=2(h^2+4)$에서 $h=\sqrt{\frac{5}{2}}$이다.

물론 정석 풀이는 중선정리를 쓰는게 아니고, 삼각형 AMB에서 cos법칙을 이용하여 $\overline{BM}$의 길이를 구하는 것이다.

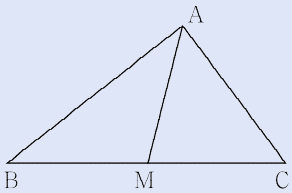


방멱의 정리에 의하여 $\overline{MD}\times\frac{\sqrt{5}}{2}=2\times2$이므로 $\overline{MD}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$이다.

TIP 방멱의 정리 : $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$



TIP 중선 정리 : $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{MC}^2)$
(단, $\overline{MB}=\overline{MC}$이다.)

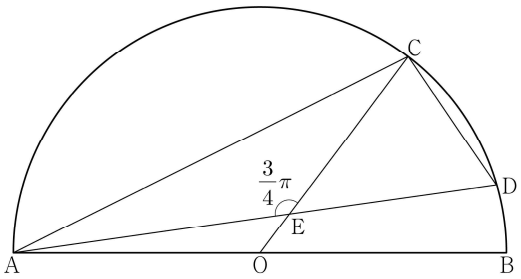


05 2022년 실시 9월 13번 정답률 36%

13. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{CE}=4,\quad \overline{ED}=3\sqrt{2},\quad \angle CEA=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{AC}\times\overline{CD}$의 값은? [4점]



① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

정 답 ⑤

해 설

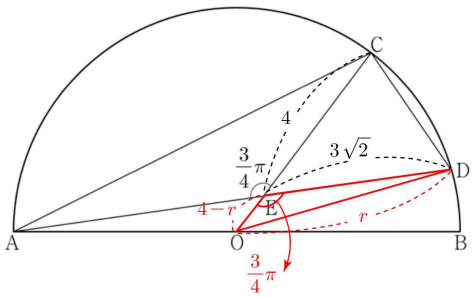
STEP1 CD 거리 구하기

삼각형 CDE의 코사인법칙에 의하여

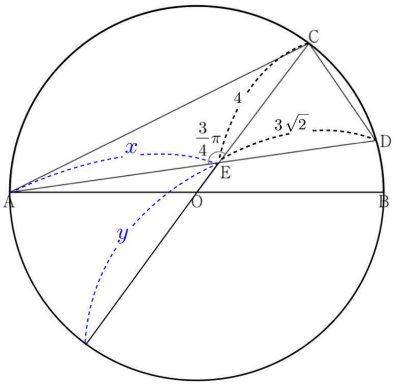
$x^2=16+18-2\times12\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=10$, $x=\sqrt{10}$이다.

STEP2 AC 길이 구하기

코사인법칙이나, 사인법칙을 쓰려면 AE의 길이3를 알아야한다.
그리고 서로 크로스하는 그림이 있으므로 방멱의 정리를 사용하자.
그러기 위해서는 반지름을 알아야한다.



- 코사인법칙 $r^2=18+(4-r)^2-2\times3\sqrt{2}\times(4-r)\times-\frac{1}{\sqrt{2}}$,
  $r^2=18+16-8r+r^2-24+6r$을 정리하면 $r=5$이다.



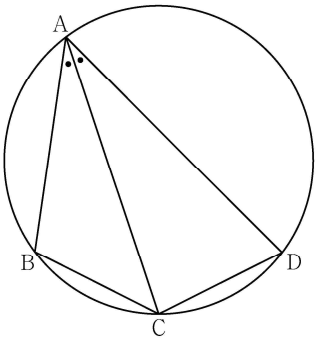
- 방멱의 정리 $4\times6=x\times3\sqrt{2}$에서 $x=4\sqrt{2}$이다.
- 코사인법칙 $\overline{AC}^2=32+16+2\times16\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=80$에서
  $\overline{AC}=4\sqrt{5}$이므로 $\overline{AC}\times\overline{CD}=20\sqrt{2}$이다.

06 2022년 실시 수능 11번 정답률 64%

11. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$$\overline{AB}=5,\ \overline{AC}=3\sqrt{5},\ \overline{AD}=7,\ \angle BAC=\angle CAD$$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는? [4점]



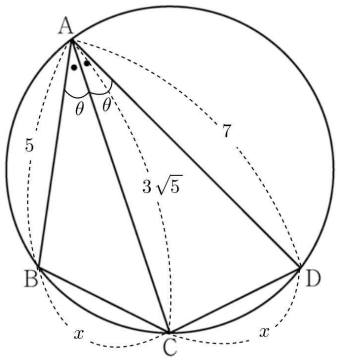
① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$

④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

정 답 ①

해 설

STEP1 조건 체크



STEP2 x, $\cos\theta$ 구하기

- ABC 코사인법칙 $x^2=25+45-30\sqrt{5}\cos\theta$
- ACD 코사인법칙 $x^2=49+45-42\sqrt{5}\cos\theta$

연립하면 $24=12\sqrt{5}\cos\theta$, $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $x=\sqrt{10}$ 이다.

STEP3 사인법칙

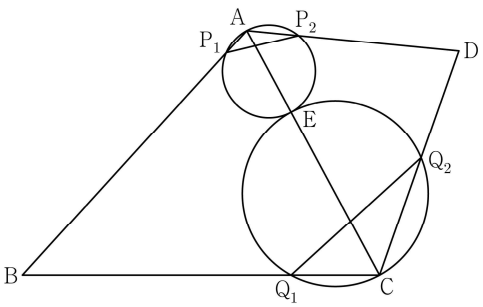
- $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ → $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$
- ABC 사인법칙 $\frac{\sqrt{10}}{\sin\theta}=2R$, $\therefore R=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 이다.

07 2023년 실시 6월 13번 정답률 28%

13. 그림과 같이

$$\overline{BC}=3,\ \overline{CD}=2,\ \cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3},\ \angle DAB>\frac{\pi}{2}$$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고,
선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자.
$\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB}+\overline{AD}$의 값은? (단, $\overline{AB}>\overline{AD}$) [4점]



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

정 답 ①

해 설

$\angle BCD=\alpha$, $\angle DAB=\beta$ (단, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$), $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$라고 가정하자.

삼각형 BCD에서 $\overline{BC}=3$, $\overline{CD}=2$, $\cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3}$이므로
코사인법칙에 의하여 $\overline{BD}^2=9+4-2\times3\times2\times(-\frac{1}{3})=17$이다.
그러므로 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여
$a^2+b^2-2ab\cos\beta=17$이다.

한편, 점 E가 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점이므로 두 삼각형 AP_1P_2, CQ_1Q_2의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, $2r$로 놓을 수 있다.

이때 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{P_1P_2}}{\sin\beta}=2r$, $\frac{\overline{Q_1Q_2}}{\sin\alpha}=4r$이므로
$\sin\alpha:\sin\beta=\frac{\overline{Q_1Q_2}}{4r}:\frac{\overline{P_1P_2}}{4r}=\frac{5\sqrt{2}}{2}:3$에서 $\sin\beta=\frac{6\sin\alpha}{5\sqrt{2}}$이다.
이때 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이므로
$\sin\beta=\frac{6}{5\sqrt{2}}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4}{5}$이다.

$\cos\beta<0$이므로 $\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\frac{3}{5}$
삼각형 ABD의 넓이가 2이므로 $\frac{1}{2}ab\sin\beta=2$에서
$\frac{1}{2}ab\times\frac{4}{5}=2$, $ab=5$이다.

㉠에서 $a^2+b^2-2\times5\times(-\frac{3}{5})=17$
$a^2+b^2=11$

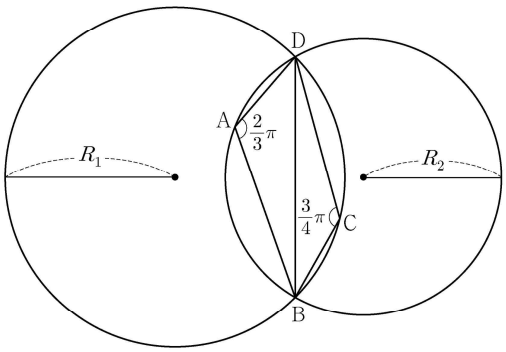
따라서 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=11+2\times5=21$이므로
$a+b=\sqrt{21}$이다.

08 2023년 실시 9월 20번 정답률 47%

20. 그림과 같이

$$\overline{AB}=2,\ \overline{AD}=1,\ \angle DAB=\frac{2}{3}\pi,\ \angle BCD=\frac{3}{4}\pi$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하자.



다음은 $R_1\times R_2$의 값을 구하는 과정이다.

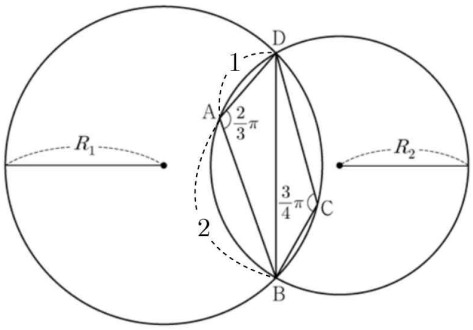
> 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여
>
> $$R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}$$
>
> 이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여
>
> $$R_2=\boxed{\text{(가)}}\times\overline{BD}$$
>
> 이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여
>
> $$\overline{BD}^2=2^2+1^2-(\boxed{\text{(나)}})$$
>
> 이므로
>
> $$R_1\times R_2=\boxed{\text{(다)}}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $9\times(p\times q\times r)^2$의 값을 구하시오. [4점]

정 답 98

해 설

STEP1 조건 체크



STEP2 (가) 구하기

$2R_2=\dfrac{\overline{BD}}{\sin(\frac{2}{3}\pi)}$ 이므로 $R_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times\overline{BD}$이다.

STEP3 (나) 구하기

거리가 나와있는 ABD에 대해서 코사인법칙을 사용하자.

$x^2=4+1-2\times2\times-\dfrac{1}{2}$이므로 (나)$=-2$이다.

STEP4 (다) 구하기

(다)$=R_1\times R_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times7=\dfrac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$이다.

$\therefore 9\times(p\times q\times r)^2=9\times(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times-2\times\dfrac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{3}})^2=98$

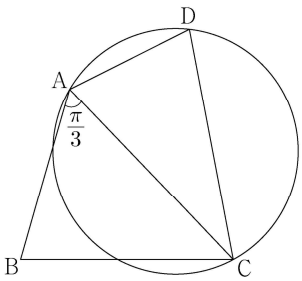
09 2023년 실시 수능 13번 정답률 58%

13. 그림과 같이

$$\overline{AB}=3,\quad \overline{BC}=\sqrt{13},\quad \overline{AD}\times\overline{CD}=9,\quad \angle BAC=\frac{\pi}{3}$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACD의 넓이를 S_2라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

$S_2=\frac{5}{6}S_1$일 때, $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$의 값은? [4점]

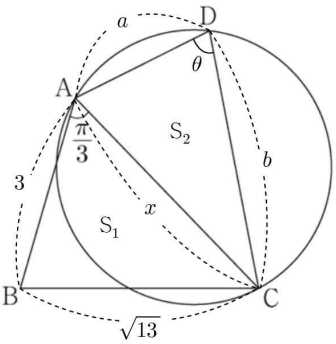


① $\frac{54}{25}$ ② $\frac{117}{50}$ ③ $\frac{63}{25}$ ④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{72}{25}$

정 답 ①

해 설

STEP1 조건 체크



STEP2 AC 길이 구하기

· ABC 코사인법칙 $13=9+x^2-3x$,

$x^2-3x-4=(x+1)(x-4)=0$에서 $x=4$이다.

STEP3 넓이 조건 이용하기

$S_2=\frac{5}{6}S_1$

$\frac{1}{2}ab\sin\theta=\frac{5}{6}\times(\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin\frac{\pi}{3})$ → $\sin\theta=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

STEP4 반지름 구하기

사인법칙 $\frac{4}{\sin\theta}=2R$을 통해 $R=\frac{2}{\sin\theta}$이다.

$$\frac{R}{\sin(\angle ADC)}=\frac{R}{\sin\theta}=\frac{2}{\sin^2\theta}=\frac{2}{\frac{25\times3}{81}}=\frac{54}{25}$$

10 2024년 실시 6월 10번 정답률 35%

10. 다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

(가) $3\sin A = 2\sin B$
(나) $\cos B = \cos C$

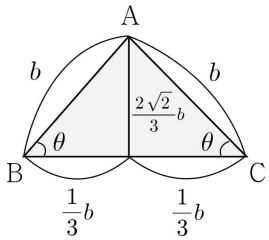
① $\frac{32}{9}\sqrt{2}$ ② $\frac{40}{9}\sqrt{2}$ ③ $\frac{16}{3}\sqrt{2}$
④ $\frac{56}{9}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{64}{9}\sqrt{2}$

정 답 ⑤

해 설

삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π이므로 외접원의 반지름 $R=3$이다.

(가) $3\sin A = 2\sin B$에서 $a:b:c = \sin A:\sin B:\sin C$을 통하여 $3a = 2b$이다.
(나) $\cos B = \cos C$를 만족하므로 $\theta_B = \theta_C$이고, 사인법칙에 의하여 $b = c$이다.



사인법칙을 통하여 b의 값을 구해보자.

$\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$이므로 $b = 2R\sin\theta = 6\times\frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}$이다.

$S = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}b\times\frac{2\sqrt{2}}{3}b = \frac{2\sqrt{2}}{9}b^2 = \frac{64\sqrt{2}}{9}$

11 2024년 실시 9월 10번 정답률 42%

10. $\angle A > \frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{2} : 1$, $\overline{AH} = 2$

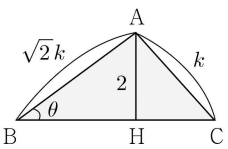
이고, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 50π일 때, 선분 BH의 길이는? [4점]

① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7

정 답 ①

해 설

외접원의 넓이가 50π이므로 사인법칙에 의하여 $R = 5\sqrt{2}$이다.



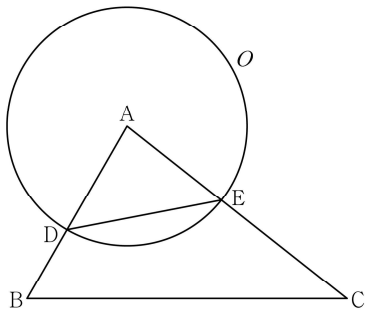
$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{2}k} = \frac{\sqrt{2}}{k}$를 만족하고, $\frac{k}{\sin\theta} = 2R$에서 $k^2 = 20$이다.

선분 BH의 길이는 $\sqrt{2k^2-4} = 6$이다.

12 2024년 실시 수능 14번 정답률 32%

14. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 AB 위에 $\overline{AD}:\overline{DB}=3:2$인 점 D를 잡고, 점 A를 중심으로 하고 점 D를 지나는 원을 O, 원 O와 선분 AC가 만나는 점을 E라 하자.

$\sin A:\sin C=8:5$이고, 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비가 $9:35$이다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은? (단, $\overline{AB}<\overline{AC}$) [4점]

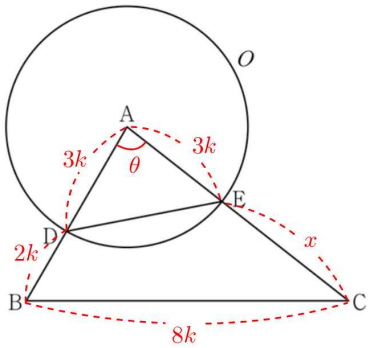


① $18+15\sqrt{3}$ ② $24+20\sqrt{3}$ ③ $30+25\sqrt{3}$
④ $36+30\sqrt{3}$ ⑤ $42+35\sqrt{3}$

정 답 ④

해 설

주어진 정보를 그림에 체크하면 아래와 같다.



삼각형의 넓이 조건을 이용하면

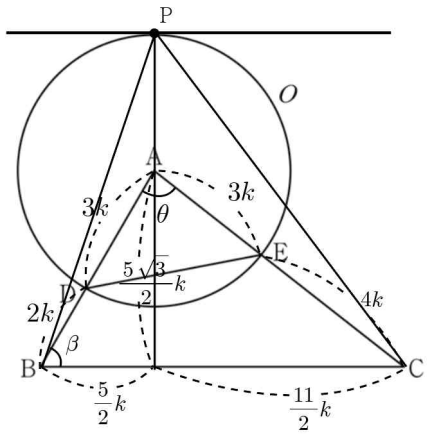
$\triangle ADE=\frac{1}{2}(3k)^2\sin\alpha$, $\triangle ABC=\frac{1}{2}5k(3k+x)\sin\alpha$에서

$x=4k$이다.

코사인법칙에 의하여 $\cos B=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\frac{1}{2}$이므로

$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 사인법칙에 의하여 $\frac{7k}{\sin\beta}=2R$에서 $k=\sqrt{3}$이다.

따라서 원 O의 반지름은 $r=3\sqrt{3}$이다.



삼각형 PBC의 넓이가 최대이려면 점 P와 $\overline{BC}$ 사이의 거리가 최대가 되어야 한다. 따라서, 점 P는 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발의 연장선과 원의 교점이 된다. (자세한 내용은 강의 설명 참고)

$\triangle PBC=\frac{1}{2}\times8k\times(\frac{5\sqrt{3}}{2}k+3k)=36+30\sqrt{3}$

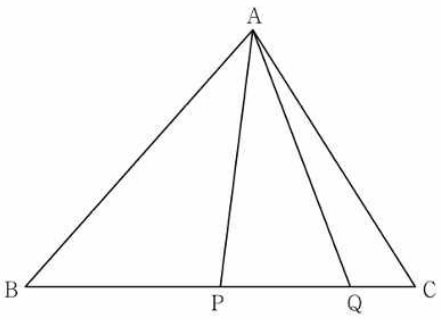
13 2025년 실시 6월 14번 정답률 73%

14. $\overline{AB}=2\sqrt{7}$인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 P, 선분 BC를 5 : 1로 내분하는 점을 Q라 하자.

$$\overline{AQ}=3\sqrt{2},\ \sin(\angle QAP):\sin(\angle APQ)=\sqrt{2}:3$$

일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는? [4점]

① $\frac{85}{9}\pi$ ② $\frac{88}{9}\pi$ ③ $\frac{91}{9}\pi$ ④ $\frac{94}{9}\pi$ ⑤ $\frac{97}{9}\pi$



정 답 ②

해 설

도형 문항에서는 크게 세 가지의 무기가 있다. 사인법칙, 코사인법칙, 원 이렇게 세 가지로 대부분 풀리기 때문에 각각을 어떻게 사용해볼지 고민하자.

조건에서 가장 눈에 띄는 사인값 조건을 활용하자.

$\sin(\angle QAP):\sin(\angle APQ)=\sqrt{2}:3$이므로

$\overline{PQ}:\overline{AQ}=\sqrt{2}:3$이다. (삼각형의 두 내각에 대한 사인값의 비는 대응변의 길이비와 같음을 명심하자.)

$\overline{AQ}=3\sqrt{2}$이므로 $\overline{PQ}=2$이다.

점 Q는 선분 BC를 5 : 1로 내분하므로 $\overline{BP}:\overline{PQ}:\overline{QC}=3:2:1$이다.

여기에서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이를 구해야 하는데, 아직 $\overline{AC}$의 길이를 모른다.

그러므로 세 변의 길이를 아는 삼각형 ABQ를 이용하여 $\angle ABQ$에 대한 정보를 찾은 후, $\overline{AC}$를 구하면 된다.

삼각형 ABQ에서 세 변의 길이는 $\overline{AB}=2\sqrt{7}$, $\overline{BQ}=5$, $\overline{AQ}=3\sqrt{2}$이다.

$\cos(\angle ABQ)=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BQ}^2-\overline{AQ}^2}{2\overline{AB}\,\overline{BQ}}=\frac{35}{20\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$이다.

삼각형 ABC에서 다시 코사인법칙을 이용하면,

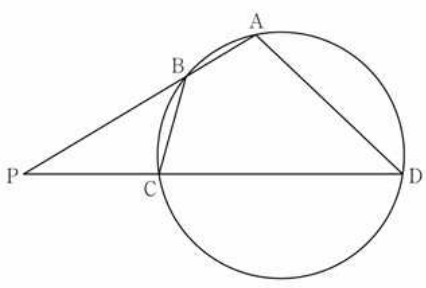
$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AB}\,\overline{BC}\frac{\sqrt{7}}{4}=22$이다.

따라서, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름 길이는

$R=\frac{\overline{AC}}{2\sin(ABC)}=\frac{2\sqrt{22}}{3}$이다. 따라서, 외접원의 넓이는 $\frac{88}{9}\pi$이다.

14 2025년 실시 9월 20번 정답률 87%

20. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고 $\overline{AB}:\overline{CD}=1:3$, $\overline{BC}<\overline{AD}$일 때, 직선 AB와 직선 CD가 만나는 점을 P라 하자.



다음은 $\overline{PB}:\overline{PC}:\overline{BC}=7:5:\sqrt{14}$이고 $\overline{AD}=4\sqrt{13}$일 때, 삼각형 BPC의 외접원의 반지름의 길이를 구하는 과정이다.

$\angle BPC=\theta$라 할 때, $\overline{PB}:\overline{PC}:\overline{BC}=7:5:\sqrt{14}$이므로
삼각형 BPC에서 코사인법칙에 의하여 $\cos\theta=\frac{6}{7}$이다.
$\overline{PB}:\overline{PC}=7:5$에서 $\overline{PB}=7k$, $\overline{PC}=5k$,
$\overline{AB}:\overline{CD}=1:3$에서 $\overline{AB}=l$, $\overline{CD}=3l$이라 하자.
원의 성질에 의하여
삼각형 BPC와 삼각형 DPA가 서로 닮음이므로
$\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{PD}:\overline{PA}$이고, $l=$ [(가)] $\times k$이다.
삼각형 BPC와 삼각형 DPA의 닮음비가 $1:$ [(나)]이므로
$\overline{BC}=\frac{1}{\text{(나)}}\times\overline{AD}$이다.
따라서 삼각형 BPC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 할 때,
삼각형 BPC에서 사인법칙에 의하여 $R=$ [(다)]이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $p+q+r$의 값을 구하시오. [4점]

정 답 12

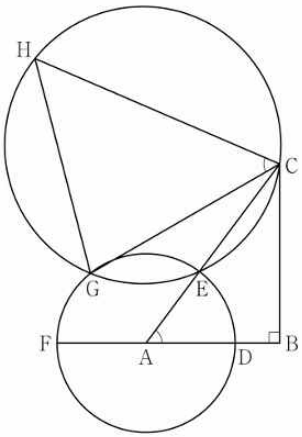
해 설

250620 문항에 이어 9월 모의평가에서도 빈칸 문제가 출제되었다.
이 문제 역시 풀이과정을 따라가면서 빈칸을 채우면 어렵지 않은 문항으로 출제되었다.
풀이과정을 보면, 먼저 삼각형 PBC에서 세 변의 길이를 이용해 $\angle BPC$에 대한 정보를 구하였다.
그리고, 삼각형 BPC와 삼각형 DPA의 닮음을 활용하여 비례식을 세웠다.

$\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{PD}:\overline{PA}$에서 $\overline{PB}=7k$, $\overline{PC}=5k$, $\overline{PD}=5k+3l$,
$\overline{PA}=7k+l$이다.
따라서, $7k:5k=5k+3l:7k+l$이다.
$5k(5k+3l)=7k(7k+l)$, $l=3k$이다.
∴ (가)는 3이다.
위에서 두 삼각형의 닮음비는 $\overline{PC}:\overline{PA}=5k:7k+l=1:2$이다.
∴ (나)는 2이다.
삼각형 PBC에서 사인법칙을 이용하면, $2R\sin\theta=\overline{BC}$이다.
$\cos\theta=\frac{6}{7}$이므로 $\sin\theta=\frac{\sqrt{13}}{7}$이고, $\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AD}=2\sqrt{13}$이다.
따라서, $R=7$이다.
∴ (다)는 7이다.
따라서, $p+q+r=12$이다.

15 2025년 실시 수능 14번 정답률 57%

14. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$이고 $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 2:1로 내분하는 점을 D, 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{AD}$인 원이 선분 AC와 만나는 점을 E, 직선 AB가 이 원과 만나는 점 중 D가 아닌 점을 F라 하고, 호 EF 위의 점 G를 $\overline{CG}=2\sqrt{6}$이 되도록 잡는다. 세 점 C, E, G를 지나는 원 위의 점 H가 $\angle HCG=\angle BAC$를 만족시킬 때, 선분 GH의 길이는? [4점]



① $\frac{6\sqrt{15}}{5}$ ② $\frac{38\sqrt{10}}{25}$ ③ $\frac{14\sqrt{3}}{5}$
④ $\frac{32\sqrt{15}}{25}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

정 답 ④

해 설

제시된 길이 조건을 모두 그림에 표시하고 나면, 어떤 값을 구해야 할지가 명확하게 눈에 들어오는 문항이다.

도형 문항은 항상 각각의 점들이 유일하게 결정될 수 밖에 없는 이유가 존재하고, 그 논리를 통해 숨겨진 길이나 보조선을 찾아야 한다.

STEP1 문항에 제시된 길이를 표현하고 구해야 할 것 정하기

먼저, 지문에 나온 길이들을 그림에 표시하자.

$\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$, $\overline{AC}=5$, $\overline{AD}=2$, $\overline{DB}=1$, $\overline{CG}=2\sqrt{6}$이다.

길이를 모두 표현하고 나면, 문제에서 물어본 선분 GH의 길이를 어떻게 구해야 할지 생각해보자.

선분 GH는 원에서 한 현을 이루므로 마주보는 각 GCH와 원의 반지름 길이로 사인 법칙을 이용하여 구할 수 있다.

각 GCH는 각 BAC와 같고, 이는 사인 값이 $\frac{4}{5}$로 알고 있으므로 원의 반지름만 찾으면 된다.

STEP2 적절한 보조선을 그어 모르는 길이 찾기

현재 삼각형 CGH의 외접원의 반지름의 길이를 찾기 위해서는 다른 길이나 각을 이용해야한다.

현재 $\overline{CG}=2\sqrt{6}$임을 이용하지 않았으므로 이를 이용하자.

선분 GE의 보조선을 그어보면, 삼각형 CGE에서 두 변의 길이를 알고 있다. 여기에서 점 G의 의미를 생각해보자.

G는 두 원의 교점으로, $\overline{CG}=2\sqrt{6}$이 되도록 하는 점이다.

따라서, $\overline{AG}$를 연결하면 그 길이도 2가 된다.

이를 통해 삼각형 ACG의 세 변의 길이를 알 수 있으므로 코사인 법칙을 이용해 각 GCA를 구한 뒤 사인법칙을 쓰면 원의 반지름을 알 수 있다.

삼각형 ACG에서 코사인법칙을 쓰면,

$\cos(\angle GCA)=\frac{(2\sqrt{6})^2+5^2-2^2}{2\cdot 5\cdot 2\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{8}$이다.

$\overline{GE}^2=(2\sqrt{6})^2+3^2-2\cdot 3\cdot 2\sqrt{6}\frac{3\sqrt{6}}{8}=6$, $\overline{GE}=\sqrt{6}$이다.

따라서, 원의 반지름은 $2R=\frac{\sqrt{6}}{\sin(\angle GCE)}$, $R=\frac{4\sqrt{15}}{5}$이다.

$\overline{GH}=2R\sin(\angle GCH)=\frac{32\sqrt{15}}{25}$이다.

16 2025년 실시 수능 18번 정답률 86%

18. $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=6$이고 $\cos(\angle BAC)=-\frac{3}{5}$인 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [3점]

정 답 12

해 설

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin(\angle BAC)$로 구할 수 있다.

$\sin(\angle BAC)=\frac{4}{5}$이므로 대입하면 넓이는 12이다.

PART 3
수열

개념 유형

(1) 등차수열
(2) 등비수열
(3) 시그마

기출 유형

(1) 간단한 등차수열의 계산
(2) 간단한 등비수열의 계산
(3) 간단한 시그마의 계산
(4) 시그마와 등차수열, 등비수열
(5) 분수형태의 시그마
(6) 함수형태의 시그마
(7) 등차수열, 등비수열의 귀납적 추론

THEME

1 등차수열

정리1 등차수열

개념1 등차수열의 정의

첫째항부터 일정한 수를 더하여 만든 수열이며, 일정하게 더하는 수를 공차라고 한다.

① $a_{n+1}=a_n+d$

② $a_n=a_1+(n-1)d=nd+(a_1-d)$ ($f(x)=ax+b$꼴이다.)

③ $a_n=nd$ (단, 첫째항과 공차가 같음)

④ $a_n=a_m+(n-m)d$

개념2 등차중항

세 수 a_n, a_{n+1}, a_{n+2}가 이 순서대로 등차수열을 이루면

$\frac{a_n+a_{n+2}}{2}=a_{n+1}$이다.

예1 $a_1=1$, $a_3=5$라면 $a_2=3$이다.

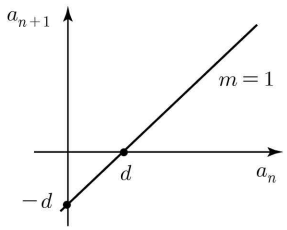
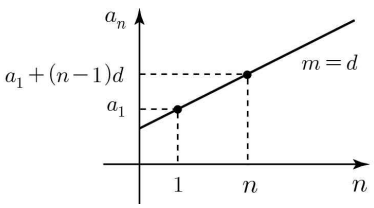
예2 $a_1=-3$, $a_3=+4$라면 $a_5=+11$이다.

개념3 등차수열의 함수적 해석

등차수열을 함수처럼 해석해서 복잡한 상황을 쉽게 이해하며 문제를 풀 수 있다.

① $a_{n+1}=a_n+d$는 y축을 a_{n+1}, x축을 a_n으로 설정한다면 $y=x+c$와 같은 그래프를 그릴 수 있다. (단, c는 상수)

② $a_n=dn+(a_1-d)$는 y축을 a_n, x축을 n으로 설정한다면 $y=ax+b$와 같은 그래프를 그릴 수 있다. (단, a, b는 상수)

a_{n+1}과 a_n의 그래프 $a_{n+1}=a_n+d$ (기울기$=1$)	a_n과 n의 그래프 $a_n=dn+(a_1-d)$ (기울기$=d$)
	

개념4 등차수열의 두 항의 부호가 반대 (기출 빈출)

등차수열의 함수적 해석을 통해 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

① $a_p+a_{p+t}=0$: a_p와 a_{p+t}의 부호는 반대이다. & 등차중항에 의해 $a_{p+\frac{t}{2}}=0$

② $|a_p|=|a_{p+t}|$: 증가함수에서 동일하려면 $y=0$인 지점이 있어야하므로 a_p와 a_{p+t}의 부호는 반대이다.

③ $|a_p|=a_{p+t}$: $|a_p|=a_{p+t}$이 되려면 $-a_p=a_{p+t}$이고, $a_p+a_{p+t}=0$가 된다.

④ $a_p\times a_{p+t}<0$: 곱셈이 음수이려면 부호가 반대이다.

정리2 등차수열의 합

개념1 등차수열의 합

첫째항부터 n번째 항까지의 합을 S_n이라 정의한다.

① $S_1 = a_1$ ② $S_n - S_{n-1} = a_n$ (단, $n \geq 2$) ③ $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$

개념2 등차수열의 합의 성질

① $S_n = \dfrac{\text{초항} + \text{끝항}}{2} \times \text{항의 개수}$ # '유도 必 암기', 일차함수 그래프를 떠올립니다.

② $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \times n = \left(\dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2}\right) \times n$ (계수가 $\dfrac{d}{2}$인 이차함수 형태이다.)

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(S_k - a_k) = \sum_{k=2}^{n} S_{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k$ (수열의 합의 시그마 형태 다양한 표현)

TIP 상수항이 있으면 등차수열이 아니다.

예를 들어 $S_n = 2n^2 + n$에서 $S_n - S_{n-1} = 4n - 1$이므로 $a_1 = S_1 = 3$으로 등차수열이다.

하지만 $S_n = 2n^2 + n + 1$에서 $S_n - S_{n-1} = 4n - 1$이지만 $S_1 = 4$이므로 등차수열이 아니다.

따라서 첫 항을 제외한 나머지가 등차수열임을 인지하자.

$S_1 = a_1 = 4$

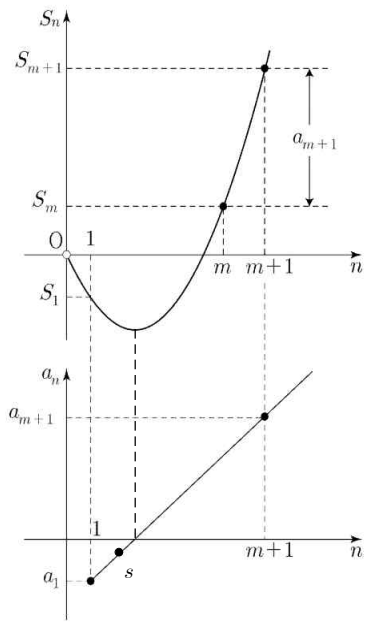
$S_2 = a_1 + a_2 = 11 \rightarrow a_2 = 7$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 22 \rightarrow a_3 = 11$

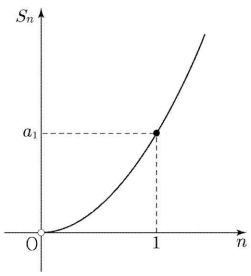
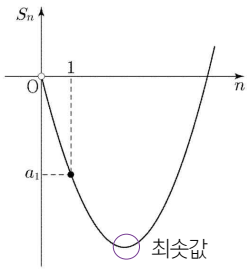
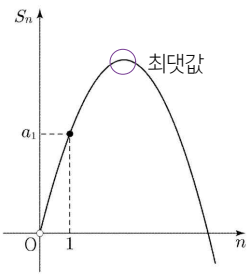
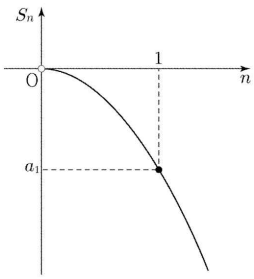
$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 37 \rightarrow a_4 = 15$

개념3 등차수열의 합의 함수적 해석

① $S_n = pn^2 + qn$의 형태이므로 원점$(0,0)$을 지난다.



② 초항과 공차에 따라 아래와 같은 그래프 개형이 가능하다.

	초항$(a_1) > 0$	초항$(a_1) < 0$
공차 $d > 0$		
공차 $d < 0$		

모든 자연수 n에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k > -M$을 만족한다면 $n = 1 \sim s$까지의 덧셈이 $-M$보다 커야한다.

THEME

2 등비수열

정리1 등비수열

개념1 등비수열

첫째항부터 차례로 일정한 수를 곱하여 만든 수열을 등비수열이라 한다. 곱하는 일정한 수를 공비라고 한다.

① $a_{n+1}=r \cdot a_n$ ② $a_n=a_1 \cdot r^{n-1}$

개념2 등비중항

세 수 a_n, a_{n+1}, a_{n+2}가 이 순서대로 등비수열을 이루면

① $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$ ② $(a_{n+1})^2=a_n a_{n+2}$

예1 $a_1=1$, $a_2=3$이면 $a_3=9$이다.

개념3 등비수열의 재구성

등비수열에서 일정한 간격으로 항을 뽑아도, 묶어도 여전히 등비수열이다.

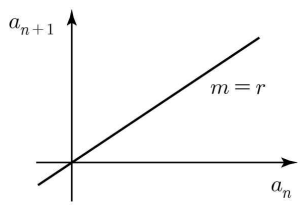
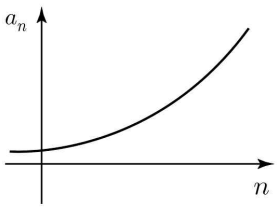
① a_1+a_2, a_3+a_4, a_5+a_6, … : $a(1+r)$, $a(1+r)r^2$으로 전개된다. ⇒ 첫 항이 $a(1+r)$이고, 공비가 r^2이다.
② a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, … : $a(1+r)$, $a(1+r)r$으로 전개된다. ⇒ 첫 항이 $a(1+r)$이고, 공비가 r이다.

③ $a_n b_n$: 공비가 $r_a r_b$인 등비수열이다. ④ $\frac{a_n}{b_n}$: 공비가 $\frac{r_a}{r_b}$인 등비수열이다. ⑤ ka_n : 공비가 r_a인 등비수열이다.

개념4 등비수열의 재구성

① 등차수열 a_n에 대하여 수열 c^{a_n}은 등비수열이다.
② 등비수열 b_n에 대하여 수열 $\log_c(b_n)$은 등차수열이다.

개념5 등비수열의 함수적 해석

a_{n+1}과 a_n의 그래프	a_n과 n의 그래프
$a_{n+1}=r \cdot a_n$ (기울기$=r$)	$a_n=a_1 \cdot r^{n-1}$ (기울기=증가)
	

개념6 등비수열의 합

첫째항부터 n번째 항까지의 합을 S_n이라 정의한다.

① $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$ ② $S_n=\frac{a}{r-1}r^n-\frac{a}{r-1}$

THEME

3 — 시그마

정리1 시그마

개념1 ∑의 표현법

① $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ ② $\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k=S_n-S_{n-1}=a_n$ (단, $n\geq 2$) ③ $\sum_{k=m+1}^{n}a_k=S_n-S_m$

개념2 ∑의 기본 성질

① $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ ② $\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k\pm\sum_{k=1}^{n}b_k$ ③ $\sum_{k=1}^{n}c=cn$

개념3 ∑의 기본 연산

① $\sum_{k=1}^{n}c=c+c+\cdots c=cn$

② $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ($S_n=\frac{\text{초항}+\text{끝항}}{2}\times$항의 개수)

③ $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)}{2}\frac{(2n+1)}{3}$

④ $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$

개념4 이항분리 (앞과 뒤에 1개가 남는 구조)

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_1-a_{n+1}$

② $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}})=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}$

③ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

④ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=-1+\sqrt{n+1}$

⑤ $\sum_{k=1}^{n}=\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1})=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$

⑥ $\sum_{k=1}^{n}\log(1+\frac{1}{k})=\log(n+1)$

TIP 부분 분수

① $\frac{C}{A\times B}=\frac{C}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$

② $\frac{1}{A\times B}=\frac{1}{B}-\frac{1}{A}$

개념5 이항분리 (앞과 뒤에 2개가 남는 구조)

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+2})=a_1+a_2-a_{n+1}-a_{n+2}$

② $\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$

③ $\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}})=-\frac{1}{2}(\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})$

유형 01 간단한 등차수열의 계산

01 2021년 실시 6월 7번 정답률 89%

7. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_6 = 2(S_3 - S_2)$$

일 때, S_{10}의 값은? [3점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

02 2021년 실시 수능 3번 정답률 92%

3. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2 = 6, \quad a_4 + a_6 = 36$$

일 때, a_{10}의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

03 2022년 실시 9월 5번 정답률 94%

5. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 - 2a_5, \quad a_8 + a_{12} - -6$$

일 때, a_2의 값은? [3점]

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

04 2025년 실시 9월 18번 정답률 95%

18. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 = 6, \quad 2a_5 - a_4 = 15$$

일 때, a_{11}의 값을 구하시오. [3점]

유형 02 간단한 등비수열의 계산

01 2021년 실시 6월 18번 정답률 85%

18. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2=36,\quad a_7=\frac{1}{3}a_5$$

일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

02 2021년 실시 9월 3번 정답률 90%

3. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=2,\quad a_2a_4=36$$

일 때, $\frac{a_7}{a_3}$의 값은? [3점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

03 2022년 실시 6월 5번 정답률 93%

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=\frac{1}{4},\quad a_2+a_3=\frac{3}{2}$$

일 때, a_6+a_7의 값은? [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

04 2022년 실시 수능 3번 정답률 87%

3. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_2+a_4=30,\quad a_4+a_6=\frac{15}{2}$$

를 만족시킬 때, a_1의 값은? [3점]

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 80

05 2023년 실시 9월 5번 정답률 90%

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_3a_8}{a_6}=12,\quad a_5+a_7=36$$

일 때, a_{11}의 값은? [3점]

① 72 ② 78 ③ 84 ④ 90 ⑤ 96

06 2023년 실시 수능 6번 정답률 88%

6. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_4-S_2=3a_4,\quad a_5=\frac{3}{4}$$

일 때, a_1+a_2의 값은? [3점]

① 27 ② 24 ③ 21 ④ 18 ⑤ 15

07 2024년 실시 6월 8번 정답률 75%

8. $a_1a_2<0$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_6=16,\quad 2a_8-3a_7=32$$

일 때, a_9+a_{11}의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

08 2024년 실시 9월 3번 정답률 92%

3. 모든 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2a_3=2,\quad a_4=4$$

일 때, a_6의 값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

09 2024년 실시 수능 3번 정답률 86%

3. 첫째항과 공비가 모두 양수 k인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\frac{a_4}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}=30$$

을 만족시킬 때, k의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

10 2025년 실시 9월 16번 정답률 96%

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=na_n+2$$

를 만족시킨다. a_3의 값을 구하시오. [3점]

11 2025년 실시 수능 12번 정답률 75%

12. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$2(a_1+a_4+a_7)=a_4+a_7+a_{10}=6$$

을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

① $\frac{22}{7}$ ② $\frac{24}{7}$ ③ $\frac{26}{7}$ ④ $\frac{30}{7}$ ⑤ $\frac{32}{7}$

12 2025년 실시 수능 16번 정답률 90%

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=n^2a_n+1$$

을 만족시킨다. a_3의 값을 구하시오. [3점]

유형 03 간단한 시그마의 계산

01 2021년 실시 9월 18번 정답률 77%

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=45,\quad \sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=3$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

02 2021년 실시 수능 18번 정답률 77%

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{7}\frac{a_k}{2}=56,\quad \sum_{k=1}^{10}2a_k-\sum_{k=1}^{8}a_k=100$$

일 때, a_8의 값을 구하시오. [3점]

03 2022년 실시 6월 18번 정답률 87%

18. $\sum_{k=1}^{10}(4k+a)=250$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

04 2022년 실시 9월 18번 정답률 84%

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}a_k=10$일 때,

$$\sum_{k=1}^{5}ca_k=65+\sum_{k=1}^{5}c$$

를 만족시키는 상수 c의 값을 구하시오. [3점]

05 2022년 실시 수능 18번 정답률 85%

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5)=55,\quad \sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=32$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5}b_k$의 값을 구하시오. [3점]

06 2023년 실시 6월 3번 정답률 90%

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=60$일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값은? [3점]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

07 2023년 실시 9월 17번 정답률 89%

17. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)=34,\quad \sum_{k=1}^{10}a_k=10$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)$의 값을 구하시오. [3점]

08 2023년 실시 수능 18번 정답률 85%

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2b_k-1),\quad \sum_{k=1}^{10}(3a_k+b_k)=33$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}b_k$의 값을 구하시오. [3점]

09 2024년 실시 6월 3번 정답률 87%

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}(a_k+1)=9$이고 $a_6=4$일 때, $\sum_{k=1}^{6}a_k$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

10 2024년 실시 6월 18번 정답률 76%

18. $\sum_{k=1}^{9}(ak^2-10k)=120$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

11 2024년 실시 9월 18번 정답률 76%

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}ka_k=36,\quad \sum_{k=1}^{9}ka_{k+1}=7$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값을 구하시오. [3점]

12 2024년 실시 수능 18번 정답률 67%

18. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n+a_{n+4}=12$$

를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{16}a_n$의 값을 구하시오. [3점]

13 2025년 실시 6월 3번 정답률 97%

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{7} a_k = 8$일 때, $\sum_{k=1}^{7} (2a_k + 1)$의 값은? [3점]

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

14 2025년 실시 6월 18번 정답률 92%

18. $\sum_{k=1}^{6} (k^2 + 2k)$의 값을 구하시오. [3점]

15 2025년 실시 9월 3번 정답률 97%

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{6} (2a_k - 1) = 30$일 때, $\sum_{k=1}^{6} a_k$의 값은? [3점]

① 2 ② 6 ③ 10 ④ 14 ⑤ 18

16 2025년 실시 수능 3번 정답률 90%

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{4}(2a_k-k)=0$일 때, $\sum_{k=1}^{4}a_k$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

17 2025년 실시 수능 20번 정답률 56%

20. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

- $a_1=7$
- 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{6}n+10$$

이다.

다음은 $\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=1}^{5}a_{2k+1}$의 값을 구하는 과정이다.

2 이상의 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k$이므로

$$a_{n+1}=\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)+\boxed{\text{(가)}}$$

이고, 이 식을 정리하면

$$2a_n+a_{n+1}=3\times\boxed{\text{(가)}} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이다.

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{6}n+10 \ (n\geq 2)$$

에서 양변에 $n=2$를 대입하면

$$a_2=\boxed{\text{(나)}} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

이다. ㉠과 ㉡에 의하여

$$\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=1}^{5}a_{2k+1}=a_1+a_2+\sum_{k=1}^{5}(2a_{2k+1}+a_{2k+2})$$
$$=\boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $\frac{p\times q}{f(12)}$의 값을 구하시오. [4점]

유형 04 시그마와 등차수열, 등비수열

01 2021년 실시 9월 13번 정답률 56%

13. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은? [4점]

(가) $|a_m| = |a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

02 2022년 실시 6월 12번 정답률 63%

12. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

(가) $a_5 \times a_7 < 0$

(나) $\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

03 2023년 실시 9월 21번 정답률 21%

21. 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_7이 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{7} S_k = 644$일 때, a_2의 값을 구하시오. [4점]

04 2024년 실시 9월 12번 정답률 58%

12. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$$

를 만족시킨다. $b_2 = -2$, $b_3 + b_7 = 0$일 때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제9항까지의 합은? [4점]

① -22 ② -20 ③ -18 ④ -16 ⑤ -14

05 2025년 실시 9월 10번 정답률

94%

10. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_2 = 1, \quad \sum_{k=1}^{6} (-1)^k S_k = 21$$

일 때, $S_2 + S_7$의 값은? [4점]

① 61 ② 63 ③ 65 ④ 67 ⑤ 69

유형 05 분수형태의 시그마

01 2021년 실시 9월 7번 정답률 76%

7. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{n}$$

을 만족시킨다. a_{13}의 값은? [3점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

02 2022년 실시 9월 7번 정답률 81%

7. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n=\frac{1}{n(n+1)}$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(S_k-a_k)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

03 2022년 실시 수능 7번 정답률 72%

7. 모든 항이 양수이고 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=2$$

를 만족시킬 때, a_4의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

04 2023년 실시 6월 9번 정답률 59%

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)a_k} = n^2 + 2n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{16}{21}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

05 2024년 실시 수능 12번 정답률 63%

12. $a_1 = 2$인 수열 $\{a_n\}$과 $b_1 = 2$인 등차수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_{k+1}} = \frac{1}{2}n^2$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{5} a_k$의 값은? [4점]

① 120 ② 125 ③ 130 ④ 135 ⑤ 140

유형 06 함수형태의 시그마

01 2021년 실시 6월 13번 정답률 68%

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0, 1]$에서

$$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다.

$\sum_{k=1}^{20} \frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$의 값은? [4점]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

02 2022년 실시 수능 13번 정답률 62%

13. 자연수 $m(m\geq 2)$에 대하여 m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $\sum_{m=2}^{9} f(m)$의 값은? [4점]

① 37 ② 42 ③ 47 ④ 52 ⑤ 57

유형 07 등차수열, 등비수열의 귀납적 추론

01 2021년 실시 6월 9번 정답률 82%

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우})\\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

이고 $a_{12}=\dfrac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{4}$ ② $\dfrac{9}{4}$ ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ $\dfrac{17}{4}$ ⑤ $\dfrac{9}{2}$

02 2022년 실시 6월 13번 정답률 61%

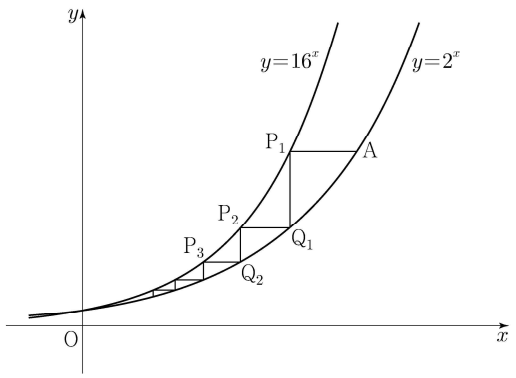
13. 두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $\mathrm{A}(64,\ 2^{64})$이 있다.

점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.

점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_n<\dfrac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수는? [4점]

① 48 ② 51 ③ 54 ④ 57 ⑤ 60



03 2025년 실시 6월 20번 정답률 63%

20. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $0 \le x < 4$일 때 $f(x) = -x^2 + 4x$이고,
> 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4) = f(x)$이다.

방정식 $f(f(x)) = f(x)$의 0 이상인 모든 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.
다음은 $a_{20} + a_{21} + a_{22}$의 값을 구하는 과정이다.

> 방정식 $f(x) = x$의 모든 실근이 0, 3이므로
> 방정식 $f(f(x)) = f(x)$의 실근을 구하는 것은
> 방정식 $f(x) \times (f(x) - 3) = 0$의 실근을 구하는 것과 같다.
>
> $0 \le x < 4$일 때, 방정식 $f(x) \times (f(x) - 3) = 0$의
> 모든 실근은 0, [(가)], 3이므로
> $a_1 = 0$, $a_2 =$ [(가)], $a_3 = 3$
> 이다. 또한 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4) = f(x)$이므로
> 세 수열 $\{a_{3n-2}\}$, $\{a_{3n-1}\}$, $\{a_{3n}\}$은
> 첫째항이 각각 0, [(가)], 3이고
> 공차가 모두 [(나)]인 등차수열이다.
> 따라서 $a_{20} + a_{21} + a_{22} =$ [(다)]이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $p+q+r$의 값을 구하시오. [4점]

유형 08 복잡한 수열의 귀납적 추론

킬러 문제로 출제, 난이도 上上上

01 2021년 실시 9월 15번 정답률 37%

15. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

02 2021년 실시 수능 21번 정답률 36%

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|a_1|=2$

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $|a_{n+1}|=2|a_n|$이다.

(다) $\sum_{n=1}^{10} a_n=-14$

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$의 값을 구하시오. [4점]

03 2022년 실시 6월 15번 정답률 35%

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$a_1=0$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+\dfrac{1}{k+1} & (a_n\le 0) \\ a_n-\dfrac{1}{k} & (a_n>0) \end{cases}$$

이다.

$a_{22}=0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

04 2022년 실시 9월 15번 정답률 37%

15. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k}=r^k$이다.
(단, r는 $0<|r|<1$인 상수이다.)

(나) $a_1<0$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (|a_n|<5) \\ -\dfrac{1}{2}a_n & (|a_n|\geq 5) \end{cases}$$

이다.

$|a_m|\geq 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p+a_1$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

05 2022년 실시 수능 15번 정답률 35%

15. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

(가) $a_7 = 40$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ \dfrac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

① 216 ② 218 ③ 220 ④ 222 ⑤ 224

06 2023년 실시 6월 15번 정답률 27%

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$

이다.

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

07 2023년 실시 9월 12번 정답률 61%

12. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_2+a_4=40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 172 ② 175 ③ 178 ④ 181 ⑤ 184

08 2023년 실시 수능 15번 정답률 65%

15. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 139 ② 146 ③ 153 ④ 160 ⑤ 167

09 2024년 실시 6월 22번 정답률 3%

22. 수열 $\{a_n\}$은

$$a_2 = -a_1$$

이고, $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - \sqrt{n} \times a_{\sqrt{n}} & (\sqrt{n}\text{이 자연수이고 } a_n > 0\text{인 경우}) \\ a_n + 1 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15} = 1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱을 구하시오. [4점]

10 2024년 실시 9월 22번 정답률 12%

22. 양수 k에 대하여 $a_1 = k$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_2 \times a_3 < 0$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$\left(a_{n+1} - a_n + \frac{2}{3}k\right)(a_{n+1} + ka_n) = 0$$이다.

$a_5 = 0$이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합을 구하시오. [4점]

11 2024년 실시 수능 22번 정답률 4%

22. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_1|$의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-3 & (|a_n|\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{1}{2}a_n & (a_n=0 \text{ 또는 } |a_n|\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

(나) $|a_m|=|a_{m+2}|$인 자연수 m의 최솟값은 3이다.

12 2025년 실시 6월 12번 정답률 86%

12. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_4의 최댓값은? [4점]

> (가) $a_1 = a_3$
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $$(a_{n+1} - a_n + 3)(a_{n+1} - 2a_n) = 0$$
> 이다.

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

유형 01 간단한 등차수열의 계산

01 2021년 실시 6월 7번 정답률 89%

7. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_6 = 2(S_3 - S_2)$$

일 때, S_{10}의 값은? [3점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

정 답 ②

해 설

STEP1 $a_6 = 2a_3$이므로 $2+5d = 2(2+2d)$이다.
따라서 $d=2$이다.

STEP2 $a_{10} = a_1 + 9d = 2 + 9 \cdot 2 = 20$이고,
$S_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10}) = 5(2+20) = 5 \cdot 22 = 110$이다.

02 2021년 실시 수능 3번 정답률 92%

3. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2 = 6, \quad a_4 + a_6 = 36$$

일 때, a_{10}의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

정 답 ⑤

해 설

STEP1 $a_4 + a_6 = 36$를 통해 $a_5 = 18$임을 알 수 있다.

STEP2 $a_2 = 6$, $a_5 = 18$를 통해 공차가 4임을 알 수 있다.

$\therefore a_{10} = 6 + 4 \times 8 = 38$

03 2022년 실시 9월 5번 정답률 94%

5. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 - 2a_5, \quad a_8 + a_{12} = -6$$

일 때, a_2의 값은? [3점]

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

정 답 ③

해 설

STEP1 $a_1 = 2a_5 \rightarrow a = 2(a+4d) \rightarrow a = -8d$

STEP2 $a_8 + a_{12} = -6 \rightarrow a_{10} = a + 9d = -3 \rightarrow d = -3,\ a = 24$

$\therefore a_2 = a + d = 21$이다.

04 2025년 실시 9월 18번 정답률 95%

18. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 = 6, \quad 2a_5 - a_4 = 15$$

일 때, a_{11}의 값을 구하시오. [3점]

정 답 30

해 설

공차를 d라 하자.

$2a_5 - a_4 = 2(a_4 + d) - a_4 = a_4 + 2d$이다.

$a_4 + 2d = a_6 = 15$이므로 공차는 3이다.

$a_{11} = a_6 + 5d = 30$이다.

유형 02 간단한 등비수열의 계산

01 2021년 실시 6월 18번 정답률 85%

18. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2=36,\quad a_7=\frac{1}{3}a_5$$

일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

정 답 4

해 설

STEP1 $a_2=ar=36,\ a_7=\frac{1}{3}a_5 \rightarrow r^2=\frac{1}{3}$

STEP2 $a_6=ar^5=(ar)r^4=36\times\frac{1}{9}=4$

02 2021년 실시 9월 3번 정답률 90%

3. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=2,\quad a_2a_4=36$$

일 때, $\frac{a_7}{a_3}$의 값은? [3점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

정 답 5

해 설

STEP1 $a_2a_4=a^2r^4=4r^4=36$

STEP2 $\frac{a_7}{a_3}=r^4=9$

03 2022년 실시 6월 5번 정답률 93%

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=\frac{1}{4},\quad a_2+a_3=\frac{3}{2}$$

일 때, a_6+a_7의 값은? [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

정 답 ③

해 설

STEP1 $a_2+a_3=a(r+r^2)=\frac{1}{4}(r+r^2)=\frac{3}{2}$

$r^2+r-6=(r-2)(r+3)=0 \rightarrow r=2$

STEP2 $a_6+a_7=a(r^5+r^6)=\frac{1}{4}(32+64)=24$

04 2022년 실시 수능 3번 정답률 87%

3. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_2+a_4=30,\quad a_4+a_6=\frac{15}{2}$$

를 만족시킬 때, a_1의 값은? [3점]

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 80

정 답 ①

해 설

$a_2+a_4=ar(1+r^2)=30,\ a_4+a_6=ar^3(1+r^2)=\frac{15}{2}$

두 식을 나누면 $r^2=\frac{1}{4}$ → $a_2+a_4=\frac{5a}{8}=30$ → $a=48$

05 2023년 실시 9월 5번 정답률 90%

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_3a_8}{a_6}=12,\quad a_5+a_7=36$$

일 때, a_{11}의 값은? [3점]

① 72 ② 78 ③ 84 ④ 90 ⑤ 96

정 답 ⑤

해 설

STEP1 $\frac{a_3a_8}{a_6}=a\frac{r^9}{r^5}=ar^4=12,\ a_5+a_7=ar^4(1+r^2)=36$

두 식을 연립하면 $1+r^2=3$에서 $r^2=2,\ a=3$이다.

STEP2 $a_{11}=ar^{10}=3\times2^5=96$이다.

06 2023년 실시 수능 6번 정답률 88%

6. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_4-S_2=3a_4,\quad a_5=\frac{3}{4}$$

일 때, a_1+a_2의 값은? [3점]

① 27 ② 24 ③ 21 ④ 18 ⑤ 15

정 답 ④

해 설

STEP1 $S_4-S_2=a_4+a_3=3a_4$ → $a_3=2a_4$ → $r=\frac{1}{2}$

STEP2 $a_5=ar^4=\frac{a}{16}=\frac{3}{4}$ → $a=12$

STEP3 $a_1+a_2=a(1+r)=12\times\frac{3}{2}=18$

07 2024년 실시 6월 8번 정답률 75%

8. $a_1a_2<0$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_6=16,\quad 2a_8-3a_7=32$$

일 때, a_9+a_{11}의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

정 답 ①

해 설

$a_1a_2=a^2r<0$이므로 $r<0$이다.

$a_6=ar^5=16$에서 $a<0$이다.

$2a_8-3a_7=2ar^7-3ar^6=32r^2-48r=32$

$2r^2-3r-2=(r-2)(2r+1)=0$에서 $r=-\frac{1}{2}$이다.

따라서 $a_9+a_{11}=ar^8+ar^{10}=16r^3+16r^5=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$이다.

08 2024년 실시 9월 3번 정답률 92%

3. 모든 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2a_3=2,\quad a_4=4$$

일 때, a_6의 값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

정 답 ④

해 설

$a_2a_3=a^2r^3=2$, $a_4=ar^3=4$를 만족한다.

두 식을 나누면 $a=\frac{1}{2}$, $r=2$이다.

따라서 $a_6=ar^5=16$이다.

09 2024년 실시 수능 3번 정답률 86%

3. 첫째항과 공비가 모두 양수 k인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\frac{a_4}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}=30$$

을 만족시킬 때, k의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ⑤

해 설

$\frac{a_4}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}=r^2+r=30$에서 공비가 양수이므로 $r=5$이다.

10 2025년 실시 9월 16번 정답률 96%

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=na_n+2$$

를 만족시킨다. a_3의 값을 구하시오. [3점]

정 답 8

해 설

점화식에 대입하여 a_3을 구하자.

$a_2=a_1+2=3$, $a_3=2a_2+2=8$이다.

11 2025년 실시 수능 12번 정답률 75%

12. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$2(a_1+a_4+a_7)=a_4+a_7+a_{10}=6$$

을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

① $\frac{22}{7}$ ② $\frac{24}{7}$ ③ $\frac{26}{7}$ ④ $\frac{30}{7}$ ⑤ $\frac{32}{7}$

정 답 ②

해 설

공비를 r이라 하자.

$(a_1+a_4+a_7)r^3=a_4+a_7+a_{10}$이다.

따라서, $r^3=2$이다.

$a_4+a_7+a_{10}=a_4(1+r^3+r^6)=7a_4$이다.

따라서, $a_4=\frac{6}{7}$이다.

$a_{10}=a_4r^6=\frac{24}{7}$이다.

12 2025년 실시 수능 16번 정답률 90%

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=n^2a_n+1$$

을 만족시킨다. a_3의 값을 구하시오. [3점]

정 답 9

해 설

$n=1, 2$를 차례대로 대입하자.

$a_2=a_1+1=2$이고, $a_3=4a_2+1=9$이다.

유형 03 간단한 시그마의 계산

01 2021년 실시 9월 18번 정답률 77%

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=45,\quad \sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=3$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 9

해 설

$a+2b=45$, $a-b=3$의 두 식을 연립하면 $b=14$이다.

$\sum_{k=1}^{10}(b_k-\frac{1}{2})=b-5=9$이다.

02 2021년 실시 수능 18번 정답률 77%

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{7}\frac{a_k}{2}=56,\quad \sum_{k=1}^{10}2a_k-\sum_{k=1}^{8}a_k=100$$

일 때, a_8의 값을 구하시오. [3점]

정 답 12

해 설

$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{7}\frac{a_k}{2}=56$의 양변에 2배를 취하자. (형태 맞추기)

$\sum_{k=1}^{10}2a_k-\sum_{k=1}^{7}a_k=112$에서 $\sum_{k=1}^{10}2a_k-\sum_{k=1}^{8}a_k=100$를 빼면

$a_8=12$이다.

03 2022년 실시 6월 18번 정답률 87%

18. $\sum_{k=1}^{10}(4k+a)=250$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

정 답 3

해 설

$4\times55+10a=250$에서 $a=3$이다.

04 2022년 실시 9월 18번 정답률 84%

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}a_k=10$일 때,

$$\sum_{k=1}^{5}ca_k=65+\sum_{k=1}^{5}c$$

를 만족시키는 상수 c의 값을 구하시오. [3점]

정 답 13

해 설

$\sum_{k=1}^{5}ca_k=65+\sum_{k=1}^{5}c$를 정리하면 $10c=65+5c$, $c=13$이다.

05 2022년 실시 수능 18번 정답률 85%

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5)=55,\quad \sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=32$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5}b_k$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 22

해 설

식 1) $3a+25=55$에서 $a=10$이다.

식 2) $a+b=32$에서 $b=22$이다.

06 2023년 실시 6월 3번 정답률 90%

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=60$일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값은? [3점]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

정 답 ②

해 설

$2a+30=60 \rightarrow a=15$

07 2023년 실시 9월 17번 정답률 89%

17. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)=34,\quad \sum_{k=1}^{10}a_k=10$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 24

해 설

$2a-b=34$에서 $a=10$이므로 $b=-14$이다.

$\therefore a-b=10+14=24$이다.

08 2023년 실시 수능 18번 정답률 85%

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2b_k-1),\quad \sum_{k=1}^{10}(3a_k+b_k)=33$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}b_k$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 9

해 설

$a=2b-10$, $3a+b=33$을 풀면 된다.

$3(2b-10)+b=7b-30=33$에서 $b=9$이다.

09 2024년 실시 6월 3번 정답률 87%

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}(a_k+1)=9$이고 $a_6=4$일 때, $\sum_{k=1}^{6}a_k$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

정 답 ③

해 설

$\sum_{k=1}^{5}a_k=4$이고, $a_6=4$이므로 $\sum_{k=1}^{6}a_k=8$이다.

10 2024년 실시 6월 18번 정답률 76%

18. $\sum_{k=1}^{9}(ak^2-10k)=120$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

정 답 2

해 설

$\sum_{k=1}^{9}(ak^2-10k)=a\frac{9\times10\times19}{6}-10\frac{9\times10}{2}=120$에서 $a=2$이다.

11 2024년 실시 9월 18번 정답률 76%

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}ka_k=36,\quad \sum_{k=1}^{9}ka_{k+1}=7$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 29

해 설

$\sum_{k=1}^{10}ka_k=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+10a_{10}=36$

$\sum_{k=1}^{9}ka_{k+1}=a_2+2a_3+3a_4+\cdots+9a_{10}=7$을 빼면

$\sum_{k=1}^{10}a_k=29$이다.

12 2024년 실시 수능 18번 정답률 67%

18. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n+a_{n+4}=12$$

를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{16}a_n$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 96

해 설

$(a_1+a_5)+(a_2+a_6)+(a_3+a_7)+(a_4+a_8)=\sum_{n=1}^{8}a_n=48$이므로

$\sum_{n=1}^{16}a_n=96$이다.

13 2025년 실시 6월 3번 정답률 97%

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{7} a_k = 8$일 때, $\sum_{k=1}^{7} (2a_k + 1)$의 값은? [3점]

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

정 답 ③

해 설

$\sum_{k=1}^{7} (2a_k + 1) = 2\sum_{k=1}^{7} a_k + \sum_{k=1}^{7} 1 = 16 + 7 = 23$이다.

14 2025년 실시 6월 18번 정답률 92%

18. $\sum_{k=1}^{6} (k^2 + 2k)$의 값을 구하시오. [3점]

정 답 133

해 설

$$\sum_{k=1}^{6} (k^2 + 2k) = \sum_{k=1}^{6} k^2 + \sum_{k=1}^{6} 2k$$
$$= \frac{6 \times 7 \times 13}{6} + 2\frac{6 \times 7}{2} = 91 + 42 = 133$$

15 2025년 실시 9월 3번 정답률 97%

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{6} (2a_k - 1) = 30$일 때, $\sum_{k=1}^{6} a_k$의 값은? [3점]

① 2 ② 6 ③ 10 ④ 14 ⑤ 18

정 답 ⑤

해 설

$\sum_{k=1}^{6} (2a_k - 1) = 2\sum_{k=1}^{6} a_k - \sum_{k=1}^{6} 1 = 30$이다.

따라서, $\sum_{k=1}^{6} a_k = 18$이다.

16 2025년 실시 수능 3번 정답률 90%

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{4}(2a_k-k)=0$일 때, $\sum_{k=1}^{4}a_k$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정 답 ⑤

해 설

$\sum_{k=1}^{4}(2a_k-k)=2\sum_{k=1}^{4}a_k-\sum_{k=1}^{4}k=0$이다.

$\sum_{k=1}^{4}k=10$이므로 $\sum_{k=1}^{4}a_k=5$이다.

17 2025년 실시 수능 20번 정답률 56%

20. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

- $a_1=7$
- 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{6}n+10$$

이다.

다음은 $\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=1}^{5}a_{2k+1}$의 값을 구하는 과정이다.

2 이상의 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k$이므로

$$a_{n+1}=\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)+\boxed{\text{(가)}}$$

이고, 이 식을 정리하면

$$2a_n+a_{n+1}=3\times\boxed{\text{(가)}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이다.

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{6}n+10 \ (n\geq 2)$$

에서 양변에 $n=2$를 대입하면

$$a_2=\boxed{\text{(나)}} \quad \cdots\cdots ㉡$$

이다. ㉠과 ㉡에 의하여

$$\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=1}^{5}a_{2k+1}=a_1+a_2+\sum_{k=1}^{5}(2a_{2k+1}+a_{2k+2})$$
$$=\boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $\frac{p\times q}{f(12)}$의 값을 구하시오. [4점]

정 답 130

해 설

평가원에서 모의고사로 예고한 것처럼 빈칸을 채우는 문항이 출제되었다.

난이도는 높지 않으므로 풀이를 잘 따라가면서 빈칸을 채우면 된다.

$$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)+\frac{1}{6}((n+1)^2-n^2)-\frac{1}{6}((n+$$
$$=\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)+\frac{1}{6}(2n+1)-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)+\frac{n}{3}$$

따라서, (가)는 $\frac{n}{3}$이다.

위의 식을 정리하면, $2a_n+a_{n+1}=n$이다.

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{6}n+10$에서 $n=2$를 대입하자.

좌변은 $a_1+a_2=7+a_2$이고, 우변은

$\frac{2}{3}a_2+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+10=\frac{2}{3}a_2+\frac{31}{3}$이다.

따라서, $a_2+7=\frac{2}{3}a_2+\frac{31}{3}$, $a_2=10$이다.

(나)는 10이다.

$a_1+a_2+\sum_{k=1}^{5}(2a_{2k+1}+a_{2k+2})$에서 $a_1+a_2=17$이고,

$2a_{2k+1}+a_{2k+2}=2k+1$임을 대입하자.

$$a_1+a_2+\sum_{k=1}^{5}(2a_{2k+1}+a_{2k+2})=17+\sum_{k=1}^{5}(2k+1)=17+30+5=52$$

따라서, (다)는 52이다.

$f(12)=4$, $p=10$, $q=52$이다.

유형 04 시그마와 등차수열, 등비수열

01 2021년 실시 9월 13번 정답률 56%

13. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은? [4점]

(가) $|a_m|=|a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

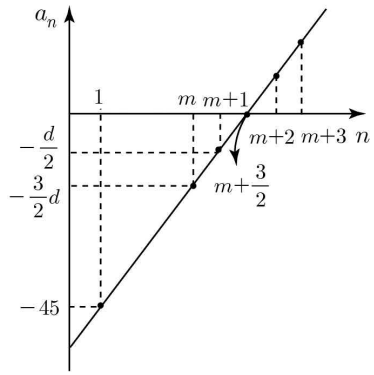
① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

정 답 ②

해 설

STEP1 조건 (가)의 분석

• 수열의 첫째항이 음수이고, 공차가 양수인 그래프는 아래와 같다.



• $|a_m|=|a_{m+3}|$이 되려면 그래프를 통해 서로의 부호가 무조건 반대이다. 따라서 $a_{m+\frac{3}{2}}=-45+(m+\frac{1}{2})d=0$이다.
정리하면 $d(2m+1)=90$ 을 만족한다.

• 자연수X자연수$=90$이 되는 순서쌍을 구하면 아래와 같다.
우선 90을 소인수분해하면 $90=2\times3\times3\times5$ 이다.
$(d, 2m+1)=(2,45),\ (6,15),\ (10,9),\ (18,5),\ (30,3)$
$(d, m)\ =(2,22),\ (6,7),\ (10,4),\ (18,2),\ (30,1)$

STEP2 조건 (나)의 분석

• 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$을 만족하므로, $\sum_{k=1}^{n} a_k$의 값이 최소가 될 때의 값이 -100보다는 커야함을 알 수 있다.
이때, $\sum_{k=1}^{n} a_k$의 값이 최소가 되기 위해서는 더해지는 각 항들이 음수일 때에만 가능하다. (개념 참고)
등차수열의 경우에는, 항들이 음수였다가 양수로 바뀌기 때문에 처음 나오는 양수가 더해지기 전까지의 합이 최소가 된다.
따라서, 이는 $n=m+1$일 때 최소이다.

• $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{-45-\frac{d}{2}}{2}(m+1) > -100$을 정리하면
$(90+d)(m+1)<400$ 을 만족한다.

• 위의 조합 중 가능한 순서쌍은 $(18,2),\ (30,1)$이므로
모든 자연수 d의 합은 48이다.

02 2022년 실시 6월 12번 정답률 63%

12. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

(가) $a_5 \times a_7 < 0$

(나) $\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

정 답 ③

해 설

STEP1 조건 (가)의 분석

• $a_5 \times a_7 < 0$가 되면 그래프를 통하여 $a_5 < 0$이고, $a_7 > 0$이다.

STEP2 조건 (나)의 분석

• $\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$을 정리해보면
$|a_7| + |a_9| + |a_{11}| = 6 + |a_2| + |a_4| + |a_6|$이다.

• 위를 통해 $a_7, a_9, a_{10} > 0$, $a_2, a_4 < 0$, a_6의 부호는 알 수 없다.

• $a_7 + a_9 + a_{11} = 6 - a_2 - a_4 + |a_6|$가 되고, 등차중항을 이용하여
$3a_9 = 6 - 2a_3 + |a_6|$으로 정리를 할 수 있다.

STEP3 CASE 분석

CASE 1. $a_6 \geq 0$일 때

$3(a+24) = 6 - 2(a+6) + (a+15)$를 정리하면 $a = -\frac{63}{4}$이다.

$a_6 = -\frac{63}{4} + 15 < 0$이므로 모순이다. (X)

CASE 2. $a_6 < 0$일 때

$3(a+24) = 6 - 2(a+6) - (a+15)$를 정리하면 $a = -\frac{31}{2}$이다.

$a_6 = -\frac{31}{2} + 15 < 0$이므로 조건을 만족한다.

따라서 $a_{10} = -\frac{31}{2} + 27 = \frac{23}{2}$이다.

03 2023년 실시 9월 21번 정답률 21%

21. 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_7이 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{7} S_k = 644$일 때, a_2의 값을 구하시오. [4점]

정 답 19

해 설

STEP1 조건의 분석

- a_7이 13의 배수 : $a+6d=13$의 배수
- $\sum_{k=1}^{7} S_k = \sum_{k=1}^{7} \frac{n[2a+(n-1)d]}{2} = \sum_{k=1}^{7} \frac{dn^2+(2a-d)n}{2} = 644$

$70d+14(2a-d)=644$, $a+2d=23$이 된다.

STEP2 답 구하기

- $a+6d=13m$ (단, m은 자연수)과 $a+2d=23$를 연립하면 $4d=13(m-2)+3$이 된다. 추론해보면 $4d=3, 16, 42\ldots$가 된다.
- 여기서 16을 통하여 $d=4$라고 한다면, $a=15$가 된다.

따라서 $a_2=19$이다.

04 2024년 실시 9월 12번 정답률 58%

12. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$$

를 만족시킨다. $b_2=-2$, $b_3+b_7=0$일 때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제9항까지의 합은? [4점]

① -22 ② -20 ③ -18 ④ -16 ⑤ -14

정 답 ②

해 설

- $b_1=a_1$
- $b_2=a_1-a_2=-d=-2$에서 $d=2$이다.
- $b_3=a_1-a_2+a_3=a_2$
- $b_4=-2d$

으로 규칙성이 만들어진다.

라서 $b_3+b_7=a_2+a_4=2a+4d=0$에서 $a=-4$이다.

수열 b_n의 첫째항부터 제9항까지의 합은

a_1~a_5까지의 합 + $-d$~$-4d$까지의 합으로 계산할 수 있다.

$a_1=-4$이고, $a_5=4$이므로 a_1~a_5까지의 합은 0이다.

-2, -4, -6, -8 의 합은 -20이다.

05 2025년 실시 9월 10번 정답률 94%

10. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_2 = 1, \quad \sum_{k=1}^{6} (-1)^k S_k = 21$$

일 때, $S_2 + S_7$의 값은? [4점]

① 61 ② 63 ③ 65 ④ 67 ⑤ 69

정 답 ③

해 설

$\sum_{k=1}^{6} (-1)^k S_k = (S_6 - S_5) + (S_4 - S_3) + (S_2 - S_1) = a_6 + a_4 + a_2$이다.

$\{a_n\}$의 공비를 r이라 하자.

$a_6 + a_4 + a_2 = r^4 + r^2 + 1 = 21$이므로 $r = 2$이다.

$S_2 = \frac{3}{2}$이고, $S_7 = \frac{1}{2}\frac{1-2^7}{1-2} = \frac{127}{2}$이다.

$S_2 + S_7 = 65$이다.

유형 05 분수형태의 시그마

01 2021년 실시 9월 7번 정답률 76%

7. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{n}$$

을 만족시킨다. a_{13}의 값은? [3점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

정 답 ④

해 설

$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}})=\frac{1}{n}$을 정리하면

$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{n}$

따라서 $-\frac{1}{4}-\frac{1}{a_{13}}=\frac{1}{12}$, $a_{13}=-3$이 된다.

02 2022년 실시 9월 7번 정답률 81%

7. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$S_n=\frac{1}{n(n+1)}$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(S_k-a_k)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

정 답 ⑤

해 설

- $a_k=S_k-S_{k-1}$ $(k\geq 2)$로 생각할 수 있다.
- $\sum_{k=1}^{10}(S_k-a_k)=\sum_{k=2}^{10}S_{k-1}=\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{(k-1)k}=\sum_{k=2}^{10}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k})=\frac{9}{10}$
  ($S_1=a_1$이다.)

03 2022년 실시 수능 7번 정답률 72%

7. 모든 항이 양수이고 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=2$$

를 만족시킬 때, a_4의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

정 답 ④

해 설

- 첫째항 $a_1=a$과 공차 d가 같다고 나와있으므로 $a_n=dn$이라고 할 수 있다.
- $\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

  $=\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{k=1}^{15}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\frac{1}{\sqrt{d}}(-1+4)=\frac{3}{\sqrt{d}}=2$

  를 정리하면 $d=\frac{9}{4}$이다.
- $a_n=\frac{9}{4}n$이므로 $a_4=9$이다.

04 2023년 실시 6월 9번 정답률 59%

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}=n^2+2n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{16}{21}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

정 답 ①

해 설

· $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}=n^2+2n$

$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(2k-1)a_k}=(n-1)^2+2(n-1)=n^2-1$

두 식을 빼면 $\frac{1}{(2n-1)a_n}=2n+1 \rightarrow a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

· $\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{21})=\frac{10}{21}$

05 2024년 실시 수능 12번 정답률 63%

12. $a_1=2$인 수열 $\{a_n\}$과 $b_1=2$인 등차수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_{k+1}}=\frac{1}{2}n^2$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{5}a_k$의 값은? [4점]

① 120 ② 125 ③ 130 ④ 135 ⑤ 140

정 답 ①

해 설

$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_{k+1}}=\frac{1}{2}n^2$에서 $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b_{k+1}}=\frac{1}{2}(n-1)^2$을 빼자.

그러면 $\frac{a_n}{b_{n+1}}=n-\frac{1}{2}$이다.

· $\frac{a_1}{b_2}=\frac{1}{2}$에서 $b_2=4$이므로 $b_n=2n$이다.

· $\frac{a_n}{2n+2}=n-\frac{1}{2}$에서 $a_n=2n^2+n-1$이다.

· $\sum_{k=1}^{5}a_k=120$

유형 06 함수형태의 시그마

01 2021년 실시 6월 13번 정답률 68%

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0, 1]$에서

$$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다.

$\sum_{k=1}^{20} \frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$의 값은? [4점]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

정 답 ⑤

해 설

STEP1 조건 분석

- $f(x)=\begin{cases} 3\,(0<x<1) \\ 1\,(x=1) \end{cases}$ 와 $f(x+1)=f(x)$를 해석해보면
  정수의 x에서 $f(x)=1$이고, 그 외의 x에서 $f(x)=3$이다.
- $\sum_{k=1}^{20} \frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$를 보면 $f(x)$안에 $\sqrt{k}$가 있으므로
  k는 제곱수가 될 때 $f(x)=1$이다. (k는 1, 4, 9, 16)

STEP2 계산

- $\sum_{k=1}^{20} k=\frac{1+20}{2}\times 20=210$에서 $1+4+9+16=30$을 빼면 180이다.
- 180에다가 $\frac{1}{3}(1+4+9+16)=10$을 더하면 190이다.

02 2022년 실시 수능 13번 정답률 62%

13. 자연수 $m\,(m\geq 2)$에 대하여 m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $\sum_{m=2}^{9} f(m)$의 값은? [4점]

① 37 ② 42 ③ 47 ④ 52 ⑤ 57

정 답 ③

해 설

STEP1 조건 분석

$x^n=m^{12}$에서 $x=m^{\frac{12}{n}}$이 정수를 만족하게 하는 2 이상의 자연수 n의 개수가 $f(m)$이다.

STEP2 계산

CASE 1. 밑이 소수 $(m=2,3,5,6,7)$

$f(2)$ ➡ $2^{\frac{12}{n}}$ ➡ $12=2^2\times 3^1$에서 $3\times 2-1=5$개의 n이 존재
(계수에 1을 더한 값을 곱하고 1을 뺀 것이 n의 개수이다.)

CASE 2. 밑이 제곱수 $(m=4,9)$

$f(4)$ ➡ $2^{\frac{24}{n}}$ ➡ $24=2^3\times 3^1$에서 $4\times 2-1=7$개의 n이 존재

CASE 3. 밑이 세제곱수 $(m=8)$

$f(8)$ ➡ $2^{\frac{36}{n}}$ ➡ $36=2^2\times 3^2$에서 $3\times 3-1=8$개의 n이 존재

STEP3 답 구하기

$\sum_{m=2}^{9} f(m)=25+14+8=47$

유형 07 등차수열, 등비수열의 귀납적 추론

01 2021년 실시 6월 9번 정답률 82%

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우})\\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

이고 $a_{12}=\dfrac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{4}$ ② $\dfrac{9}{4}$ ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ $\dfrac{17}{4}$ ⑤ $\dfrac{9}{2}$

정 답 ⑤

해 설

$a_{12}=\dfrac{1}{2} \rightarrow a_{11}=2 \rightarrow a_{10}=\dfrac{1}{4} \rightarrow a_9=4 \rightarrow a_8=\dfrac{1}{2}$

역수 8로 나눔 역수 8로 나눔

여기서 주기 4로 반복되는 규칙을 찾을 수 있다.

따라서 $a_1=4,\ a_4=\dfrac{1}{2}$이므로 $a_1+a_4=\dfrac{9}{2}$이다.

■ 기출 수학의 중요한 관점

① 수열 a_n의 질문 : a_n은 국소적 규칙성(주기성)이 있다.

② 수열을 통한 임의의 p_n의 질문 : p_n은 국소적 규칙성이 있다..

02 2022년 실시 6월 13번 정답률 61%

13. 두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $\mathrm{A}(64,\ 2^{64})$이 있다.

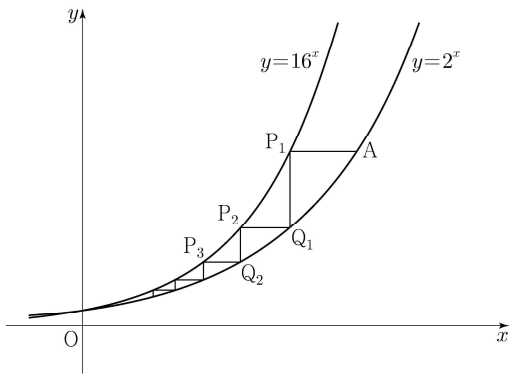
점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.

점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때,

$x_n<\dfrac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수는? [4점]

① 48 ② 51 ③ 54 ④ 57 ⑤ 60



정 답 ①

해 설

• 규칙을 찾기 위하여 $\mathrm{A}(m,2^m)$로 치환하자. (단, $m=64$)

$2^{4x}=2^m$에서 $x=\dfrac{1}{4}m$가 된다.

즉, x의 값은 매 시행마다 $\dfrac{1}{4}$배가 됨을 알 수 있다.

따라서 Q_n의 x좌표 $x_n=2^{-2n+6}$이다.

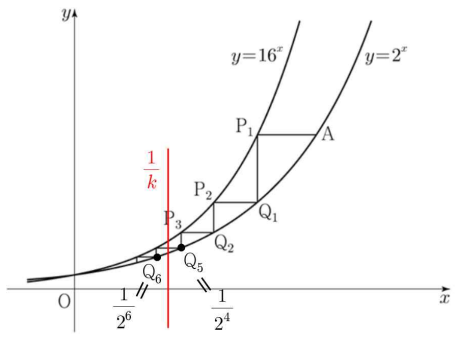
• 조건의 전체적 생각

$x_6=\dfrac{1}{2^6}<\dfrac{1}{k}$가 되는 k를 생각해야 한다. (k : 1~63)

• 조건의 특수적 생각

$n=6$이 최솟값이라고 나와있으므로 $\dfrac{1}{k}$는 $\dfrac{1}{2^4}$를 초과하면 안된다.

정리하면 $\dfrac{1}{k}\leq\dfrac{1}{2^4}$이다. ($k$: 16~63)



따라서 자연수 k의 개수는 $63-16+1=48$개이다.

03 2025년 실시 6월 20번 정답률 63%

20. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $0 \le x < 4$일 때 $f(x) = -x^2 + 4x$이고,
> 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4) = f(x)$이다.

방정식 $f(f(x)) = f(x)$의 0 이상인 모든 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.
다음은 $a_{20} + a_{21} + a_{22}$의 값을 구하는 과정이다.

> 방정식 $f(x) = x$의 모든 실근이 0, 3이므로
> 방정식 $f(f(x)) = f(x)$의 실근을 구하는 것은
> 방정식 $f(x) \times (f(x) - 3) = 0$의 실근을 구하는 것과 같다.
>
> $0 \le x < 4$일 때, 방정식 $f(x) \times (f(x) - 3) = 0$의
> 모든 실근은 0, [(가)], 3이므로
> $a_1 = 0$, $a_2 =$ [(가)], $a_3 = 3$
> 이다. 또한 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4) = f(x)$이므로
> 세 수열 $\{a_{3n-2}\}$, $\{a_{3n-1}\}$, $\{a_{3n}\}$은
> 첫째항이 각각 0, [(가)], 3이고
> 공차가 모두 [(나)]인 등차수열이다.
> 따라서 $a_{20} + a_{21} + a_{22} =$ [(다)]이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $p+q+r$의 값을 구하시오. [4점]

정 답 85

해 설

흔하게 나왔던 유형은 아니지만 풀이과정에 대한 서술을 차근차근 따라가다 보면 오히려 더 쉬운 문항이다.
(가)는 $f(x) = 0$, $f(x) = 3$의 $0 \le x < 4$에서의 근을 묻고 있다.
$f(x) = 0$의 근은 $x = 0$뿐이고, $f(x) = 3$의 근은 $x = 1, 3$이다.
따라서, (가)는 1이다.
문제의 흐름을 따라가면, 앞에서 구한 근을 기준으로
$f(x) = f(x+4)$의 주기성을 활용하여 등차수열로 바꾸어 해석하였다.
직관적으로 공차가 4임을 알 수 있고, (나)는 4이다.
문제에서 물어본 a_{20}, a_{21}, a_{22}를 최종적으로 구하자.
$a_{22} = a_1 + 7d$, $a_{21} = a_3 + 6d$, $a_{20} = a_2 + 6d$이다.
$a_{22} = 28$, $a_{21} = 27$, $a_{20} = 25$이다.
따라서, (다)는 80이다.
$p+q+r = 1+4+80 = 85$이다.

유형 08 복잡한 수열의 귀납적 추론

킬러 문제로 출제, 난이도 上上上

01 2021년 실시 9월 15번 정답률 37%

15. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} -2a_n-2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n+2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5+a_6=0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

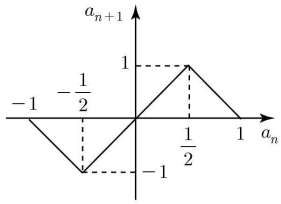
정 답 ①

해 설

STEP1 조건 확인

a_{n+1}에 대해서 3가지의 a_n의 형태가 제시되어 있으므로 식보다는 그래프를 그려서 생각해보자.

- $a_{n+1}>0 \Rightarrow a_n>0$
- $a_{n+1}=0 \Rightarrow a_n=-1, 0, 1$
- $a_{n+1}=1 \Rightarrow a_n=\frac{1}{2}$
- $a_{n+1}=\frac{1}{2} \Rightarrow a_n=\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$



STEP2 a_5의 값 조사

CASE 1. $-1 \le a_5 < -\frac{1}{2}$

$a_6=-2a_5-2=-a_5 \rightarrow a_5=-2$는 범위 해당X

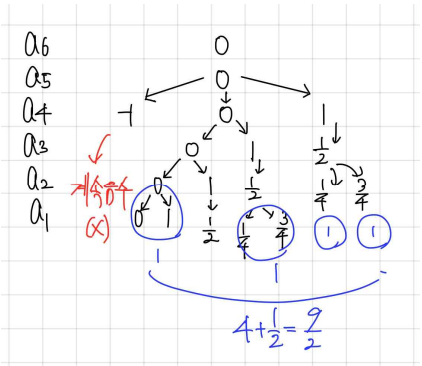
CASE 2. $-\frac{1}{2} \le a_5 \le \frac{1}{2}$

$a_6=2a_5=-a_5 \rightarrow a_5=0$는 범위 해당O

CASE 3. $\frac{1}{2} < a_5 \le 1$

$a_6=-2a_5+2=-a_5 \rightarrow a_5=2$는 범위 해당X

STEP3 답 구하기 (실제 선생님들의 손필기 참조!)



- a_5는 0이므로 a_4는 $-1, 0, 1$이 가능하다.
  이때 a_4항이 -1가 되면 계속 음수가 되므로 덧셈 조건이 안된다.
- 양수값에 대해서 y축으로 선을 긋고 해의 합을 생각하면 1이다.
- 모든 a_1의 값의 합을 구하면 $4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$이다.

02 2021년 실시 수능 21번 정답률 36%

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|a_1|=2$

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $|a_{n+1}|=2|a_n|$이다.

(다) $\sum_{n=1}^{10} a_n=-14$

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$의 값을 구하시오. [4점]

정 답 678

해 설

- (가) $|a_1|=2$를 통해 $a_1=2$ or -2이다.
- (나) $|a_{n+1}|=2|a_n|$를 통해 예를 들어, $-2, 4, 8, -16, \ldots$와 같은 수열임을 알 수 있다.
  참고로 부호를 모르기에 전체가 등비수열은 아니다.
  부호를 모르기에 양의 값을 갖는 항들의 합을 A, 음의 값을 갖는 항들의 합을 B라고 하겠다.
- 만약 모든 값들이 양수라면 $A-B=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}=2046$이다.
  (다) $\sum_{n=1}^{10} a_n=-14$를 통해 $A+B=-14$이다.
  두 식을 연립하면 $A=1016,\ B=-1030$이 나온다.
- 전체의 합이 음수라는 것은 지수함수의 $S_{n-1}<a_n$에 의하여 마지막 1024는 무조건 -1024가 되야만 한다.
  이를 통해 $B=-1024,\ -2,\ -4$라고 추론할 수 있다.
- $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$을 구할 때 a_1외에 모든 수가 양수이므로 $-2+\frac{8(4^4-1)}{4-1}=678$이다.

03 2022년 실시 6월 15번 정답률 35%

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$a_1=0$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+\dfrac{1}{k+1} & (a_n\le 0) \\ a_n-\dfrac{1}{k} & (a_n>0) \end{cases}$$

이다.

$a_{22}=0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

정 답 ②

해 설

• $a_1=0$, $a_{22}=0$을 보며 규칙을 찾아야함을 생각해볼 수 있다.

• $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+\dfrac{1}{k+1} & (a_n\le 0) \\ a_n-\dfrac{1}{k} & (a_n>0) \end{cases}$ 을 보면 더하고, 빼고가 반복되는 느낌이 난다. 그래서 미리 통분을 해주도록 하겠다.

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+\dfrac{k}{k(k+1)} & (a_n\le 0) \\ a_n-\dfrac{k+1}{k(k+1)} & (a_n>0) \end{cases}$$

• 순서쌍을 정리해보자.

$a_1=0$

$a_2=\dfrac{k}{k(k+1)}>0$ (k는 자연수이다.)

$a_3=\dfrac{-1}{k(k+1)}<0$

$a_4=\dfrac{k-1}{k(k+1)}$ → $k=1$이면 주기가 3이다. → $a_{22}=a_1=0$ (O)

자연수 $k\ge 2$라면 $a_4>0$이므로

$a_5=\dfrac{-2}{k(k+1)}<0$

$a_6=\dfrac{k-2}{k(k+1)}$ → $k=2$이면 주기가 5이다. → $a_{22}\ne a_1$ (X)

• 규칙성을 통하여 주기 $T=2k+1$임을 추론할 수 있다.

• 주기는 21의 약수가 되야한다. 21의 약수는 3, 7, 21이다.

• 가능한 k의 값은 1, 3, 10이므로 모든 k의 값의 합은 14이다.

04 2022년 실시 9월 15번 정답률 37%

15. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k}=r^k$이다.
(단, r는 $0<|r|<1$인 상수이다.)

(나) $a_1<0$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (|a_n|<5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (|a_n|\geq 5) \end{cases}$$

이다.

$|a_m|\geq 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p+a_1$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

정 답 ③

해 설

• $|a_m|\geq 5$를 만족시키는 100이하의 자연수 m의 개수를 p를 보며 100까지에 대한 반복되는 규칙을 찾아야함을 생각해볼 수 있다. (숫자가 크면 반복되는 성질을 파악할 수 있음을 물어보는 것이 타당함을 점차 알게 될 것이다.)

• $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (|a_n|<5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (|a_n|\geq 5) \end{cases}$을 보면 더하고, 나누기가 반복되는 느낌이 난다.

• 순서쌍을 정리해보자.

(가)에 의해 $a_4=r$, $a_8=r^2\cdots$이다. (단, r은 $0<|r|<1$)

$a_5=r+3<5$

$a_6=r+6>5$

$a_7=-\frac{r+6}{2}>-5$

$a_8=-\frac{1}{2}r=r^2$이 되므로 $r=-\frac{1}{2}$이다.

정리하면 a_4이후로 $|a_m|\geq 5$가 되는 주기는 4이고 첫 항은 a_6이다.

• 개수 구하기

6부터 100까지 4의 배수씩 증가하는 수의 개수는

$p_n=6+4(n-1)\leqq 100$에서 $n\leqq 24.5$이므로 $n=24$개다.

• 첫째 항 구하기

$a_4=-\frac{1}{2}$를 통해 $a_3=-\frac{7}{2}$이다. ($a_3=1$은 안된다.)

$a_3=-\frac{7}{2}$을 통해 $a_2=7$이다. ($a_2=-6.5$은 안된다.)

$a_2=7$을 통해 $a_1=-14$이다. ($a_1<0$인 조건이 있다.)

• 답 구하기

$p=24+2=26$, $a_1=-14$이므로 답은 12이다.

05 2022년 실시 수능 15번 정답률 35%

15. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

(가) $a_7 = 40$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ \dfrac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

① 216 ② 218 ③ 220 ④ 222 ⑤ 224

정 답 ⑤

해 설

- 3의 배수를 통하여 답을 구해야하므로 3에 초점을 맞춰보자.
  어떤 임의의 항 a_m이 3의 배수를 만족했다고 하자.
  (쓰지도 않을 항이 있을리는 없으므로 타당한 생각이다.)
- $a_m = 3^t k$(k는 3의 배수가 아님)라고 가정하여 계산해보자. (규칙성 추론하기)
  $a_{m+t} = k$, $a_{m+t+1} = 4k$, $a_{m+t+2} = 5k$, $a_{m+t+3} = 9k$, $a_{m+t+4} = 3k$를 통하여 수열의 주기성이 있음을 확인했다.
- 자연수 k와 곱해서 40이 될 수 있는 항들만 조사해보자.
  $a_7 = 40$일 때 a_9를 구하는 것이 목적임도 기억하자.
  $a_{m+t} = k = 40$이라면 $a_{m+t+2} = 5k = 200$이다.
  $a_{m+t+1} = 4k = 40$이라면 $a_{m+t+3} = 9k = 90$이다.
  $a_{m+t+2} = 5k = 40$이라면 $a_{m+t+4} = 3k = 24$이다.
- 따라서 $M+m = 200+24 = 224$이다.

06 2023년 실시 6월 15번 정답률 27%

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$

이다.

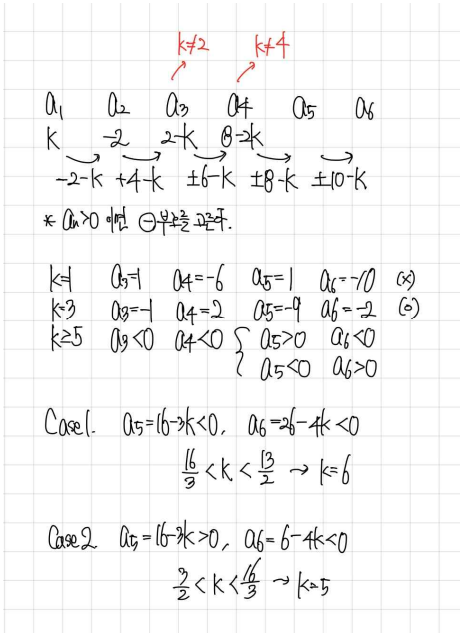
$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

정 답 ②

해 설

- $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$라는 것은 다음과 같이 해석이 된다.
  ① 음수가 홀수개 (1개, 3개)이다.
  ② $a_n \neq 0$
- 순서쌍을 정리해보자. (실제 선생님들의 손필기 참조!)



따라서 모든 k의 값의 합은 $3+5+6=14$이다.

수열의 규칙성보다는 항 사이의 덧셈의 규칙성을 제시해줬다.
그러다보니 CASE 전수조사를 해서 문제를 해결해야했다.
CASE 전수조사를 할 때 $k=1$, $k=3$, $a_5>0$, $a_5<0$
총 4가지이므로 이 정도는 할만하다.

07 2023년 실시 9월 12번 정답률 61%

12. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

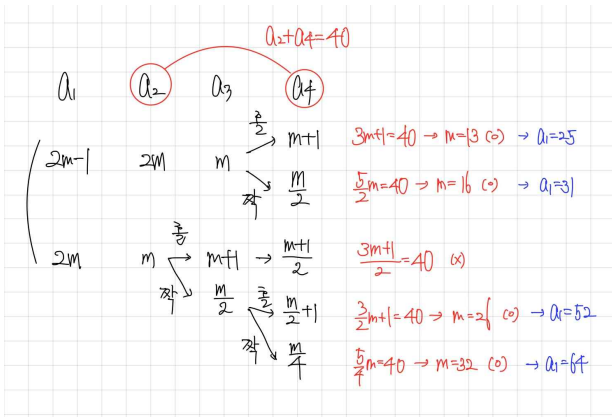
를 만족시킬 때, $a_2+a_4=40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 172 ② 175 ③ 178 ④ 181 ⑤ 184

정 답 ①

해 설

- a_n이 홀수라면 1을 더해서 짝수를 만드는 것을 알 수 있다.
  a_n이 짝수라면 2로 나눠서 2를 포함한 짝수는 짝수가 되고,
  2를 포함하지 못한 짝수는 홀수가 되는 것을 알 수 있다.
- 순서쌍을 정리해보자.



모든 a_1의 값의 합은 1720이다.

08 2023년 실시 수능 15번 정답률 65%

15. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우})\\ \dfrac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 139 ② 146 ③ 153 ④ 160 ⑤ 167

정 답 ③

해 설

2023년 실시 9월 모의고사와 형태가 완벽하게 동일하다.

① a_n이 홀수일 때 a_{n+1}은 2의 배수로 짝수가 된다.

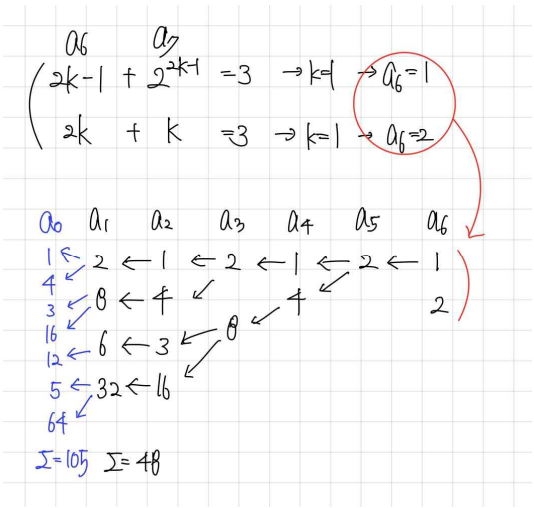
② a_n이 짝수일 때 a_{n+1}은 2의 포함 여부로 홀/짝이 결정된다.

③ 항을 더해서 어떠한 값이 된다.

④ 모든 a_1을 더한다.

세밀한 내용은 다를지라도, 거시적 관점은 완벽하게 동일하다.

- 자연수인 a_6이 홀수라면 아래의 식에서 $k=1$만 된다. → $a_6=1$
  $k=2$가 되면 a_6+a_7은 3을 넘어간다.
- 자연수인 a_6이 짝수라면 아래의 식에서 $k=1$이다. → $a_6=2$



- 위의 수형도처럼, a_6을 통하여 a_1으로 가야한다.
- $a_n=2k-1$라면 $a_{n+1}=2^{2k-1}$이다. (EX : 2, 8, 32, 128...)
  $a_n=2k$라면 $a_{n+1}=k$로 자연수이다.
  즉, a_{n+1}이 2^{2k-1}.라면 $a_n=\begin{cases}\log_2 a_{n+1}\\ 2a_{n+1}\end{cases}$ 둘 다 가능하고, 이외에는 한 가지만 가능하다.
- $a_6=1$일 때 a_0에 쓴 값들이 $a_6=2$일 때의 a_1값이 된다.
- 모든 a_1의 합은 153이다.

09 2024년 실시 6월 22번 정답률 3%

22. 수열 $\{a_n\}$은

$$a_2 = -a_1$$

이고, $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - \sqrt{n} \times a_{\sqrt{n}} & (\sqrt{n}\text{이 자연수이고 } a_n > 0\text{인 경우}) \\ a_n + 1 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15} = 1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱을 구하시오. [4점]

정 답 231

해 설

STEP1 초기값 설정

a_1을 a로 설정하고, 조건 $a_2 = -a_1$을 만족하도록 초기값을 설정하자.

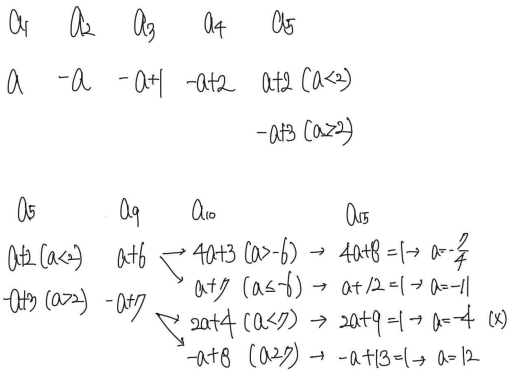
이후 a_{n+1}은 $\sqrt{n}$=자연수일 때 특수한 수열 조건을 만족한다.

즉, $n=4$, $n=9$일 때 $a_{n+1} = a_n - \sqrt{n} \times a_{\sqrt{n}}$을 만족한다.

- $a_5 = a_4 - 2a_2$ (단, $a_4 > 0$)
- $a_{10} = a_9 - 3a_3$ (단, $a_9 > 0$)

STEP2 수열 나열

수열을 나열하면 아래와 같다.



따라서 가능한 a_1의 값의 곱은 $-\frac{7}{4} \times -11 \times 12 = 231$이다.

10 2024년 실시 9월 22번 정답률 12%

22. 양수 k에 대하여 $a_1 = k$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_2 \times a_3 < 0$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$\left(a_{n+1} - a_n + \frac{2}{3}k\right)(a_{n+1} + ka_n) - 0$$이다.

$a_5 = 0$이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합을 구하시오. [4점]

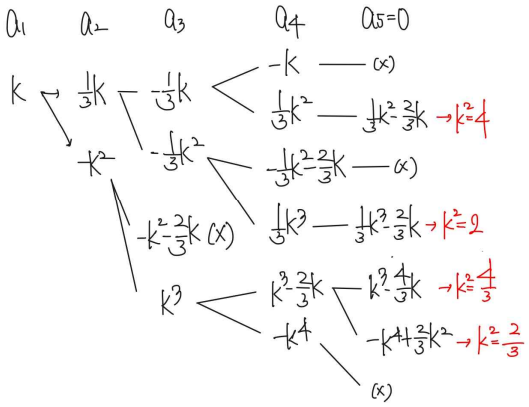
정 답 8

해 설

주어진 조건을 정리해보면

(가) a_2와 a_3의 부호는 반대이다.

(나) $a_{n+1} = a_n - \frac{2}{3}k$ 또는 $a_{n+1} = -ka_n$이다.



가능한 모든 k^2의 값의 합을 계산하면 8이다.

(강의에서의 설명과 같이 양쪽에서 좁혀오면 더 빠른 풀이도 가능하다.)

11 2024년 실시 수능 22번 정답률 4%

22. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_1|$의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-3 & (|a_n|\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n=0 \text{ 또는 } |a_n|\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

(나) $|a_m|=|a_{m+2}|$인 자연수 m의 최솟값은 3이다.

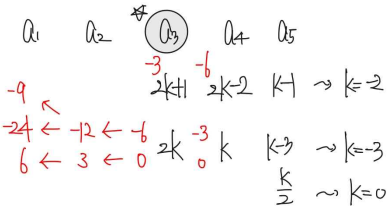
정 답 64

해 설

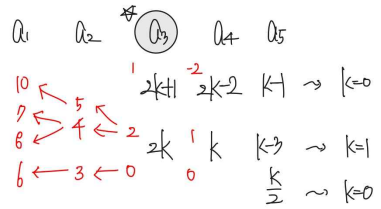
주어진 (나)의 조건을 생각해보면 $|a_3|=|a_5|$를 만족한다.

따라서 $|a_3|$가 홀수 또는 짝수인 경우를 나누어 조사하자.

CASE 1. $a_3=a_5$인 경우



CASE 2. $a_3=-a_5$인 경우



따라서 $|a_1|$들의 합을 구하면 64이다.

12 2025년 실시 6월 12번 정답률 86%

12. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_4의 최댓값은? [4점]

(가) $a_1 = a_3$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$(a_{n+1} - a_n + 3)(a_{n+1} - 2a_n) = 0$$

이다.

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

정 답 ②

해 설

STEP1 (나) 조건으로 경우를 나누기

- (나)에서 $a_{n+1} = a_n - 3$ 또는 $a_{n+1} = 2a_n$이다.
- $a_2 = a_1 - 3$ 또는 $a_2 = 2a_1$이다.
- $a_2 = a_1 - 3$인 경우, $a_3 = a_1 - 6$ 또는 $a_3 = 2(a_1 - 3)$이다.
  $a_3 = a_1 - 6$은 불가능하고, $a_1 = a_3 = 2(a_1 - 3)$이다.
  이때 $a_1 = 6$이다.
- $a_2 = 2a_1$인 경우, $a_3 = 2a_1 - 3$ 또는 $a_3 = 4a_1$이다.
  $a_1 = a_3 = 2a_1 - 3$이면 $a_1 = \frac{3}{2}$이고, $a_1 = a_3 = 4a_1$이면 $a_1 = 0$이다.

STEP2 a_4의 최댓값 구하기

- $a_1 = 6$이면, $a_4 = 12$ 또는 3이다. $a_1 = \frac{3}{2}$이면 $a_4 = 3$ 또는 $-\frac{3}{2}$이다. $a_1 = 0$이면 $a_1 = -3$ 또는 0이다.

따라서, a_4의 최댓값은 $a_4 = 12$이다.